



Universidad Nacional

**SAN LUIS GONZAGA**



### **[Atribución 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0)**

Esta licencia permite que otros distribuyan, mezclen, adapten y construyan sobre su trabajo, incluso comercialmente, siempre que le reconozcan la creación original. Esta es la licencia más complaciente que se ofrece. Recomendado para la máxima difusión y uso de materiales con licencia.

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>



**N° 016-2024**

## **CONSTANCIA**

El que suscribe, director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica y Electrónica, hace constar que se ha realizado el análisis con el software de verificación de similitud de la Tesis cuyo título es:

**“MÉTODOS PARA LA DIFERENCIACIÓN Y REGULARIZACIÓN DE LOS DATOS DE MEDICIÓN EN LOS SISTEMAS DE SEGUIMIENTO ORIENTADO A LA SALUD DEL ADULTO MAYOR”**

Presentado por:

**ROJAS LEON, ERICK MARCIAL**

**TITULANDO EGRESADO** del nivel de **PREGRADO** de la Facultad **INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA** – Escuela Profesional de **INGENIERÍA ELECTRÓNICA**. El resultado obtenido es un porcentaje de **DOS POR CIENTO (2%)**, por el cual se le otorga el calificativo de:

**APROBADO**

Se adjunta al presente, el reporte de evaluación con el software de verificación de originalidad.

Ica, 19 de Enero del 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA  
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



.....  
**Mag. Zenon Eusebio Pacheco Casavilca**  
JEFE DE UNIDAD

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"  
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN  
Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica y Electrónica



**“Métodos para la diferenciación y regularización de los datos de medición en los sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor”**

Línea de investigación

Ciencias naturales, ingeniería y tecnologías sostenibles

**TESIS**

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:  
**INGENIERO ELECTRÓNICO**

PRESENTADO POR EL BACHILLER:  
**ERICK MARCIAL ROJAS LEON**

ASESOR:

**Mag. ARCADIO BENITO PARVINA CARRASCO**

**ICA, PERÚ**

**2022**

## DEDICATORIA

Mi gratitud hacia mi Padre Celestial, por estar siempre presente en mi vida y ayudarme a superar diversas adversidades, así como a mis progenitores y seres queridos, quienes me apoyaron día a día, con sus motivaciones, sus consejos, para poder lograr mi objetivo.

Le dedico este logro a ellos, a quienes aprecio profundamente.

## AGRADECIMIENTOS

A mis padres, ya que, siempre han sido la fuerza impulsora detrás de mis sueños y esperanzas, han estado a mi lado durante mis días y noches de estudio más difíciles. Han sido mis mejores guías en la vida. Hoy, al terminar mis estudios, agradezco mucho a ellos, ya que he logrado una meta más. Estoy orgulloso de que estén conmigo, en este momento tan importante.

Gracias por ser como son y gracias por creer en mí.

## INDICE

Dedicatoria.....	ii
Agradecimientos .....	iii
Índice.....	iv
Índice de tablas.....	vi
Índice de figuras.....	vii
Resumen.....	ix
Abstract.....	x
I. Introducción.....	1
1.1. Realidad problemática.....	1
1.1.1. Problema general .....	1
1.1.2. Problemas específicos.....	1
1.2. Antecedentes .....	1
1.2.1. Antecedentes internacionales.....	1
1.2.2. Antecedentes nacionales.....	2
1.2.3. Antecedentes locales.....	2
1.3. Justificación e Importancia.....	2
1.3.1. Justificación.....	2
1.3.2. Importancia.....	3
1.4. Objetivo de la investigación.....	3
1.4.1. Objetivo general .....	3
1.4.2. Objetivos específicos.....	3
1.5. Hipótesis y variable.....	3
1.5.1. Hipótesis .....	3
1.5.2. Variables.....	3
1.6. Contenido de la investigación .....	4
II. Estrategia metodológica .....	5
2.1. Tipo, nivel y diseño de la investigación.....	5
2.1.1. Seguimiento orientado a la salud de las personas mayores .....	5
2.2. Modelamiento matemático de datos de medición .....	7
2.2.1. Modelo matemático de diferenciación numérica.....	7
2.2.2. Modelo matemático de regularización de diferenciación numérica .....	9
2.3. Procesamiento de datos de medición.....	28
2.3.1. Pre-Procesamiento de datos de sensores de profundidad .....	28
2.3.2. Pre-Procesamiento de datos de sensores de radar de impulso .....	33
2.4. Experimentos basados en datos sintéticos.....	40

2.4.1. Metodología de experimentación .....	40
2.5. Experimentos basados en datos del mundo real: Estimación de la velocidad al caminar .....	42
2.5.1. Metodología de experimentación .....	42
III. Resultados .....	46
3.1. Experimentos basados en datos del mundo real: Detección de caídas .....	57
3.1.1. Metodología de experimentación .....	57
3.1.2. Resultados de los experimentos .....	63
IV. Discusión .....	67
V. Conclusiones .....	68
VI. Recomendación.....	69
VII. Referencias bibliográficas .....	70
VIII. Anexos.....	82

## Índice de Tablas

Tabla I: Métodos de diferenciación numérica.....	25
Tabla II: Indicadores de desempeño para resultados de clasificación basados en estimaciones de velocidad obtenidas mediante diferentes métodos de diferenciación numérica para $S=1$ .....	64
Tabla III: Indicadores de desempeño para resultados de clasificación basados en estimaciones de velocidad obtenidas mediante diferentes métodos de diferenciación numérica para $S=0.98$ .....	65

## Índice de Figura

Figura N°1:	Modelo de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor.....	5
Figura N°2:	Principio de funcionamiento del sensor de profundidad; IP – proyector infrarrojo, IC – cámara infrarroja .....	28
Figura N°3:	Imagen de profundidad (los puntos más brillantes indican mayor profundidad) .	29
Figura N°4:	Imagen de profundidad (a), resultados de la extracción de la silueta de esa imagen de profundidad (b), conjunto de puntos tridimensionales en el sistema de coordenadas de referencia, correspondiente a esa silueta (c) y estimaciones de la posición del centro de la persona monitoreada masa, basada en varios de estos conjuntos de puntos (d) .....	30
Figura N°5:	Imagen de profundidad (a), estimación de fondo estático (b), resultado de discriminación de fondo (c) y resultado de filtrado (d).....	31
Figura N°6:	Principio de funcionamiento del sensor de radar de impulso; EA – antena emisora, RA – antena receptora) .....	33
Figura N°7:	Datos ejemplificadores del sensor de radar #1 (a) y #2 (b); resultados de su preprocesamiento: señales extraídas de datos del sensor de radar #1 (c) y #2 (d), estimaciones de distancias entre la persona monitoreada y los sensores de radar (azul – #1, verde – #2) (e), estimaciones de coordenadas bidimensionales de la posición de la persona monitoreada, con cuadrados azules y verdes indicando las posiciones de los sensores de radar #1 y #2, respectivamente (f).....	35
Figura N°8:	Datos ejemplificadores del radar correspondientes a un instante de tiempo único (a) y señal extraída de esos datos (b) .....	36
Figura N°9:	Impulso emitido por el sensor de radar (a) y resultados de su coincidencia con la señal extraída (b) .....	37
Figura N°10:	Localización de la persona monitoreada por medio de un par de sensores de radar .....	37
Figura N°11:	Función utilizada para la generación de datos sintéticos (línea continua) y su primera derivada (línea discontinua) .....	40
Figura N°12:	Incertidumbre expandida $u_{46}$ de las estimaciones $\hat{x}_{46,r}^{(1)}$ obtenidas del método CD3-DS para diferentes valores del parámetro $k$ como criterios subyacentes a las estrategias para la optimización de dicho parámetro; las líneas verticales discontinuas indican $k_{opt}$ .....	42
Figura N°13:	Configuración experimental.....	43
Figura N°14:	Sesgo medio (columna izquierda: a, c, e, g, i, k) y desviación estándar (columna derecha: b, d, f, h, j, l) de las estimaciones de la velocidad al caminar obtenidas	

sobre la base de datos de profundidad por Medios de 26 métodos de diferenciación numérica para 6 valores de velocidad de referencia.....	46
Figura N°15: Sesgo medio (columna izquierda: a, c, e, g, i, k) y desviación típica (columna derecha: b, d, f, h, j, l) de las estimaciones de la velocidad de marcha, obtenidas sobre la base de datos de radar mediante 26 métodos de diferenciación numérica para 6 valores de velocidad de referencia.....	47
Figura N°16: Promedio $\pm$ desviación estándar de las estimaciones $\hat{v}_{n,r}$ obtenido sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) por medio de 26 métodos de diferenciación numérica, para $v_{ref} = 0,5 \text{ m/s}$ .....	50
Figura N°17: Promedio $\pm$ desviación estándar de las estimaciones $\hat{v}_{n,r}$ , obtenida sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) mediante 26 métodos de diferenciación numérica, para $v_{ref} = 1.0 \text{ m/s}$ .....	53
Figura N°18: Imágenes de profundidad representando las caídas (a, b) y no caídas (c, d) contenidas en el conjunto de datos de laboratorio #1 (a, c) y el conjunto de datos de laboratorio #2 (b, d) .....	59
Figura N°19: Ubicación del dispositivo Kinect y laptop utilizados.....	60
Figura N°20: Plano del apartamento adquirido para el conjunto de datos hogar.....	60
Figura N°21: Estimaciones de la desviación estándar de errores que alteran las estimaciones basadas en datos de profundidad de las coordenadas de la posición de la persona monitoreada, y su aproximación cuadrática.....	61
Figura N°22: Indicador de rendimiento P para los resultados de la clasificación basada en estimaciones de velocidad obtenidas mediante diferentes métodos de diferenciación numérica para $S = 1$ (azul) y $S=0,98$ (negro).....	64
Figura N°23: Indicador de rendimiento FAR para los resultados de la clasificación basada en estimaciones de velocidad obtenidas mediante diferentes métodos de diferenciación numérica para $S=1$ (azul) y $S=0,98$ (negro).....	64

## RESUMEN

La efectividad en la detección de caídas, seguimiento y monitoreo del desplazamiento en adultos mayores enfrenta desafíos cruciales en la actualidad y para garantizar sistemas de monitoreo precisos y eficientes esta investigación tiene como objetivo implementar métodos para la diferenciación y regularización de los datos de medición en los sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor. La metodología de estudio es experimental cuantitativa, obtenido a partir del modelado matemático de los datos de medición en la diferenciación numérica y regularización de diferenciación numérica para el pre-procesamiento de datos de sensores de profundidad, y sensores de radar impulso permitiendo el procesamiento de los datos de medición, con llevando a las experiencias basado en datos sintéticos y en datos del mundo real. Los resultados revelan errores significativos en estimaciones de velocidad sin regularización, los métodos con regularización evidencian secuencias cuasiperiódicas asociadas al movimiento humano en la marcha. Se garantizo la detección de todas las caídas y la optimización de los parámetros en el caso de 26 métodos de diferenciación numérica para las estimaciones de la velocidad, trayectoria de marcha, y detección de las caídas del adulto mayor. Se destaca la relevancia de algoritmos adaptativos para mejorar la precisión en la diferenciación de datos en sistemas de seguimiento, considerando entornos variables y dinámicos, para promover el bienestar de adultos mayores.

Palabras clave: Diferenciación numérica, regularización, sensor de profundidad, sensor de radar por impulso.

## ABSTRACT

The effectiveness of fall detection, tracking and monitoring of displacement in older adults currently faces crucial challenges and to guarantee accurate and efficient monitoring systems this research aims to implement methods for the differentiation and regularization of measurement data in the monitoring systems aimed at the health of the elderly. The study methodology is quantitative experimental, obtained from the mathematical modeling of the measurement data in numerical differentiation and regularization of numerical differentiation for the pre-processing of data from depth sensors, and impulse radar sensors allowing the processing of the measurement data, leading to experiences based on synthetic data and real-world data. The results reveal significant errors in speed estimates without regularization; methods with regularization show quasiperiodic sequences associated with human movement while walking. The detection of all falls and the optimization of the parameters were guaranteed in the case of 26 numerical differentiation methods for the estimates of speed, walking trajectory, and detection of falls in the elderly. The relevance of adaptive algorithms is highlighted to improve the precision in data differentiation in monitoring systems, considering variable and dynamic environments, to promote the well-being of older adults.

Keywords: Numerical differentiation, regularization, depth sensor, pulse-radar sensor.

# I. INTRODUCCIÓN

## 1.1. Realidad problemática.

En la era digital, la integración creciente de sistemas de seguimiento para monitorear variables, como detección de caídas o velocidad de marcha, ha revolucionado la atención médica. Sin embargo, la efectividad en la detección de caídas o velocidad de marcha en adultos mayores enfrenta desafíos cruciales. Esta investigación se centra en la crítica problemática de selección e implementación de métodos y técnicas de regularización de datos de medición para utilizarlas en la detección de caídas y velocidad de marcha, explorando la complejidad desde una perspectiva electrónica. Asimismo, el desafío de la creación de algoritmos eficaces en condiciones no uniformes, y el modelamiento matemático que permita la comprensión de la diferencia numérica como la determinación de una secuencia sobre la base de una secuencia de operaciones, y la regularización como la imposición de restricciones adicionales a un conjunto impidiendo la propagación de errores de medición, debido a que los datos demandan algoritmos precisos y flexibles. Es crucial comprender las causas de las caídas en adultos mayores, ya que estas originan fracturas, lesiones graves y reducen la calidad de vida. Detallar estas causas y mejorar la detección es vital para garantizar sistemas de monitoreo precisos y eficientes en la prevención de riesgos de caídas en esta población vulnerable.

### 1.1.1. Problema general.

¿Cómo implementar métodos que permitan la diferenciación y regularización de los datos de medición en los sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor?

### 1.1.2. Problemas específicos.

¿Cómo desarrollar métodos de diferenciación numérica de los datos de medición que permitan la estimación de velocidad de marcha?

¿Cómo se establecerá la potenciación de los parámetros de detección de caídas para la optimización de los métodos de regularización numérica?

¿Cómo se representará un algoritmo en un entorno de desarrollo integrado que permita la simulación de los sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor?

## 1.2. Antecedentes.

### 1.2.1. Antecedentes Internacionales.

En el 2022, Endo y Premachandra [1], examinaron las medidas contra los accidentes que ocurren en los baños y se propone un sistema de control para evitar el ahogamiento accidental debido a la pérdida de conciencia en un posible accidente.

En el 2020, Bolic, Han, y Yang [2] describieron un nuevo sistema de detección de señales respiratorias, siendo capaz de rastrear simultáneamente la posición de la persona detectando su señal respiratoria.

En el 2019, Gutta, et al. [3] diseñaron una animación para determinar una configuración adecuada para los sensores de profundidad, ubicados en un pasillo institucional, para la captura y seguimiento de la superficie del pie humano.

En el 2018, Chiani, Giorgetti, y Polini [4] presentaron una red de sensores para imágenes de radio, en conjunto a los pasos que comprende el procesamiento de señales necesarios, para lograr el seguimiento de objetos de alta precisión en entornos de propagación hostiles.

En el 2018, Heizmann, et al. [5] presentaron un enfoque novedoso para la detección y seguimiento de personas con múltiples sensores de profundidad desde una vista superior.

En el 2012, Sivalingan et al. [6] presentaron un sistema de visión por computadora utilizando cámaras y sensores de profundidad para monitorear los niños a través de múltiples vistas de manera efectiva y durante largos períodos de tiempo.

#### **1.2.2. Antecedentes Nacionales.**

En el 2022, Monzon y Ramos [7] implementaron un sistema que le permita a las instituciones de salud, médicos y pacientes la posibilidad de prevenir y monitorear la evolución de su enfermedad desde cualquier ubicación con acceso a internet. A partir de ello, se evalúa la necesidad de implementar y contrastar métodos que permitan simular la medición respecto a las caídas, distancias, y velocidad de desplazamiento de los adultos mayores durante la atención asistencial médica en un determinado centro de salud, para el registro y futuras investigaciones.

#### **1.2.3. Antecedentes Locales.**

No he encontrado antecedentes locales.

### **1.3. Justificación e importancia de la investigación.**

#### **1.3.1. Justificación.**

La investigación se justifica socialmente, porque ofrece una solución al monitoreo asistencial médico mediante dispositivos inteligentes utilizados en poblaciones de alta vulnerabilidad y de riesgo, como los adultos mayores de la ciudad de Ica; teóricamente, por el fortalecimiento de las capacidades del investigador basadas en los dispositivos inteligentes para el monitoreo asistencial médico de los adultos mayores de la ciudad de Ica; y técnicamente, por la propuesta de implementación de métodos para la diferenciación y regularización de los datos de medición en los sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor en la ciudad de Ica.

### **1.3.2. Importancia.**

Conforme se ha señalado previamente, la importancia de la investigación se ciñe a desarrollar el registro computarizado de la altitud, la distancia, y la velocidad de desplazamiento de los adultos mayores a través de un sensor, y de ser necesario proveer otro sensor que permita dotar de mayor profundidad estos registros, complementando el monitoreo durante la atención de los adultos mayores previamente implementado en los consultorios de atención inmediata en centros de salud, clínicas, y hospitales de la ciudad de Ica.

### **1.4. Objetivos de la investigación.**

Según el proyecto propuesto, los objetivos son:

#### **1.4.1. Objetivo general.**

Implementar los métodos para la diferenciación y regularización de los datos de medición en los sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor.

#### **1.4.2. Objetivos específicos.**

Diseñar un modelo matemático para los métodos diferenciación numérica de los datos de medición para la estimación de la velocidad de marcha.

Establecer la potenciación de los parámetros de detección de caídas para optimizar los métodos de regularización numérica.

Estructurar un algoritmo en un entorno de desarrollo integrado para simular los sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor.

### **1.5. Hipótesis y variables de la investigación.**

Según el proyecto propuesto, la hipótesis y las variables son:

#### **1.5.1. Hipótesis.**

##### **a) Hipótesis general.**

Con la implementación de los métodos para la diferenciación y regularización de los datos de medición se mejorará los sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor.

##### **b) Hipótesis específicas.**

Con el diseño del modelo matemático para los métodos diferenciación numérica de los datos de medición se estimará la velocidad de marcha.

Con la potenciación de los parámetros de detección de caídas se optimizará los métodos de regularización numérica.

Empleando un entorno de desarrollo integrado se estructurará un algoritmo que simula los sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor.

#### **1.5.2. Variables.**

##### **Variable independiente**

Métodos para la diferenciación y regularización de los datos de medición.

**Variable dependiente.**

Sistemas de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor.

**1.6. Contenido de la investigación.**

Para una mejor comprensión en el capítulo I, se hace la introducción describiendo la realidad problemática, los antecedentes, la justificación e importancia, y los objetivos de la investigación. Respecto al capítulo II, se explica la metodología empleada en la investigación con base al seguimiento orientado a la salud de las personas mayores; al modelamiento matemático de datos de medición; al procesamiento de datos de medición; experimentos basados en datos sintéticos; y a los experimentos basados en datos del mundo real para la estimación de la velocidad al caminar. De acuerdo con ello, en el capítulo III se explica los resultados obtenidos tras realizar cálculos y simulaciones. En virtud de ello, en el capítulo IV, se discuten los resultados de la investigación. Finalmente, en el capítulo V, se formula las conclusiones de la tesis, y en el capítulo VI, se propone las recomendaciones para futuras investigaciones.

## II. ESTRATEGIA METODOLÓGICA

### 2.1. Tipo, Nivel y Diseño de la investigación.

**Tipo de la investigación.** El tipo de la investigación es aplicada tecnológica.

**Nivel de la investigación.** El nivel de la investigación según la relación de causalidad califica como un estudio explicativo.

**Diseño de la investigación.** El diseño de la investigación cumple las condiciones metodológicas del diseño experimental, debido a que el investigador determinara como se desarrollara el experimento u observación.

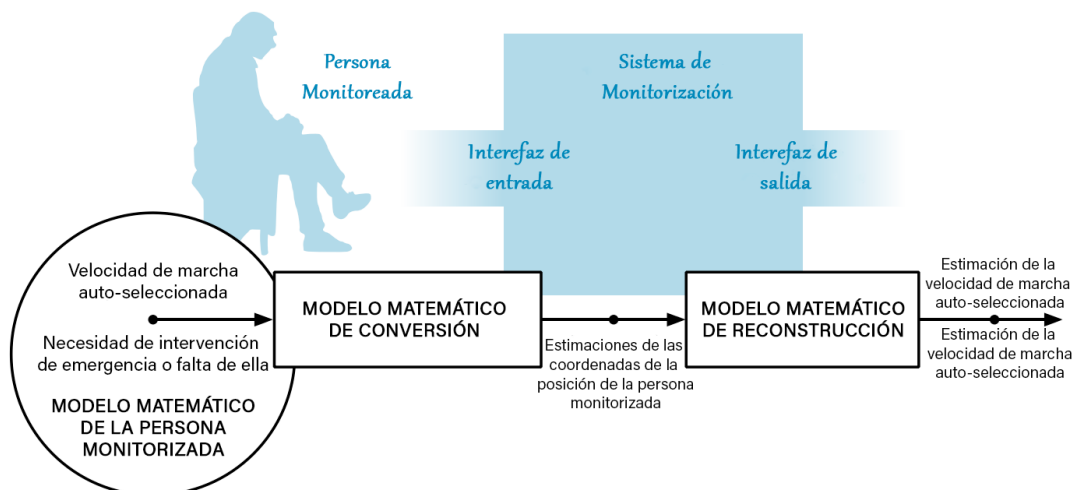
**Enfoque de la investigación.** El enfoque de la investigación es Cuantitativa.

**Unidad de Análisis.** Métodos para la diferenciación y regularización de los datos de medición, recabada de los datos sintéticos y domésticos.

**Población y Muestra.** Por la característica de la investigación, la muestra es la misma unidad de análisis.

**2.1.1. Seguimiento orientado a la salud del adulto mayor.** Para desarrollar un sistema de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor es necesario diseñar los modelados matemáticos del sistema y de los datos de medición

**Modelo del sistema de seguimiento.** Los procedimientos para el procesamiento de datos de medición se basan en un modelamiento matemático [8] que se ha desarrollado utilizando un enfoque de investigación cuantitativa que permita el modelamiento de un sistema de datos de medición. Existen diversos modelos, enfocados en diferentes aspectos de estos procedimientos, siendo aplicable en este contexto, y particularmente útil para el análisis de la etapa de diferenciación. Para lo cual se analizan los componentes de la siguiente manera, la velocidad de marcha autoseleccionada de la persona supervisada; y el estado de esa



persona, en el sentido de necesitar una intervención de emergencia por haber caído, o poder arreglárselas sin ayuda.

Fig. N°1: Modelo de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor. Se han adoptado las siguientes suposiciones relativas a la relación entre el mensurando y los datos de medición, es decir, las estimaciones de las coordenadas tridimensionales de la posición de la persona supervisada:

- En un intervalo de tiempo bajo análisis, el valor del mensurando se determinó en forma única, aunque indirecta, es decir, a través de las relaciones matemáticas que involucren variables auxiliares generalizadas.
- Por una secuencia de valores representativa de la posición y la velocidad del centro de masa de la persona monitoreada, correspondiente a ese intervalo de tiempo.
- Esa posición, proyectada en una dimensión espacial seleccionada, puede ser adecuadamente modelada con una función escalar, de valor real, diferenciable de una variable escalar que modela el tiempo, mientras que la velocidad con la primera derivada de esa función.
- Los datos disponibles son los valores de dos o tres de esas funciones, correspondientes a dos o tres dimensiones espaciales seleccionadas, evaluadas en una secuencia finita de instantes de tiempo y errores de medición con alteraciones.

La reconstrucción del mensurando ha involucrado las siguientes operaciones:

- Estimación de la velocidad de la persona monitoreada en instantes de tiempo seleccionados sobre la base de las secuencias disponibles de datos de medición, es decir, la diferenciación numérica de esas secuencias.
- Interpretación de las estimaciones de posición y velocidad, es decir, su posprocesamiento.

La interfaz de entrada del sistema de seguimiento, es decir, los medios técnicos que permiten la interacción entre ese sistema y la persona vigilada son identificados con un sensor de profundidad o un sensor radar de impulsos; las relaciones matemáticas que modelan la interacción entre señales emitidas y recibidas por los sensores, y el cuerpo de la persona monitoreada, así como las relaciones descritas en el preprocesamiento, son parte del modelado matemático de conversión. La interfaz de salida del sistema de monitoreo, es decir, los medios técnicos para proporcionar la comunicación con un receptor externo para los resultados de la reconstrucción de datos de medición, utiliza el programa MATLAB para la implementación práctica del sistema de monitoreo. Como explicación general del modelo matemático aplicado, corresponde indicar el papel del modelado en la dependencia del tiempo de la posición

de la persona monitoreada en los procedimientos considerados para el procesamiento de datos. Esta intervención es importante porque la elección de un método para la diferenciación numérica implica implícitamente tomar suposiciones relacionadas con este componente del modelo; además, algunos de esos métodos se refieren a conjuntos de supuestos más complejos que otros, lo que permite incorporar más información a priori en el modelo subyacente. Por estas razones, se puede esperar que tal elección tenga una influencia no despreciable en los resultados finales del seguimiento.

## 2.2. Modelamiento matemático de datos de medición.

**2.2.1. Modelo matemático de diferenciación numérica.** Se supone que la dependencia del tiempo en las coordenadas tridimensionales de la posición de la persona monitoreada se puede modelar utilizando tres funciones escalares de valor real  $f_x, f_y, f_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  modelando con respecto a la variable  $t$  (tiempo), la función es diferenciable sobre  $[0, T]$ . Las formas analíticas de  $f_x, f_y$  y  $f_z$  son desconocidas; los datos disponibles  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$  y  $z_1, \dots, z_N$  son sus valores alterados por error, resultantes de mediciones realizadas en una secuencia finita de instantes de tiempo  $t_1, \dots, t_N$  tal que  $0 = t_1 \dots < t_N = T$ . Esos datos se modelan de la siguiente manera:

$$\tilde{x}_n = f_x(t_n) + \eta_{x,n}, \tilde{y}_n = f_y(t_n) + \eta_{y,n} \text{ y } \tilde{z}_n = f_z(t_n) + \eta_{z,n} \quad (1)$$

para  $n = 1, \dots, N$

Donde  $\eta_{x,n}, \eta_{y,n}$  y  $\eta_{z,n}$  son realizaciones de variables independientes, la media cero y la normal conocida son variables aleatorias  $\eta_{-x,n}, \eta_{-y,n}$  y  $\eta_{-z,n}$ , modelando la medida del error. Las varianzas de esas variables  $\sigma_{x,n}^2, \sigma_{y,n}^2$  y  $\sigma_{z,n}^2$  pueden cambiar con  $n$ ; en particular, pueden depender de la posición de la persona monitoreada en el instante de tiempo  $t_n$ , ya que la precisión de todos los sensores varía con la distancia y el ángulo en el que se observa a la persona. La dependencia temporal de los componentes tridimensionales de la velocidad de la persona monitoreada se modela con  $f_x^{(1)}, f_y^{(1)}$  y  $f_z^{(1)}$  las primeras derivadas de  $f_x, f_y$  y  $f_z$ , respectivamente.

La velocidad estimada  $\hat{x}_1^{(1)}, \dots, \hat{x}_M^{(1)}, \hat{y}_1^{(1)}, \dots, \hat{y}_M^{(1)}$  y  $\hat{z}_1^{(1)}, \dots, \hat{z}_M^{(1)}$  se busca en los instantes de tiempo  $t'_1, \dots, t'_M$  tal que  $0 \leq t'_1 < \dots < t'_M \leq T$ , es decir:

$$\hat{x}_m^{(1)} \cong f_x^{(1)}(t'_m), \hat{y}_m^{(1)} \cong f_y^{(1)}(t'_m) \text{ y } \hat{z}_m^{(1)} \cong f_z^{(1)}(t'_m) \text{ para } m = 1, \dots, M \quad (2)$$

Se considera el componente x de la posición y la velocidad de la persona monitoreada. Las relaciones, análogas a las descritas allí, se cumplen para las componentes x, y, z. La diferenciación numérica de la data de medición, es decir, la determinación de la

secuencia  $\hat{x}_1^{(1)}, \dots, \hat{x}_m^{(1)}$  sobre la base de la secuencia  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ , requiere las siguientes operaciones:

- Aproximación de la función  $f_x$ .
- El cálculo de la primera derivada  $\hat{f}_x^{(1)}$  del resultado de la aproximación  $\hat{f}_x$ .
- Evaluación de  $\hat{f}_x^{(1)}$  en los instantes de tiempo metro  $t'_m$ .

Se presentan tres fórmulas utilizando los siguientes vectores:

$$\tilde{\mathbf{x}} \equiv [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N]^T, \quad \dot{\mathbf{x}} \equiv [f_x(t_1) \dots f_x(t_N)]^T, \quad \dot{\mathbf{x}}^{(1)} \equiv [f_x^{(1)}(t'_1) \dots f_x^{(1)}(t'_M)]^T$$

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv [\hat{f}_x(t_1) \dots \hat{f}_x(t_N)]^T, \quad \hat{\mathbf{x}}^{(1)} \equiv [\hat{f}_x^{(1)}(t'_1) \dots \hat{f}_x^{(1)}(t'_M)]^T \quad \dots \quad \hat{f}_x^{(1)}(t'_M) \equiv [\hat{x}_1^{(1)} \dots \hat{x}_M^{(1)}]^T$$

$$\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_N]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{t}' = [t'_1, \dots, t'_M]^T$$

y la matriz:

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x,1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{x,2}^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{x,N}^2 \end{bmatrix}$$

Se supone que el sistema de monitoreo en estudio estima la posición de una persona en movimiento y proporciona estimaciones de la velocidad de esa persona simultáneamente o con un retraso insignificante. Por lo tanto, la diferenciación numérica se realiza dentro de una ventana de tiempo móvil, con fórmulas matemáticas proporcionadas en esta sección, esa ventana de tiempo es modelada en el tiempo  $[0, T]$ . En cada ejecución del procedimiento de diferenciación numérica, los valores 0 y T corresponden a los límites de un intervalo diferente del tiempo de referencia. Los métodos de diferenciación numérica, considerados en esta tesis, se dividen en dos clases, denominados métodos escalares y métodos vectoriales, dependiendo de las suposiciones relativas a las secuencias  $t_1, \dots, t_N$  y  $t'_1, \dots, t'_N$  que se refieren a esos métodos. En el caso de los métodos escalares:

- El tiempo  $[0, T]$  corresponde al intervalo del tiempo de referencia durante el cual se adquiere un número fijo N de puntos de datos.
- La derivada es estimada en un solo instante de tiempo  $t'$ , es decir  $M = 1$ .

En el caso de los métodos vectoriales:

- El tiempo  $[0, T]$  corresponde a un intervalo arbitrario del tiempo de referencia y no se imponen tensiones sobre el número N de los puntos de datos que se han adquirido dentro de él;

- La derivada es estimada en uno o más instantes de tiempo, es decir  $M \geq 1$ .

A partir de ello, los métodos de diferenciación numérica pueden clasificarse con respecto a los supuestos implícitos sobre el esquema de aproximación en el que se basan. En particular, cada método considerado en esta tesis se puede caracterizar por la clase de funciones  $\hat{f}$  a las que se supone que pertenece. Los métodos escalares se pueden dividir en:

- Métodos de polinomios escalares, basado en la aproximación de  $f_x$  mediante polinomios algebraicos
- Métodos escalares no polinómicos, basado en la aproximación de  $f_x$  mediante otras funciones.

Los métodos vectoriales se pueden dividir en:

- Métodos de polinomios vectoriales, basados en la aproximación de  $f_x$  mediante funciones polinomiales por partes.
- Métodos vectoriales no polinómicos, basados en la aproximación de  $f_x$  mediante combinaciones lineales de funciones de base no polinómicas.

### 2.2.2. Modelo matemático de regularización de diferenciación numérica.

El modelamiento matemático de la diferenciación numérica, implica la aproximación de una función desconocida  $f_x$  que modela la trayectoria de la posición de la persona monitoreada a partir de los datos de medición, la información disponible a priori sobre los errores de medición y los supuestos sobre la forma de esa función. Cada método de diferenciación numérica considerado se caracteriza, por el conjunto de funciones de aproximación admisibles  $\mathbb{F}_0$ . La regularización, es entendida como la imposición de restricciones adicionales a ese conjunto, puede impedir la propagación de errores de medición. Para ello, es necesario desarrollar:

**A. Regularización basada en restricción impuesto a los parámetros de aproximación.** Se caracterizan los parámetros cuyos valores son fijos en el caso de los no regularizados. Como técnicas de regularización se utilizarán: *i) el paso de diferenciación (DS)* en el caso de los métodos escalares donde el método CD-3 implica implícitamente la aproximación de una secuencia de 3 puntos de datos  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  y  $\tilde{x}_3$  adquiridos en instantes de tiempo equidistantes:  $t_1, t_1 = t_2 + \Delta t$  y  $t_3 = t_2 + \Delta t$  mediante un polinomio algebraico de segundo grado. La estimación de la derivada en  $t_2$  satisface la siguiente ecuación:

$$\hat{x}_2^{(1)} = \frac{\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1}{2\Delta t} \quad (3)$$

El error alterado  $\hat{x}_2^{(1)}$  es evaluado mediante la expansión en series de Taylor, y con la aleatorización de la Ec.3, dando como resultado:

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{x}_2^{(1)} &\equiv \hat{x}_2^{(1)} - f_x^{(1)}(T_2) = \frac{1}{2\Delta t} \left( f_x(t_2) + f_x^{(1)}(t_2)\Delta t + \frac{1}{2}f_x^{(2)}(t_2)\Delta t^2 + \right. \\
&\frac{1}{6}f_x^{(3)}(t_2)\Delta t^3 + \dots \left. \right) - \frac{1}{2\Delta t} \left( f_x(t_2) - f_x^{(1)}(t_2)\Delta t + \frac{1}{2}f_x^{(2)}(t_2)\Delta t^2 - \right. \\
&\frac{1}{6}f_x^{(3)}(t_2)\Delta t^3 + \dots \left. \right) + \frac{1}{2\Delta t} \left( \underline{\eta}_{x,3} - \underline{\eta}_{x,1} \right) - f_x^{(1)}(T_2) \cong \frac{1}{6}f_x^{(3)}(t_n)\Delta t^2 + \\
&\frac{1}{2\Delta t} \left( \underline{\eta}_{x,3} - \underline{\eta}_{x,1} \right)
\end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto:

$$E \left[ \Delta \hat{x}_2^{(1)} \right] \cong \frac{1}{6}f_x^{(3)}(t_2)\Delta t^2 \tag{5}$$

$$Var \left[ \Delta \hat{x}_2^{(1)} \right] \cong E \left[ \frac{(\eta_{x,3} - \eta_{x,1})}{2\Delta t} \right]^2 = \frac{\sigma_x^2}{2\Delta t^2} \tag{6}$$

Para que  $\Delta t$  (paso de diferenciación) puede desempeñar el papel de un parámetro de regularización, es decir, su optimización puede permitir lograr un compromiso deseado entre el valor esperado y la varianza del error alterado en estimación de la derivada. Tal optimización requiere una extensión de la derivada y la extensión del intervalo de tiempo y la inclusión de datos adquiridos antes de  $t_1$  y después de  $t_3$ ; esto se puede lograr si se introduce un retraso previo a la estimación de la derivada. Se define la estimación de la derivada en  $t_n$ , con un  $\Delta t$  aumentado en  $k \in N_{\text{veces}}$ :

$$\hat{x}_n^{(1)}(k) = \frac{\tilde{x}_{n+k} - \tilde{x}_{n-k}}{k\Delta t} \tag{7}$$

El valor de  $k$  es seleccionado mediante la minimización de la incertidumbre expandida en el error de estimación, definida como:

$$U \left[ \Delta \hat{x}_n^{(1)} \right] \equiv \left| E \left[ \Delta \hat{x}_n^{(1)} \right] \right| + 3 \sqrt{var E \left[ \Delta \hat{x}_n^{(1)} \right]} = \frac{1}{6} \left| f_x^{(3)}(t_n) \right| k^2 \Delta t^2 + 3 \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}k\Delta t} \tag{8}$$

La condición necesaria de la mínima es:

$$\frac{dU \left[ \Delta \hat{x}_n^{(1)} \right]}{dk} = \frac{1}{3} \left| f_x^{(3)}(t_n) \right| k \Delta t^2 - 3 \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}k\Delta t} = 0 \tag{9}$$

Por lo tanto:

$$\hat{k} = \frac{1}{\Delta t} \sqrt[3]{\frac{9\sigma_x}{\sqrt{2} \left| f_x^{(3)}(t_n) \right|}} \cong \frac{1.85}{\Delta t} \sqrt[3]{\frac{\sigma_x}{\left| f_x^{(3)}(t_n) \right|}} \tag{10}$$

El valor de  $f_x^{(3)}(t_n)$  es desconocido, por lo que la Ec.10 no se puede utilizar para la optimización de  $k$  directamente. Sin embargo, se puede seleccionar un valor casi óptimo de  $k$  mediante la estrategia propuesta en [10], que satisfaga la condición:

$$\sup_{k'} \left\{ \left| \hat{x}_x^{(1)}(k) - \hat{x}_x^{(1)}(k') \right| k' \Delta t \mid k' \in \mathbb{K}, k' < k \right\} \leq 2\Delta \tilde{x}_{\max} \quad (11)$$

donde  $\Delta \hat{x}_{\max}$  es una estimación del límite superior de los errores alterados de los datos. Para optimizar el DS se denotará como LP, mientras que el método de diferenciación numérica estimará la derivada con  $k$  según la Ec.7 (CD-3-DS-LP). Se evalúa el polinomio de segundo grado que interpola  $\tilde{x}_{n-k}$ ,  $\tilde{x}_n$  y  $\tilde{x}_{n+k}$  su primera derivada en los instantes de tiempo  $t_{n-k}, \dots, t_{n+k}$ :

$$\hat{x}_{n-k} = \left( \frac{k^2}{2k^2} - \frac{k}{2k} \right) \hat{x}_{n-k} + \left( 1 - \frac{k^2}{k^2} \right) \hat{x}_n + \left( \frac{k^2}{2k^2} - \frac{k}{2k} \right) \hat{x}_{n+k} \text{ para } k = -k, \dots, k \quad (12)$$

$$\hat{x}_{n+k}^{(1)} = \left( \frac{k}{k^2} - \frac{1}{2k} \right) \hat{x}_{n-k} - 2 \frac{k}{k^2} \hat{x}_n + \left( \frac{k}{k^2} - \frac{1}{2k} \right) \hat{x}_{n+k} \text{ para } k = -k, \dots, k \quad (13)$$

de:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H}_{CD3,k} \hat{\mathbf{x}}_k \text{ y } \hat{\mathbf{x}}_k^{(1)} = \mathbf{H}_{CD3,k}^{(1)} \hat{\mathbf{x}}_k \quad (14)$$

Donde  $\hat{\mathbf{x}}_k \equiv [\hat{x}_{n-k} \dots \hat{x}_{n+k}]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_k \equiv [\tilde{x}_{n-k} \dots \tilde{x}_{n+k}]^T$  y las matrices  $H_{(CD3,k)}, H_{CD3,k}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(2k+1) \times (2k+1)}$ , contienen los coeficientes para las Ec.12 y Ec.13. Se estima la derivada según la Ec.51, con la  $k$  seleccionada (CD-3-DS-DP). La técnica de regularización se utiliza en otros esquemas de aproximación, de acuerdo con el esquema de aproximación subyacente al método CS-3, es decir:

$$\hat{f}_x(t) = p_0 + p_1 \sin(t - t_n) + p_2 \cos(t - t_n) \text{ para } t \in [0, T] \text{ y } p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$$

La estimación de la derivada, correspondiente a un paso de diferenciación extendida, se define de la siguiente manera:

$$\hat{x}_n^{(1)} = \frac{\tilde{x}_{n+k} - \tilde{x}_{n-k}}{\sin(k\Delta t)} \quad (15)$$

Como en el caso del método CD-3-DS2, se selecciona  $k$  sobre la base de los valores de la función de aproximación en la Ec.14, interpolando  $\tilde{x}_{n+k}$ ,  $\tilde{x}_n$  y  $\tilde{x}_{n-k}$  en la derivada en los instantes de tiempo  $t_{n-k}, \dots, t_{n+k}$ . Estos valores se pueden calcular de acuerdo con las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+k} &= \left( \frac{\cos k\Delta t - 1}{2(\cos k\Delta t - 1)} - \frac{\sin k\Delta t}{2 \sin k\Delta t} \right) \tilde{x}_{n+k} + \frac{\cos k\Delta t - \cos k\Delta t}{\cos k\Delta t - 1} \tilde{x}_n \\ &+ \left( \frac{\cos k\Delta t - 1}{2(\cos k\Delta t - 1)} + \frac{\sin k\Delta t - 1}{2 \sin k\Delta t - 1} \right) \tilde{x}_{n+k} \end{aligned} \quad (16)$$

Para  $k = -k, \dots, k$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{n+k}^{(1)} &= \left( \frac{-\sin k\Delta t}{2(\cos k\Delta t - 1)} - \frac{\cos k\Delta t}{2 \sin k\Delta t} \right) \tilde{x}_{n+k} + \frac{\sin k\Delta t}{\cos k\Delta t - 1} \tilde{x}_n \\ &+ \left( \frac{-\sin k\Delta t}{2(\cos k\Delta t - 1)} + \frac{\cos k\Delta t}{2 \sin k\Delta t} \right) \tilde{x}_{n+k} \end{aligned} \quad (18)$$

por  $k = -k, \dots, k$  ó:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H}_{cs3,k} \tilde{\mathbf{x}}_k \text{ y } \hat{\mathbf{x}}_k^{(1)} = \mathbf{H}_{cs3,k}^{(1)} \tilde{\mathbf{x}}_k$$

donde  $\mathbf{H}_{cs3,k}, \mathbf{H}_{cs3,k}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(2k+1) \times (2k+1)}$  contiene los coeficientes correspondientes a la Ec.16 y la Ec.17. El método de derivación numérica, que consiste en estimar la derivada según la Ec.15 se denota como CS-3-DS. Por otra parte, según el esquema de aproximación que subyace en el método CE-3, es decir:

$$\hat{f}_x(t) = \exp(P_0 + P_1(t - t_n)^2) \text{ y } P_x, P_1, P_2 \in \mathbb{R} \quad (19)$$

La estimación de la derivada, correspondiente a un paso de diferenciación extendida, se define de la siguiente manera:

$$\hat{x}_n^{(1)} = \frac{\tilde{x}_n}{2k\Delta t} \ln \frac{\tilde{x}_{n+x}}{\tilde{x}_{n-x}} \quad (20)$$

Como en los casos de los métodos CD-3-DS y CS-3-DS, el parámetro  $k$  puede seleccionarse sobre la base de los valores de la función en la Ec.19 e interpolando  $\tilde{x}_{n+x}$ ,  $\tilde{x}_n$  y  $\tilde{x}_{n-x}$  y su derivada en los instantes de tiempo  $t_{n-k}, \dots, t_{n+k}$ . Estos valores se pueden calcular de acuerdo con las siguientes fórmulas:

$$\hat{x}_{n+x} = (\tilde{x}_{n-x})^{\frac{k^2}{2k^2} - \frac{k}{k^2}} (\tilde{x}_n)^{1 - \frac{k^2}{k^2}} (\tilde{x}_{n+k})^{\frac{k^2}{2k^2} + \frac{k}{k^2}} \quad (21)$$

por  $k = -k, \dots, k$

$$\hat{x}_{n+k}^{(1)} = \frac{\hat{x}_{n+k}}{2k\Delta t} \left( \ln \frac{\tilde{x}_{n+k}}{\tilde{x}_{n-k}} + 2 \frac{k}{k} \ln \frac{\tilde{x}_{n+k} \tilde{x}_{n-k}}{\tilde{x}_n^2} \right) \quad (22)$$

por  $k = -k, \dots, k$

La relación entre  $\hat{\mathbf{x}}_k \equiv [\hat{x}_{n-k} \dots \hat{x}_{n+k}]^T$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_k \equiv [\tilde{x}_{n-k} \dots \tilde{x}_{n+k}]^T$ , definida en la Ec.21, no es lineal; por lo tanto, no puede ser utilizado para la optimización de  $k$ . El método de derivación numérica consiste en estimar la derivada según la Ec.20, denotada como CE-3-DS. El conjunto de valores candidatos del parámetro  $k$  pueden incluir valores tales que el punto de datos A o B no esté disponible (menos de  $k$  puntos de datos han sido adquiridos entre el inicio de la medida y el tiempo correspondiente a  $t_n$ ). Para los experimentos se adoptada la siguiente condición límite en el borde para este propósito:

$$\hat{f}_x^{(2)}(t_n) = 0 \quad (23)$$

Para ii) *el grado de restricción del polinomio de aproximación*, la secuencia de  $N=5, 7, 9$  puntos de datos se aproximan por medio de un polinomio algebraico, la

regularización se puede lograr restringiendo el grado  $K \leq N - 1$  de ese polinomio. El conjunto  $\mathbb{F}_1(k)$  de polinomios de grado máximo  $k$  no puede contener ninguna función que interpole los datos de medida; por lo tanto, la función de aproximación  $\hat{f}_x \in \mathbb{F}_1(k)$  debe seleccionarse minimizando un criterio que refleje la discrepancia entre los datos y los valores de:

$$\hat{f}_x = \arg \inf \left\{ \sum_{n=1}^N (f(t_n) - \tilde{x}_n)^2 \mid f \in \mathbb{F}_1(k) \right\} \quad (24)$$

se puede lograr mediante el filtro Savitzky-Golay, la estimación de la derivada  $\hat{x}_v^{(1)}$  correspondiente a  $t_v$ , el instante de tiempo ubicado en el centro del intervalo de tiempo bajo análisis  $v = (N + 1)/2$  puede ser determinada de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\hat{x}_v^{(1)} = \mathbf{h}_{N,K,1}^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (25)$$

Donde  $\mathbf{h}_{N,K,1}$  es el vector de los coeficientes del filtro Savitzky-Golay de longitud  $N$ , correspondiente a la primera derivada del polinomio de aproximación de grado  $k$ . Se evalúan los valores de  $\hat{f}_x$  en los instantes de tiempo  $t_1, \dots, t_N$ :

$$[\hat{f}_x(t_1) \dots \hat{f}_x(t_N)]^T = \mathbf{H}_N(k) \tilde{\mathbf{x}} \quad (26)$$

donde  $\mathbf{H}_N(k) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es la matriz de coeficientes del filtro Savitzky-Golay correspondiente. Sus elementos se calculan con la siguiente fórmula:

$$h_{N,i,j}(k) = \sum_{k=0}^k (2k + 1) \frac{\Phi(N-1,k)}{\Phi(N+k,k+1)} \gamma_{N,k}(i) \gamma_{N,k}(j) \quad (27)$$

Donde  $h_{N,i,j}(k)$  es el valor de la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima columna de la matriz  $\mathbf{H}_N(k)$  y:

$$\Phi(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{para } b = 0 \\ a(a-1) \dots (a-b+1) & \text{para } b = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (28)$$

$$\Phi \gamma_{N,k}(i) \equiv \begin{cases} 0 & \text{para } k = -1 \\ 1 & \text{para } k = 0 \\ \frac{2(2k-1)i}{k(N-k)} \gamma_{N,k-1}(i) - \frac{(k-1)(N-1+k)}{k(N-k)} \gamma_{N,k-2}(i) & \text{para } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (29)$$

para  $i = -\frac{1}{2}(N-1), \dots, \frac{1}{2}(N-1)$

El método de diferenciación numérica consiste en la estimación de la derivada según la Ec.25, denotada en CDN-SG. La *iii) restricción del número de funciones básicas*, si  $f_x$  se aproxima por medio de una combinación lineal de funciones base la regularización puede lograrse restringiendo el número de esas funciones base:  $K$

$k < N$ . El vector de parámetros  $\mathbf{p} \equiv [p_1, \dots, p_k]$ , correspondiente a la función  $f_x$  aproximando los datos en el sentido de mínimos cuadrados:

$$\hat{f}_x = \underset{f(t) = \sum_{n=1}^N p_k \varphi(t - t_k''); P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}}{\operatorname{arg\,min}} \left\{ \sum_{n=1}^N (f(t_n) - \tilde{x}_n)^2 \right\} \quad (31)$$

Puede determinarse de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{\Phi}_k^+ \tilde{\mathbf{x}} \quad (31)$$

donde  $\mathbf{\Phi}_k^+$  es el pseudoinverso Moore-Penrose de la matriz  $N \times K$ :

$$\mathbf{\Phi}_k = \begin{bmatrix} \varphi(t_1, -t_1'') & \cdots & \varphi(t_1, -t_k'') \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(t_N, -t_1'') & \cdots & \varphi(t_N, -t_k'') \end{bmatrix} \quad (32)$$

por eso:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{\Phi}_k^{(1)} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{\Phi}_k^{(1)} \mathbf{\Phi}_k^+ \tilde{\mathbf{x}} \quad (33)$$

donde:

$$\mathbf{\Phi}_k^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} \varphi^{(1)}(t_1', -t_1'') & \cdots & \varphi^{(1)}(t_1', -t_k'') \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^{(1)}(t_M', -t_1'') & \cdots & \varphi^{(1)}(t_M', -t_k'') \end{bmatrix} \quad (34)$$

El parámetro  $k$  y los parámetros que controlan la forma de la función base de los parámetros  $s$  y  $q$ , así como la distribución de los puntos  $t_k''$  en el tiempo  $[0, T]$  puede usarse para minimizar la incertidumbre de la diferenciación. Bajo el supuesto simplificador:

$$t_k'' = (k - 1) \Delta t'' \text{ con } \Delta t'' \equiv \frac{T}{K-1} \text{ de } k = 1, \dots, k \quad (35)$$

Los métodos de derivación numérica estiman la derivada según la Ec.33, denotadas como VE-NB y VC-NB, respectivamente.

**B. Regularización basada en restricción impuesta a las normas.** Las normas de la función de aproximación, y las de sus derivadas, pueden ser consideradas como indicadores de la rugosidad de esa función. Las técnicas de regularización mediante *i) la norma de restricción de la derivada de la función de aproximación*, donde el vector  $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$  se define como el conjunto de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{x}}' \quad (36)$$

De acuerdo con la técnica de Tikhonov para la regularización de problemas mal planteados, la solución aproximada de la ecuación anterior se puede encontrar como:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{arg}_{\xi} \mathbf{inf} \{ \|\mathbf{Q}_k \xi - \tilde{\mathbf{x}}'\|_2^2 \mid \xi \in \mathbb{R}^N, \|\mathbf{D}_d \xi\|_2^2 \leq b \} \quad (37)$$

Donde  $0 < b \in \mathbb{R}$  es un límite superior supuesto para  $\|\mathbf{D}_d \xi\|_2^2$  y  $\mathbf{D}_d$  con  $d = 1, \dots, N - 1$ , siendo un parámetro sintonizable, es una matriz de coeficientes de la fórmula de diferencia directa de orden d-ésimo, definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{D}_0 \equiv \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (38)$$

$$\mathbf{D}_d = d \mathbf{T}_d (\mathbf{F}_d \mathbf{D}_{d-1}) \in \mathbb{R}^{(N-d) \times N} \text{ para } d=1, \dots, N-1 \quad (39)$$

Donde:

$$\mathbf{F}_d \equiv \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ & & \dots & \dots & \\ & & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-d) \times (N-d+1)} \text{ para } d=1, \dots, N-1$$

$$\mathbf{T}_d \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{t_{d+1}-t_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_{d+2}-t_2} & \dots & \\ \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{t_N-t_{N-d}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-d) \times (N-d)} \text{ para } d=1, \dots, N-1$$

El problema de la minimización restringida, definido por la Ec.37, puede reformularse mediante la técnica del multiplicador de Lagrange:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{arg}_{\xi} \mathbf{inf} \{ \|\mathbf{Q}_k \xi - \tilde{\mathbf{x}}'\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{Q}_k \xi\|_2^2 \mid \xi \in \mathbb{R}^N \} \quad (40)$$

Donde  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$  es un parametro de regularización. Esto significa que la solución del problema regularizado satsiface la siguiente ecuación:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = (\mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_k + \alpha \mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_k)^{-1} \mathbf{Q}_k^T \tilde{\mathbf{x}}' \quad (41)$$

El valor de  $\alpha$  está relacionado con el valor de b; sin embargo, b no necesita especificarse explícitamente. El método de derivación numérica, que consiste en la estimación de la derivada según la Ec.41, denotado VP-TR. La técnica de Tikhonov da como resultado la siguiente definición del vector de estimaciones de la derivada:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \Phi^{(1)} \hat{\mathbf{P}} \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{arg}_P \mathbf{inf} \{ \|\Phi \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \mid \mathbf{P} \in \mathbb{R}^N, \|\Phi^{(d)} \mathbf{P}\|_2^2 \leq b \} \quad (43)$$

Donde  $\Phi^{(d)}$  es una matriz  $N \times N$  de valores de la d-ésima derivada de la función base:

$$\Phi^{(d)} = \begin{bmatrix} \varphi^{(d)}(t_1 - t_1) & \cdots & \varphi^{(d)}(t_1 - t_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^{(d)}(t_N - t_1) & \cdots & \varphi^{(d)}(t_N - t_N) \end{bmatrix} \quad (44)$$

El vector  $\hat{P}$  definido por la Ec.43 satisface la siguiente ecuación:

$$\hat{P} = \left[ \Phi^T \Phi + \alpha (\Phi^{(d)})^T \Phi^{(d)} \right]^{-1} \Phi^T \hat{x} \quad (45)$$

Donde  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$  es un parámetro cuyo valor puede optimizarse junto con el parámetro que controla la forma de la función base. Los métodos de derivación numérica, que consisten en estimar la derivada según la Ec.42 y la Ec.43 se denota con VE-TR y VC-TR, respectivamente. Para *ii) restringiendo la variación total*, el indicador, denominada variación total de una función  $f$ , se define como:

$$TV(f) \equiv \|f^{(1)}\|_1 \equiv \int_0^t |f^{(1)}(t)| dt \quad (46)$$

La regularización se puede lograr restringiendo el valor de  $TV(\hat{f}_x^{(1)})$ , a diferencia de la restricción de la norma euclidiana de las derivadas de  $\hat{f}_x$  no produce una expresión de forma cerrada para el vector de estimación de la derivada, porque  $TV(\hat{f}_x^{(1)})$  no es diferenciable. Sin embargo, esa restricción se puede implementar utilizando el siguiente algoritmo iterativo:

$$\hat{x}_0^{(1)} \equiv [0 \dots 0]^T \quad (47)$$

$$\hat{x}_{i+1}^{(1)} = \hat{x}_i^{(1)} + \Delta \hat{x}_i^{(1)} \text{ para de } i = 0, 1, 2, \dots \quad (48)$$

Donde  $\Delta \hat{x}_i^{(1)}$  se define como la solución del siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$H_i \Delta \hat{x}_i^{(1)} = -g_i \quad (49)$$

donde:

$$H_i \equiv Q_k^T Q_k + \alpha L_i$$

$$g_i \equiv Q_k^T (Q_k \hat{x}_i^{(1)} - \tilde{x}') + \alpha L_i \hat{x}_i^{(1)}$$

$$L_i \equiv D_1^T E_i D_1$$

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{(\hat{x}_{i,2}^{(1)} - \hat{x}_{i,1}^{(1)})^2 + \varepsilon} & & & \\ 0 & 1 & & \dots \\ & \sqrt{(\hat{x}_{i,3}^{(1)} - \hat{x}_{i,2}^{(1)})^2 + \varepsilon} & & \\ \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & \sqrt{(\hat{x}_{i,N}^{(1)} - \hat{x}_{i,N-1}^{(1)})^2 + \varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$$

Con  $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$  - tal que  $\alpha > 0$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$  - siendo parámetros sintonizables,  $Q_k$ , y  $D_1$  se define en la Ec.84. Este algoritmo iterativo puede detenerse cuando se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\rho(\hat{x}_i^{(1)}) - \rho(\hat{x}_{i+1}^{(1)})}{\|\Delta \hat{x}_i^{(1)}\|} < \delta \rho_{stop} \quad (50)$$

donde:

$$\rho(\hat{x}^{(1)}) = \|Q_k \hat{x}^{(1)} - \tilde{x}'\|_2 + \alpha \|\hat{x}^{(1)}\|_1 \quad (51)$$

o cuando se alcanza el número máximo predefinido de iteraciones  $I_{max}$ . El método de diferenciación numérica, que consiste en estimar la derivada mediante el referido algoritmo iterativo, denotado como VP-TV.

### C. Regularización basada en restricción impuesto al coeficiente de expansión.

Bajo el supuesto de que  $\hat{f}_x(0) = 0$ , la relación entre la función de aproximación  $\hat{f}_x$  y su primera derivada  $\hat{f}_x^{(1)}$  se describe con la siguiente ecuación integral lineal:

$$\hat{f}_x(t) = \int_0^t \hat{f}_x^{(1)}(\tau) d\tau \quad \text{para } t \in [0, T] \quad (52)$$

El núcleo de esa ecuación  $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definido de la siguiente manera:

$$k(t, \tau) = 1 \quad \text{para } t, \tau \in [0, T] \quad (53)$$

La expansión de valor singular (SVE) de este núcleo tiene la siguiente forma [294]:

$$k(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n u_n(\tau) v_n(t) \quad \text{de } t, \tau \in [0, T] \quad (54)$$

Donde  $\sigma_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$  se llaman los valores singulares; Las funciones  $u_n, v_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$  se llaman las funciones singulares izquierda y derecha; ambas secuencias  $u_1(t), v_2(t), \dots$  forman bases ortonormales del espacio  $L_2([0, T])$  de funciones integrables en el tiempo  $[0, T]$ . Las siguientes ecuaciones describen los componentes del SVE del núcleo definido por la Ec.53:

$$u_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2n-1}{2T} \pi t\right) \text{ for } t \in [0, T] \quad (55)$$

$$v_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2n-1}{2T} \pi t\right) \text{ for } t \in [0, T] \quad (56)$$

$$\sigma_n = \frac{2T}{(2n-1)\pi} \quad (57)$$

La estimación de la derivada  $\hat{f}_x^{(1)}$  puede expresarse en la base formada por las funciones singulares derechas de la siguiente forma:

$$\hat{f}_x^{(1)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_n | \hat{f}_x \rangle}{\sigma_n} v_n(t) \text{ para } t \in [0, T] \quad (58)$$

Donde  $\langle u_n | \hat{f}_x \rangle \equiv \int_0^t u_n(t) \hat{f}_x(t) dt$ , la regularización impone restricciones a los coeficientes de esa expansión,  $\frac{\langle u_n | \hat{f}_x \rangle}{\sigma_n}$ , siendo iguales a cero. Si la Ec.52 se reemplaza con un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, entonces tales restricciones pueden implementarse aproximadamente usando la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz de los coeficientes de esas ecuaciones. Las técnicas de regularización se basan en esa aproximación, el *i) truncamiento de SVD*, se define como:

$$\mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{x}}' \quad (59)$$

El SVD de la matriz  $\mathbf{Q}_k$  tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^\dagger \quad (60)$$

donde las matrices  $\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  tienen las siguientes propiedades:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \dots \\ \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_N \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0 \quad (61)$$

$$\det(\mathbf{Q}_k) = \det(\mathbf{\Sigma}) = \prod_{n=1}^N \sigma_n, |\det(\mathbf{U})| = 1, |\det(\mathbf{V})| = 1 \quad (62)$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{\Sigma}\|_2 = \sigma_1, \|\mathbf{U}\|_2 = 1, \|\mathbf{V}\|_2 = 1 \quad (63)$$

$$\mathbf{cond}_2(\mathbf{A}) = \mathbf{cond}_2(\mathbf{\Sigma}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_N} \quad (64)$$

Los valores  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  son los valores singulares de  $\mathbf{Q}_k$ . Las estimaciones de la derivada obtenida mediante el método VP se pueden expresar mediante el SVD de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{Q}_k^1 \tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}' \mathbf{U}^t \tilde{\mathbf{x}}' = \sum_{n=1}^N \frac{u_n^T \tilde{\mathbf{x}}'}{\sigma_n} \mathbf{v}_n \quad (65)$$

donde  $\mathbf{u}_n$  y  $\mathbf{v}_n$  denota las  $n$ -ésimas columnas de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$ , respectivamente. Para  $\tilde{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{x}}' + \boldsymbol{\eta}'$ , con

$$\boldsymbol{\eta}' \equiv [\mathbf{0} \ \eta_2 - \eta_1 \ \dots \ \eta_N - \eta_1]^T \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{x}}' \equiv [\mathbf{0} \ f_x(t_2) - f_x(t_1) \ \dots \ f_x(t_N) - f_x(t_1)]^T$$

estas estimaciones pueden expresarse como sigue:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{u}_n^T \dot{\mathbf{x}}'}{\sigma_n} \mathbf{v}_n + \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{u}_n^T \boldsymbol{\eta}'}{\sigma_n} \mathbf{v}_n \quad (66)$$

La técnica de regularización SVD truncada, se basa en la suposición de que el vector  $\dot{\mathbf{x}}'$  satisface la condición discreta de Picard, para todo  $n$  tal que  $\sigma_n > \tau$ , con  $\tau$  siendo un número pequeño, los valores  $|\mathbf{u}_n^T \dot{\mathbf{x}}'|$ , en promedio, decae con  $n$  más rápido que los valores  $\sigma_n$ . Esta suposición implica que la primera suma en la Ec.66 está dominada por términos que corresponden a valores más grandes  $\sigma_n$ , a valores más pequeños de  $n$ . Por lo tanto, la solución al problema regularizado puede obtenerse descartando los elementos de la suma en la Ec.65 que corresponden a  $n > n_{th}$ , siendo  $n_{th}$  un umbral predefinido:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \sum_{n=1}^{n_{th}} \frac{\mathbf{u}_n^T \boldsymbol{\eta}'}{\sigma_n} \mathbf{v}_n = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}_{n_{th}}^{-1} \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{x}}' \quad (67)$$

Donde:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n_{th}}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1(n_{th}-1)}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1(n_{th}-2)}{\sigma_2} & & \dots \\ \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1(n_{th}-N)}{\sigma_N} \end{bmatrix} \quad \text{Y} \quad \mathbf{1}(n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

El parámetro  $n_{th}$  puede optimizarse mediante el método de derivación numérica, estimando la derivada según la Ec.67, denotada como VP-TSVD. La técnica *ii) por selección de componentes SVD* en lugar de descartar los elementos de la suma en la Ec.65 descartan aquellos elementos para los cuales el valor  $|\mathbf{u}_n^T \tilde{\mathbf{x}}'|$  es menor que un umbral predefinido  $0 < \chi_{tn} \in \mathbb{R}$ , es decir:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}(|\mathbf{u}_n^T \tilde{\mathbf{x}}'| - \chi_{tn}) \frac{\mathbf{u}_n^T \tilde{\mathbf{x}}'}{\sigma_n} \mathbf{v}_n = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\chi_{tn}) \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (68)$$

Donde:

$$\Sigma^{-1}(\chi_{tn}) \equiv \begin{bmatrix} \frac{1(|\mathbf{u}_n^t \tilde{\mathbf{x}}'| - \chi_{tn})}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1(|\mathbf{u}_n^t \tilde{\mathbf{x}}'| - \chi_{tn})}{\sigma_2} & & \dots \\ \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1(|\mathbf{u}_n^t \tilde{\mathbf{x}}'| - \chi_{tn})}{\sigma_N} \end{bmatrix} \text{ y } 1(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (69)$$

El parámetro  $\chi_{tn}$  puede optimizarse mediante el método de derivación numérica, estimando la derivada según la Ec.68, denotada como VP-SSVD. La técnica *iii) por ponderación de componentes SVD* en lugar de descartar los elementos seleccionados de la suma en la Ec.64, esos elementos están ponderados:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \sum_{n=1}^N w_n \frac{\mathbf{u}_n^t \tilde{\mathbf{x}}'}{\sigma_n} \mathbf{v}_n \quad (70)$$

Donde  $w_n \in \mathbb{R}$   $0 \leq w_n \leq 1$  por  $n = 1, \dots, N$ . La regularización se puede lograr asignando pesos  $w_n$  más pequeños a los elementos de la siguiente manera:

$$w_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \alpha^2}, n = 1, \dots, N \quad (71)$$

Donde  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$  es un parámetro de regularización escalar, entonces:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{V}(\Sigma^{-1} + \alpha^2 \mathbf{I})^{-1} \Sigma \mathbf{U}^T = (\mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_k + \alpha^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{Q}_k^T \tilde{\mathbf{x}}' \quad (72)$$

La estimación de la derivada según la Ec.70 con pesos definidos por la Ec.71 arroja los mismos resultados que el método VP-TR. La técnica *iv) por aplicación de la iteración de Landweber basada en la ponderación de los componentes de la SVD* para ciertos métodos de elección de los pesos  $w_n$ , el vector  $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$  definido en la Ec.116 calculando el algoritmo iterativo Landweber estimando la derivada:

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)} = \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(1)} + \omega \mathbf{Q}_k^t (\tilde{\mathbf{x}}' - \mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(1)}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (73)$$

Donde  $\hat{\mathbf{x}}_0^{(1)} \equiv [0 \dots 0]^T$  y  $\omega \in \mathbb{R}$  es un parámetro cuyo valor debe satisfacer la siguiente condición:

$$0 < \omega < 2/\sigma_1^2 \quad (74)$$

Aunque el cálculo del vector  $\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)}$  no implica la SVD de la matriz  $\mathbf{Q}_k$ , dicho vector satisface la siguiente ecuación:

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)} = \sum_{n=1}^N w_{n,i} \frac{\mathbf{u}_n^t \tilde{\mathbf{x}}'}{\sigma_n} \mathbf{v}_n \quad \text{para } i=1, 2, \dots \quad (75)$$

Donde  $w_{n,i} = 1 - (1 - W\sigma_n^2)^i$  para  $n = 1, \dots, N$  por lo tanto, la aplicación de la iteración de Landweber implícitamente implica amortiguar los elementos de la suma en la Ec.54 para  $\sigma_n$  más pequeño y debilitándose con el número de iteraciones. La iteración de Landweber incorpora la información adicional a priori sobre la solución modificando la Ec.63 de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)} = \Psi \left[ \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(1)} + \omega \mathbf{Q}_k^t (\tilde{\mathbf{x}}' - \mathbf{Q}_k \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(1)}) \right] \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (76)$$

donde  $\Psi(v) \equiv [\Psi(v_1) \dots \Psi(v_1)]^T$  representa una restricción impuesta a las estimaciones de la derivada, considerando la siguiente restricción:

$$\Psi(v) \equiv \begin{cases} -v_{\max} & \text{para } v < -v_{\max} \\ v_{\max} & \text{para } v > v_{\max} \\ v & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (77)$$

Donde  $v_{\max}$  es una estimación a priori de la velocidad máxima al caminar de la persona monitoreada. El método de derivación numérica según la Ec.76 es denotado como VP-LW. Para la técnica de regularización *iv) por aplicación del algoritmo iterativo CGLS* se basa en el método de gradientes conjugados. Para la estimación de la derivada se formula:

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)} = \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(1)} + \bar{\alpha}_i \mathbf{d}_i \quad \text{for } i = 1, 2 \dots \quad (78)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i &= \mathbf{Q}_k^t \mathbf{r}_i + \bar{\beta}_i \mathbf{d}_{i-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \bar{\alpha}_i \mathbf{Q}_k \mathbf{d}_i \\ \bar{\alpha}_i &= \frac{\|\mathbf{Q}_k^t \mathbf{r}_{i-1}\|_2^2}{\|\mathbf{Q}_k^t \mathbf{r}_{i-1}\|_2^2 + \|\mathbf{Q}_k \mathbf{r}_{i-1}\|_2^2} \quad \text{y} \quad \bar{\beta}_i = \frac{\|\mathbf{Q}_k^t \mathbf{r}_i\|_2^2}{\|\mathbf{Q}_k^t \mathbf{r}_{i-1}\|_2^2 + \|\mathbf{Q}_k \mathbf{r}_{i-1}\|_2^2} \\ \hat{\mathbf{x}}_0^{(1)} &= [0 \dots 0]^T, \quad \mathbf{r}_0 = \tilde{\mathbf{x}}' \quad \text{y} \quad \mathbf{d}_0 = \mathbf{Q}_k^t \tilde{\mathbf{x}}' \end{aligned}$$

Los vectores  $\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)}$  son calculados por medio del algoritmo, es idéntica a las soluciones de una serie de problemas de mínimos cuadrados restringidos:

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)} = \text{arg}_{\xi} \inf \{ \|\mathbf{Q}_k \xi - \tilde{\mathbf{x}}'\|_2 \mid \xi \in \mathbb{K}_i \} \quad i = 1, 2 \dots \quad (79)$$

Donde  $i$  es el índice de iteración y  $\mathbb{K}_i$  es el llamado subespacio de Krylov de  $\mathbb{R}^N$ , es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores:

$$\mathbf{Q}_k^t \tilde{\mathbf{x}}', (\mathbf{Q}_k^t \mathbf{Q}_k) \mathbf{Q}_k^t \tilde{\mathbf{x}}', (\mathbf{Q}_k^t \mathbf{Q}_k)^2 \mathbf{Q}_k^t \tilde{\mathbf{x}}', \dots, (\mathbf{Q}_k^t \mathbf{Q}_k)^{i-1} \mathbf{Q}_k^t \tilde{\mathbf{x}}'$$

La dimensión del espacio  $\mathbb{K}_i$  aumenta con el índice de iteración  $i$ . El cálculo del vector  $\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)}$  mediante el algoritmo CGLS no involucra la SVD en la matriz  $\mathbf{Q}_k$ , dicho vector satisface la siguiente ecuación:

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)} = \sum_{n=1}^N w_{n,i} \frac{u_n^t \tilde{\mathbf{x}}'}{\sigma_n} \mathbf{v}_n \quad \text{para } i=1,2,\dots \quad (80)$$

donde  $u_n, v_n, \sigma_n$ :

$$w_{n,i} = k_1 \sigma_n^2 + k_2 \sigma_n^4 + k_3 \sigma_n^6 + \dots + k_i \sigma_n^{2i} \quad \text{para } n = 1 \text{ y } i = 1,2 \quad (81)$$

con  $k_1, \dots, k_i \in \mathbb{R}$  satisfaciendo la siguiente ecuación:

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)} = k_1 \mathbf{Q}_k^t \tilde{\mathbf{x}}' + k_2 (\mathbf{Q}_k^t \mathbf{Q}_k) \mathbf{Q}_k^t \tilde{\mathbf{x}}' + \dots + k_N (\mathbf{Q}_k^t \mathbf{Q}_k)^{i-1} \mathbf{Q}_k^t \tilde{\mathbf{x}}' \quad (82)$$

Por tanto, la aplicación del algoritmo CGLS implica ponderar los componentes de la SVD en la matriz  $\mathbf{Q}_k$ ; el potencial de la técnica de regularización basada en el algoritmo CGLS para generar mejores resultados que otras técnicas basadas en el SVD, corresponde a que los espacios  $\mathbb{K}_i$ , a los que pertenecen los vectores  $\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)}$ , definidos en la matriz  $\mathbf{Q}_k$  como el vector  $\tilde{\mathbf{x}}'$ , a diferencia de los subespacios de  $\mathbf{Q}_k$  generados por vectores singulares seleccionados de la matriz  $\mathbf{Q}_k$ , definido por el vector  $\tilde{\mathbf{x}}'$ . El método de derivación numérica según la Ec.78, es denotada VP-CG.

**D. Regularización basada en el filtro de Kalman.** En el caso del método FD, la estimación de la derivada se obtiene sobre la base de dos puntos de datos. Cuando ese método se aplica repetidamente después de la adquisición de cada nuevo punto de datos, la regularización se logra utilizando un modelo extendido del movimiento de la persona monitoreada, incorporando información sobre la trayectoria del movimiento, acumulada con el tiempo, y a priori la información sobre el ruido de medición. Según el método FD, el movimiento de la persona monitoreada en el intervalo  $[t_{n-1}, t_n]$  se modela con la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \dot{\mathbf{x}}_{n-1} + \dot{\mathbf{x}}_n^{(1)} \Delta t_n \quad (83)$$

donde  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ . Este modelo puede extenderse asumiendo que el cambio  $\Delta \dot{\mathbf{x}}_n^{(1)}$  en la velocidad de la persona monitoreada entre los instantes de tiempo  $t_{n-1}$  y  $t_n$ , es decir:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_n^{(1)} \equiv \dot{\mathbf{x}}_n^{(1)} \equiv \dot{\mathbf{x}}_{n-1}^{(1)} \quad (84)$$

es una realización de una variable aleatoria de media cero, distribuida normalmente  $\Delta \dot{\mathbf{x}}_n^{(1)}$ , cuya varianza es  $\sigma_n^2$ . Bajo estas suposiciones y si el ruido de medición es gaussiano, las estimaciones  $\hat{\mathbf{x}}_n$  y  $\hat{\mathbf{x}}_n^{(1)}$  de  $\dot{\mathbf{x}}_n$  y  $\dot{\mathbf{x}}_n^{(1)}$  minimizarán el error de aproximación al cuadrado  $(\hat{\mathbf{x}}_n - \dot{\mathbf{x}}_n)^2$ , es obtenida mediante el filtro de Kalman:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \hat{\mathbf{x}}_{n-1}^{(1)} \Delta t_n + g_{n,0} \hat{\Delta \tilde{\mathbf{x}}}_n \quad (85)$$

$$\hat{x}_n = \hat{x}_{n-1}^{(1)} + g_{n,1} \hat{\Delta} \tilde{x}_n \quad (86)$$

Donde  $0 < g_{n,0}, g_{n,1} \in \mathbb{R}$  son los componentes de la ganancia de Kalman,  $\hat{x}_{n-1}^{(1)}$  es una estimación obtenida de  $\hat{x}_{n-1}^{(1)}$  y  $\hat{\Delta} \tilde{x}_n$ , es la diferencia entre el resultado de la medición y su valor predicho basado en el modelo, es decir:

$$\hat{\Delta} \tilde{x}_n = \tilde{x}_n - (\hat{x}_{n-1} + \hat{x}_{n-1}^{(1)} \Delta t_n) \quad (87)$$

Con  $\hat{x}_{n-1}$  siendo una estimación de  $\hat{x}_{n-1}$  previamente obtenida. Se puede observar en la Ec.85 que cuando  $g_{n,0}$  está cerca de 1, la estimación  $\hat{x}_n$  tiende a parecerse al resultado de la medición  $\tilde{x}_n$ . Por otro lado, cuando  $g_{n,0}$  es menor, el resultado de la medición tiene menos influencia en la estimación  $\hat{x}_n$ ; y por lo tanto, la regularización es más fuerte. La ganancia de Kalman  $g_n = [g_{n,0} \ g_{n,1}]^T$  es:

$$g_n = P_n h (h^T P_n h + \hat{\sigma}_x^2)^{-1} \quad (88)$$

Donde  $\hat{\sigma}_x^2$  estima la varianza de errores alterados de los datos de medición  $h = [1 \ 0]^T$ :

$$P_n = F(I - g_{n-1} h^T) P_{n-1} F^T + Q \quad (89)$$

Con:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y \quad Q = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} (\Delta t_n)^2 & \Delta t_n \\ \Delta t_n & 1 \end{bmatrix} \quad (90)$$

El vector  $g_{n-1}$  y la matriz  $P_{n-1}$  se determinan procesando los resultados de la medición adquiridos en  $\tilde{x}_n$ . Al iniciar el proceso de adquisición de datos se utilizará las Ec.134 y Ec.135 en los siguientes valores:

$$\hat{x}_1 = \tilde{x}_1, \hat{x}_1^{(1)} = 0, g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Y \quad P = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (91)$$

El método descrito se aplica repetidamente para estimar la derivada en N instantes de tiempo  $t_1, \dots, t_N$ , entonces se determina los valores  $g_{n,0}$  y  $g_{n,1}$  con la Ec.88 satisfaciendo las siguientes ecuaciones:

$$g_{1,0} = \frac{1}{2} \quad Y \quad g_{n,0} = \frac{g_{n-1,0} + 2\Delta t_n g_{n-1,1} - \Delta t_n^2 \sum_{v=0}^{n-1} \frac{g_{v,1}^2}{1 - g_{v,0}^2} + (n-1)\Delta t_n^2 \frac{\sigma_a^2}{\hat{\sigma}_x^2}}{g_{n-1,0} + 2\Delta t_n g_{n-1,1} - \Delta t_n^2 \sum_{v=0}^{n-1} \frac{g_{v,1}^2}{1 - g_{v,0}^2} + (n-1)\Delta t_n^2 \frac{\sigma_a^2}{\hat{\sigma}_x^2} + 1}$$

$$\text{para } n = 1, \dots, N \quad (92)$$

$$\mathbf{g}_{1,1}=0 \text{ y } \mathbf{g}_{n,1} = \frac{\mathbf{g}_{n-1,1} - \Delta t_n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{g_{v,1}^2}{1 - g_{v,0}^2} + (n-1)\Delta t_n^2 \frac{\sigma_a^2}{\hat{\sigma}_x^2}}{\mathbf{g}_{n-1,0} + 2\Delta t_n \mathbf{g}_{n-1,1} - \Delta t_n^2 \sum_{v=0}^{n-1} \frac{g_{v,1}^2}{1 - g_{v,0}^2} + (n-1)\Delta t_n^2 \frac{\sigma_a^2}{\hat{\sigma}_x^2} + 1}$$

para  $n = 1, \dots, N$  (93)

Por lo tanto, los valores de  $\mathbf{g}_{n,0}$  y  $\mathbf{g}_{n,1}$  están determinados por la relación de  $\sigma_a^2$  y  $\hat{\sigma}_x^2$  por la secuencia  $t_1, \dots, t_N$ ; además, para cualquier valor fijo de  $n$  y  $\hat{\sigma}_x^2$ , crecen monótonamente con  $\sigma_a^2$ . Dado que  $\mathbf{g}_{n,0}$  y  $\mathbf{g}_{n,1}$  reflejan la fuerza de la regularización,  $\sigma_a^{-1}$  puede desempeñar el papel de un parámetro de regularización. El método de derivación numérica, que consiste en estimar la derivada según la Ec.86, se denota como FD-KF. A continuación, se presenta los métodos de diferenciación numérica que utilizaran:

TABLA I  
MÉTODOS DE DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

Método	N	M	Función de aproximación	Distribución en instantes de tiempo en el que los datos son adquiridos	Distribución en instantes de tiempo en los que se estima la derivada	Técnica de regularización
BD	2	1	polinomio algebraico de grado 1	Arbitraria	$t' = t_1$	Ninguno
FD	2	1	polinomio algebraico de grado 2	Arbitraria	$t' = t_2$	Ninguno
CD-3	3	1	polinomio algebraico de grado 4	Equidistante	$t' = t_2$	Ninguno
CD-5	5	1	polinomio algebraico de grado 6	Equidistante	$t' = t_3$	Ninguno
CD-7	7	1	polinomio algebraico de grado 8	Equidistante	$t' = t_4$	Ninguno
CD-9	9	1	polinomio trigonométrico de grado 1	Equidistante	$t' = t_5$	Ninguno
CS-3	3	1	polinomio trigonométrico de grado 1	Equidistante	$t' = t_2$	Ninguno
CE-3	3	1	Exponencial del polinomio algebraico de grado 2	Equidistante	$t' = t_2$	Ninguno

VP	arbitrario	M=N	Exponencial del polinomio algebraico de grado $k \geq 2$	Arbitrario Para $k \leq 2$ ; Equidistante	$t'_n = t_n$ para $n = 1, \dots, N$	Ninguno
VE	arbitrario	arbitrario	combinación lineal de N funciones gaussianas	Arbitrario	arbitrario	Ninguno
VC	arbitrario	arbitrario	combinación lineal de N funciones $\varphi_c$	Arbitrario	arbitrario	Ninguno
CD-3-DS	Extraño	1	polinomio algebraico de grado 2	Equidistante	$t' = t_{(N+1)/2}$	Extensión del paso de diferenciación
CS-3-DS	Extraño	1	polinomio algebraico de grado 1	Equidistante	$t' = t_{(N+1)/2}$	Extensión del paso de diferenciación
CE3-DS	Extraño	1	Exponencial del polinomio algebraico de grado 2	Equidistante	$t' = t_{(N+1)/2}$	Extensión del paso de diferenciación
CDN-SG	Extraño	1	polinomio algebraico de grado $K \leq N - 1$	Equidistante	$t' = t_{(N+1)/2}$	Imposición de restricciones en el grado aproxima polinomial
VE-NB	arbitrario	arbitrario	Combinación lineal de N funciones gaussianas	Arbitrario	Arbitrario	Imposición de restricciones en número basado funciones
VC-NB	arbitrario	arbitrario	Combinación lineal de N funciones $\varphi_c$	Arbitrario	Arbitrario	Imposición de restricciones en número basado funciones

VP-TR	arbitrario	M=N	Exponencial del polinomio algebraico de grado $k \geq 2$		$t'_n = t_n$ para $n = 1, \dots, N$	Imposición de restricciones en número basado funciones
VE-TR	arbitrario	arbitrario	combinación lineal de N Funciones gaussianas	Arbitrario	Arbitrario	Imposición de restricciones en número basado funciones
VC-TR	arbitrario	arbitrario	combinación lineal de N funciones $\varphi_c$	Arbitrario	Arbitrario	Imposición de restricciones en número basado funciones
VP-TV	arbitrario	M=N	Función polinomial por partes de grado $k \geq 2$	arbitrario para k=2 equidistante	$t'_n = t_n$ para $n = 1, \dots, N$	Imposición de restricciones total variación de 1° derivada basado funciones.
VP-TSVD	arbitrario	M=N	Función polinomial por partes de grado $k \geq 2$	arbitrario para k=2 equidistante	$t'_n = t_n$ para $n = 1, \dots, N$	Selección de SVD componentes
VP-SSVD	arbitrario	M=N	Función polinomial por partes de grado $k \geq 2$	arbitrario para k=2 equidistante	$t'_n = t_n$ para $n = 1, \dots, N$	Selección de SVD componentes
VP-LW	arbitrario	M=N	Función polinomial por partes de grado $k \geq 2$	arbitrario para k=2 equidistante	$t'_n = t_n$ para $n = 1, \dots, N$	Ponderación de los componentes SVD
VP-GG	arbitrario	M=N	Función polinomial por partes de grado $k \geq 2$	arbitrario para k=2 equidistante	$t'_n = t_n$ para $n = 1, \dots, N$	Ponderación de los componentes SVD
FD-KF	2	1	Polinomio de grado 1	arbitrario	$t' = t_2$	Filtro Kalman

**2.3. Procesamiento de datos de medición.** Una vez obtenida la diferenciación numérica, se evaluará las operaciones en los sistemas de seguimiento para el procesamiento de datos que permitan estimar las coordenadas de posición de la persona monitoreada en base a los datos adquiridos por medio de los sensores de profundidad y sensores de radar de impulso. Uno puede esperar que la incertidumbre de los resultados finales del monitoreo dependa no solo de la elección del método de diferenciación numérica, sino también de la elección de los métodos utilizados para el propósito descrito; sin embargo, una comparación sistemática de dichos métodos queda fuera del alcance de esta tesis.

**2.3.1. Pre-procesamiento de datos de medición en sensores de profundidad.** Los sensores de profundidad han permitido medir la distancia entre una superficie que refleja la luz infrarroja y el plano paralelo a la lente del sensor, distancia que en adelante denominaremos profundidad (véase fig. N°2). Los sensores de profundidad disponibles en el mercado funcionan según varios principios, incluidos:

- Principio de luz estructurada, proyectar un patrón fijo de luz infrarroja sobre la superficie analizada por medio de un proyector infrarrojo y analizar la deformación de ese patrón en esa superficie por medio de una cámara infrarroja.
- Principio tiempo de vuelo, proyectar luz infrarroja de intensidad modulada sobre la superficie analizada por medio de un proyector infrarrojo y medir, por medio de una cámara infrarroja, el tiempo la luz reflejada necesita volver al sensor.

En ambos casos, los datos de medición sin procesar representan la profundidad en varios puntos del área monitoreada. Esos datos están organizados en matrices bidimensionales, en lo sucesivo denominadas imágenes de profundidad, cuyos elementos se denominan píxeles de profundidad. Las coordenadas de un píxel de profundidad combinadas con su valor, es decir, un número no negativo representativo de la profundidad, brindan información sobre la posición tridimensional de un punto perteneciente a una superficie que refleja luz infrarroja (véase fig. N°3).

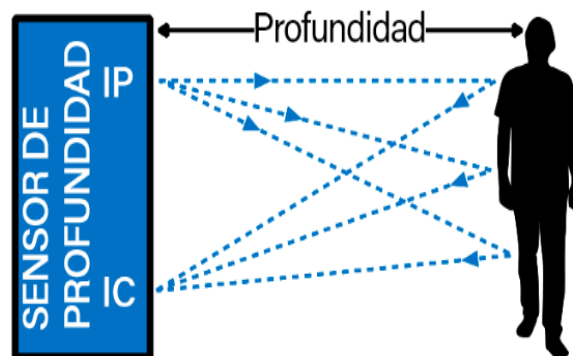


Fig. N°2: Principio de funcionamiento del sensor de profundidad; IP – proyector infrarrojo, IC – cámara infrarroja.



Fig. N°3: Imagen de profundidad (los puntos más brillantes indican mayor profundidad).

Para la obtención de las imágenes de profundidad, se utilizaron los dispositivos Kinect de segunda generación, compuestas de  $512 \times 424$  píxeles. Se han capturado 30 imágenes de ese tipo por segundo. La profundidad máxima, que se puede estimar por medio de un dispositivo, es de 8m. Sus ángulos de visión horizontal y vertical son de  $70^\circ$  y  $60^\circ$ , respectivamente, conforme a otros experimentos [10, 11]. No es afectada por los sistemas inalámbricos que se puedan encontrar en el entorno de prueba; sin embargo, puede verse afectado por otros dispositivos que emiten luz infrarroja, en particular, los sensores de profundidad. Al utilizar estos dispositivos, sus campos de visión no deben superponerse o deben activarse en un modo de tiempo compartido, porque utiliza el algoritmo [12]. Dado que solo se ha utilizado el dispositivo Kinect en los experimentos, ese problema no se ha examinado con más detalle. Por otro lado, se ha observado que puede perderse una fracción considerable de datos si el sensor de profundidad se expone a una intensa luz solar. Los medios de procesamiento de datos, instalados en cada dispositivo Kinect junto con el sensor de profundidad, se pueden utilizar para estimar las coordenadas tridimensionales de las 25 articulaciones seleccionadas de la persona monitoreada, en base a otro experimento [12]. Aunque tales estimaciones se han utilizado con éxito en algunas aplicaciones comerciales, tienen varios inconvenientes si se trata de su uso en sistemas de monitoreo, como la profundidad máxima a la que se pueden estimar las posiciones de las juntas es de 4.5m, la persona monitoreada debe permanecer en el área monitoreada por un corto tiempo antes de que tales estimaciones estén disponibles, dificultando la identificación del lugar por el cual esa persona ingresa al área monitoreada, y tales estimaciones son confiables solo para un conjunto limitado de poses de la persona monitoreada; en particular, pueden alterarse con grandes errores cuando la persona monitoreada sufre una caída [13].

Además, las soluciones que permite esta función se limitan al sistema de monitoreo basado en el dispositivo Kinect; transferirlos a otros tipos de sensores de profundidad requeriría, entre otros, la recopilación o adaptación de un gran conjunto de datos [12]. Por estas razones, en las aplicaciones de sensores de profundidad relacionadas con la atención médica, es una práctica común utilizar medios de procesamiento de datos externos e implementar procedimientos más simples para el pre-procesamiento de sensores de profundidad de datos sin procesar. Tal procedimiento aplicado comprende de las siguientes operaciones [14]:

- Extracción de un subconjunto de píxeles de profundidad (en adelante, silueta) representa a la persona monitoreada.
- Transformación del sistema de coordenadas basado en imágenes de profundidad en un sistema de coordenadas de referencia.
- Estimación de la posición tridimensional del centro de masa de la persona monitoreada. Este procedimiento se observa en la figura N°4 usando una imagen de profundidad y los resultados de su pre-procesamiento.

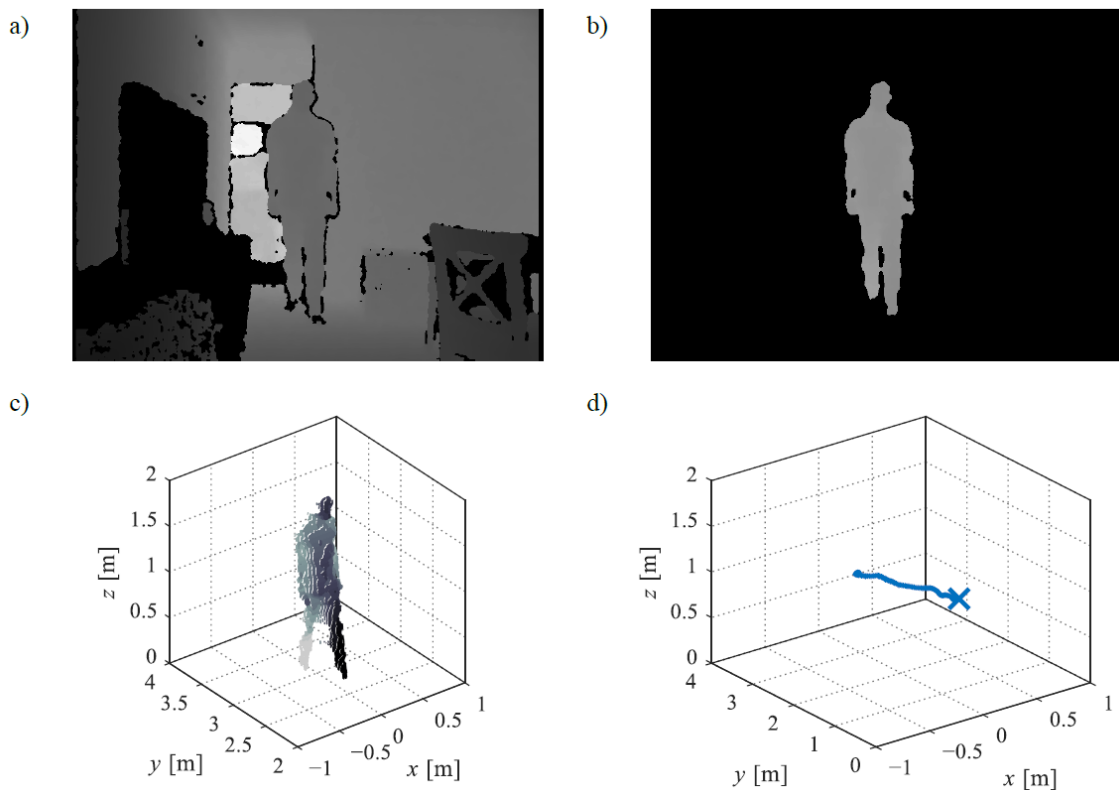


Fig.N°4: (a) imagen de profundidad, (b) resultados de la extracción de la silueta de esa imagen de profundidad, (c) conjunto de puntos tridimensionales en el sistema de coordenadas de referencia, correspondiente a esa silueta, y (d) estimaciones de la posición del centro de la persona monitoreada masa, basada en varios de estos conjuntos de puntos.

**A. Extracción de la silueta de una persona monitoreada a partir de la imagen de profundidad.** Para desarrollar el experimento se han extraído siluetas de cada imagen de profundidad mediante un procedimiento que comprende las siguientes operaciones:

- Estimación de una imagen de profundidad representativa del fondo estático, utilizando el valor máximo de cada píxel de profundidad obtenido en 100 imágenes de profundidad consecutivas;
- Rechazo de aquellos píxeles de profundidad, pertenecientes a la imagen de profundidad analizada, cuyos valores difieren en menos de 16cm de los correspondientes píxeles de profundidad pertenecientes a la imagen de profundidad del fondo;
- Suavizado de la imagen de profundidad obtenida mediante un filtro mínimo seguido de erosión y dilatación morfológica;
- Rechazo de los píxeles de profundidad restantes si su área total es inferior a  $0.1 \text{ m}^2$ .

Los resultados del procedimiento descrito se registran en la figura N°5.

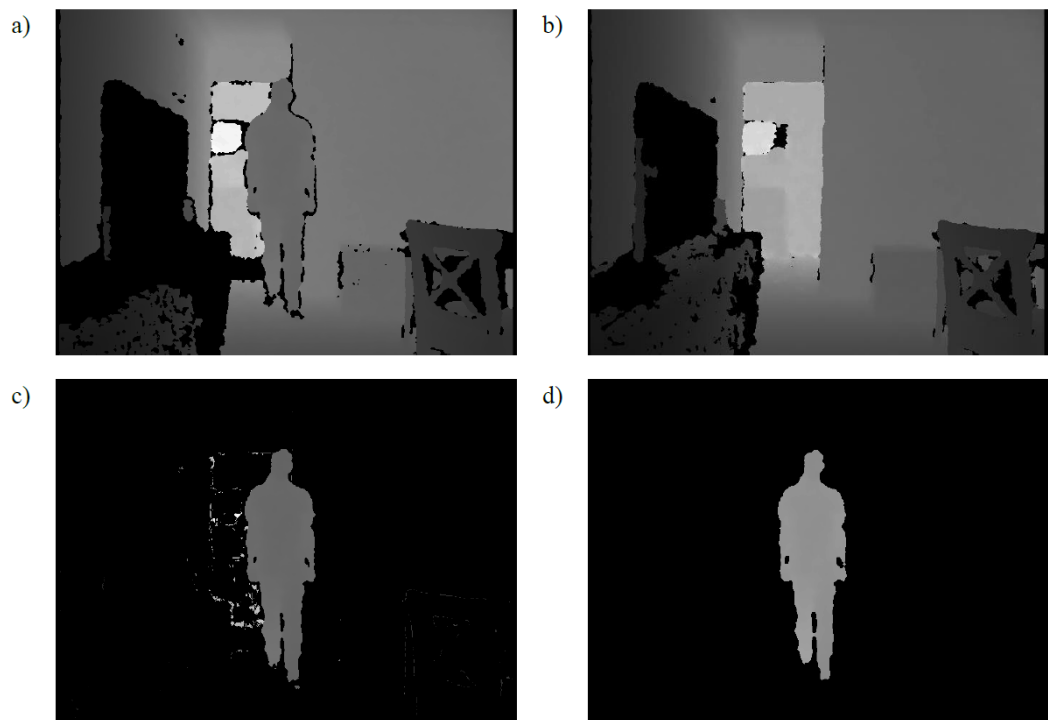


Fig.N°5: (a) imagen de profundidad, (b) estimación de fondo estático, (c) resultado de discriminación de fondo, y (d) resultado de filtrado.

**B. Estimación de la posición de la persona monitoreada.** La transformación del sistema de coordenadas basado en la imagen de profundidad en el sistema de coordenadas de referencia se ha realizado de acuerdo al procedimiento [15]. En

una determinada imagen de profundidad cada píxel de profundidad se puede representar mediante un triplete de números enteros positivos  $\langle i, j, d \rangle$ , donde  $i \in \{1, 2, \dots, I\}$  es el índice de la columna de la imagen de profundidad,  $i \in \{1, 2, \dots, j\}$  es el índice de la fila de la imagen de profundidad y  $d \in \{1, 2, \dots, D\}$  es la profundidad en milímetros, donde – en el caso de dispositivos Kinect de segunda generación –  $I = 512$ ,  $j = 424$  y  $d = 8000$ . Las relaciones entre  $i, j, d$  y las coordenadas  $x, y, z$  del punto correspondiente en el sistema de coordenadas de referencia se describen mediante las siguientes ecuaciones:

$$y = d \quad (94)$$

$$x = \left(i - \frac{1}{2}I\right) \Delta x \quad y \quad \frac{1}{2}I \frac{\Delta x}{d} = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (95)$$

$$z = \left(j - \frac{1}{2}J\right) \Delta z \quad y \quad \frac{1}{2}J \frac{\Delta z}{d} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (96)$$

donde, para los dispositivos Kinect de segunda generación,  $\alpha = 60$  y  $\beta = 70$ . Por eso:

$$x = d \left(\frac{2i}{I} - 1\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad y \quad z = d \left(\frac{2j}{J} - 1\right) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (97)$$

Si la posición del sensor de profundidad no corresponde al origen del sistema de coordenadas de referencia, o si ese sensor no está orientado en la dirección indicada por el eje  $y$  de ese sistema, las coordenadas determinadas de acuerdo con la Ec.96 y la Ec.97 debe transformarse de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\phi_s, \Psi_s, \vartheta_s) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \quad (98)$$

Donde  $x_s, y_s, z_s$  son las coordenadas de la posición del sensor de profundidad en el sistema de coordenadas de referencia,  $\phi_s, \Psi_s, \vartheta_s$  son los ángulos de Euler que caracterizan su orientación, y:

$$\mathbf{R}(\phi, \psi, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta \cos\Psi & \cos\vartheta \sin\Psi \sin\phi - \sin\vartheta \cos\phi & \cos\vartheta \sin\Psi \cos\phi + \sin\vartheta \sin\phi \\ \sin\vartheta \cos\Psi & \sin\vartheta \sin\Psi \sin\phi + \cos\vartheta \cos\phi & \sin\vartheta \sin\Psi \cos\phi - \cos\vartheta \sin\phi \\ -\sin\Psi & \cos\Psi \sin\phi & \cos\Psi \cos\phi \end{bmatrix} \quad (99)$$

Donde  $\vartheta \equiv \sin(\vartheta)$ ,  $\cos\vartheta \equiv \cos\vartheta$ , etc. Después de la transformación anteriormente descrita, se estima la posición del centro de masa de la persona monitoreada calculando las medianas de las coordenadas de los píxeles de profundidad correspondientes a la silueta. Las secuencias de coordenadas así obtenidas están sujetas a diferenciación numérica y a post procesamiento.

**2.3.2. Pre-procesamiento de datos del sensor radar de impulso.** Para el estudio exhaustivo de los métodos aplicables al pre-procesamiento de datos de medición adquiridos por medio de sensores de radar de impulso, se considera el principio del funcionamiento de un sensor de radar de impulso (véase fig. N°6) un breve impulso electromagnético, emitido por la antena emisora (EA), es reflejado por varios objetos enviados en el espacio que rodea el sensor. Todas las emisiones reflejadas del impulso (ecos) son capturadas por la antena receptora (RA). Dependiendo de la estructura espacial del objeto, el eco recibido puede tener una magnitud mayor o menor; además, dependiendo de la distancia entre el objeto y el sensor, ese eco puede aparecer tarde o temprano, es decir, puede tener una posición diferente en el eje temporal, proporcional al tiempo total de su propagación [16]. Los sensores de radar de impulso utilizados en este estudio, en lo sucesivo denominados sensores de radar, se han configurado de tal manera que generan impulsos cuya banda de frecuencia es aproximadamente 6 a 8.5 GHz, y para permitir la detección de objetos situados a una distancia de 7m de la antena con una resolución de muestreo en espacio libre de aproximadamente 4mm. El circuito receptor de cada sensor ha sido equipado con un filtro paso alto, suprimiendo las frecuencias por debajo de los 6.01 GHz, con el fin de disminuir su susceptibilidad a la interferencia de otros servicios de radiocomunicaciones que puedan estar presentes en el sector vigilado. La potencia efectiva de radiación isotrópica de cada uno de estos sensores cumple casi los requisitos del Ministerio de Transporte y Comunicaciones para los sistemas de banda ultra ancha. Esto es suficiente para fines de investigación, pero tendría que mejorarse en el caso de una implementación práctica. Los sensores de radar se han colocado en carcasas de aluminio cuyas dimensiones son de 12×12×7 cm.

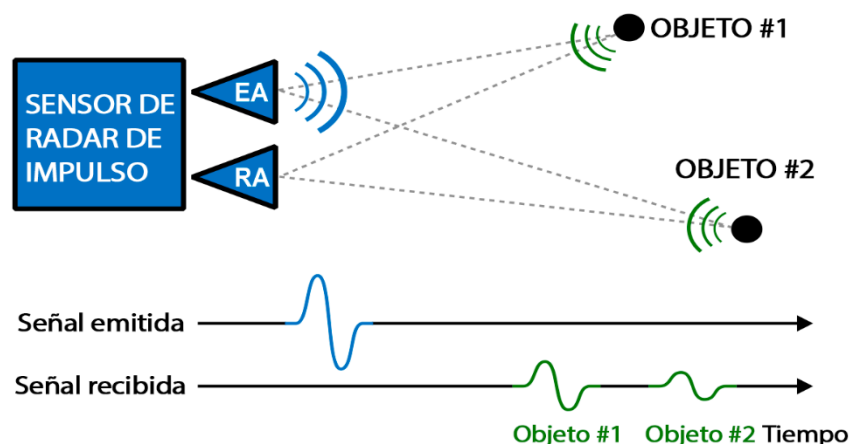


Fig. N°6: Principio de funcionamiento del sensor de radar de impulso; EA – antena emisora, RA – antena receptora.

La operación para el pre-procesamiento de datos de radar que se aplica comprende de las siguientes operaciones:

- Extracción de la señal útil suprimiendo el ruido de medición y los ecos no deseados;
- Estimación de las distancias entre la persona monitoreada y los sensores;
- Estimación de las coordenadas de dos dimensiones de la posición de la persona monitoreada;

Este procedimiento se observa en la figura N°7 con datos de radar y los resultados de su pre-procesamiento mediante el procedimiento descrito anteriormente.

**A. Extracción de la señal útil de datos de radar sin procesar.** Para la proximidad de los dispositivos electrónicos que utilicen medios de comunicación inalámbrica, no introduciría perturbación alguna en el sistema de monitoreo basado en radar objeto de estudio. Por lo tanto, la complicación más importante de la extracción de los datos de radar es el ruido de medición y el desorden, es decir, la superposición de ecos como resultante de múltiples reflejos del impulso emitido por objetos estáticos, y, posiblemente, de la persona monitoreada. Para hacer posible la estimación de la posición de la persona monitoreada, se extrae el componente útil de la señal representativa del eco propagado directamente desde el cuerpo de la persona monitoreada a la antena receptora. Se escoge un método de extracción de señales basado en el promedio exponencial, [14] eso implica la estimación del vector  $\hat{z}_{s,n}$ , representativo en la señal útil, siempre que un vector de datos  $\tilde{z}_n$  de radar sin procesar sea adquirido, según la siguiente fórmula:

$$\hat{z}_{s,n} = \tilde{z}_n - \hat{z}_{c,n} \quad (100)$$

Dónde  $\hat{z}_{c,n}$  es una estimación del vector  $z_{c,n}$  representativo de los componentes no deseados de datos, obtenidos según la siguiente fórmula:

$$\hat{z}_{c,n} = A\hat{z}_{c,n-1} + (I - A)\tilde{z}_{n-1} \quad (101)$$

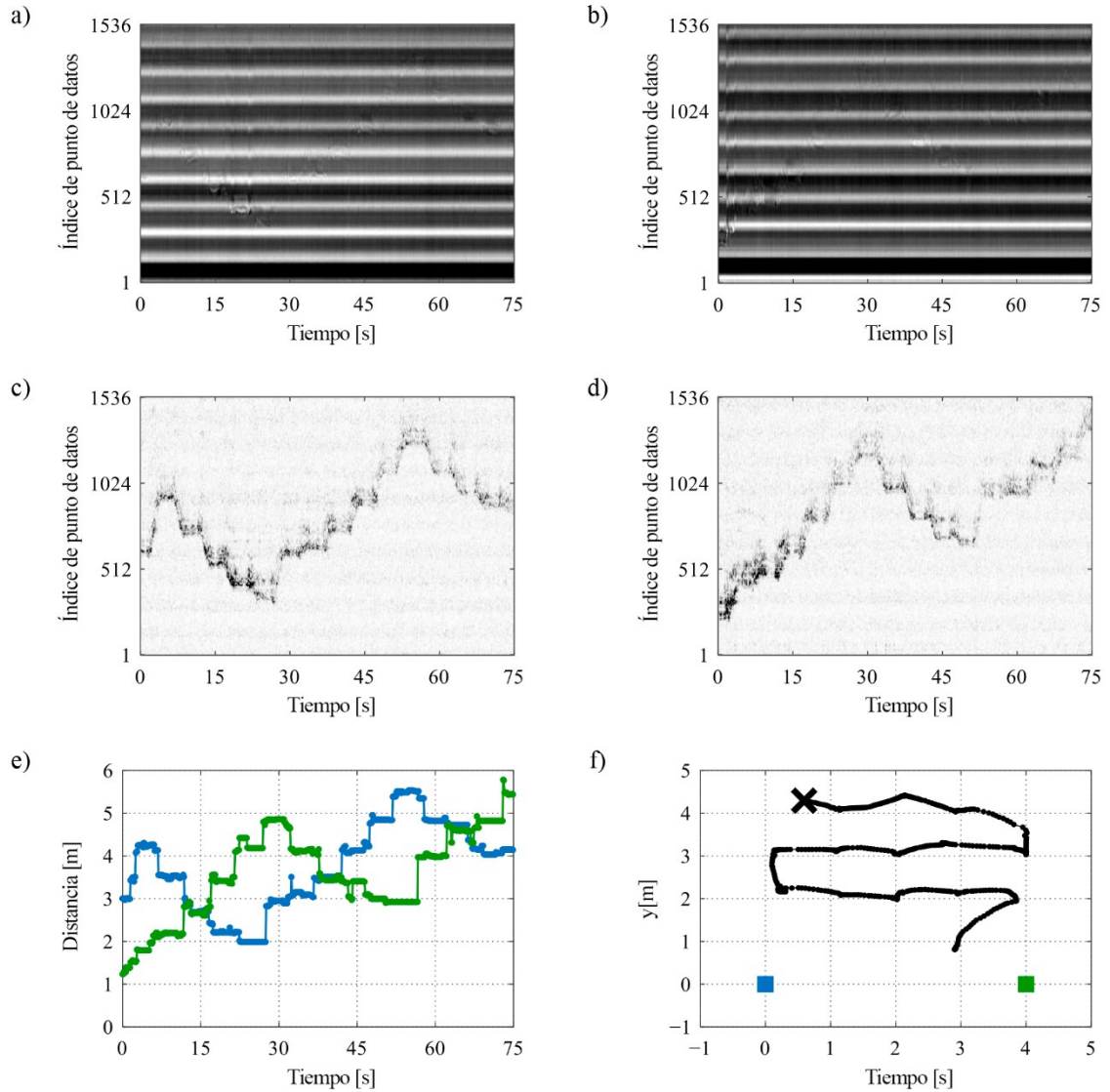


Fig. N°7: (a) datos ejemplificadores del sensor de radar #1, y (b) #2, (c) resultados del pre-procesamiento de las señales extraídas de los datos del sensor radar #1, y (d) #2, (e) estimaciones de distancias entre la persona monitoreada y los sensores de radar (azul #1, verde #2), (f) estimaciones de coordenadas bidimensionales de la posición de la persona monitoreada, con cuadrados azules y verdes indicando las posiciones de los sensores de radar #1 y #2, respectivamente.

Fuente: Elaboración propia.

Dónde:

$\tilde{z}_{n-1}$  es el vector de datos de radar sin procesar, adquiridos antes de  $\tilde{z}_n$ ;

$\hat{z}_{c,n-1}$  es el estimado de  $\tilde{z}_{c,n-1}$  obtenido de los datos adquiridos antes de  $\tilde{z}_n$ ;

A es una matriz diagonal, cuyos elementos se optimizan adaptativamente de acuerdo con el procedimiento propuesto, permitiendo la supresión de los componentes no deseados sin suprimir los útiles, incluso cuando la persona monitoreada no se está moviendo.

$\mathbf{I}$  es la matriz de identidad. Antes de seguir procesando, los vectores  $\hat{\mathbf{z}}_{s,n}$  han sido filtrados por bandpass para suprimir sus componentes espectrales situados fuera de la banda de frecuencia del impulso emitido.

**B. Estimación de la distancia entre la persona monitoreada y el sensor.** El cuerpo humano tiene una estructura compleja, por lo que cuando se encuentra frente a un sensor de radar genera muchos ecos cuya atribución a puntos específicos de ese cuerpo es problemática. Sin embargo, en las aplicaciones aquí consideradas, no es necesario obtener información sobre todos esos ecos; de hecho, el más fuerte puede ser suficiente [14]. Aquí se supone que el eco más fuerte puede atribuirse al centro de masa de la persona monitoreada. Para estimar la distancia entre ese centro de masa y el sensor de radar, es necesario estimar la posición de dicho eco, es decir, la cantidad de tiempo transcurrido desde la emisión del impulso hasta la recepción del eco. Un método para la estimación de la posición del eco, basado en un procedimiento iterativo CLEAN. Implica el análisis de la correlación cruzada no normalizada de la función  $\{\rho_{y_s,v} | v = 1,2 \dots\}$ , caracterizando la relación entre un vector  $\hat{\mathbf{z}}_s$  de datos y el vector  $\mathbf{s}$  representativo del impulso emitido (véase fig. N°9).

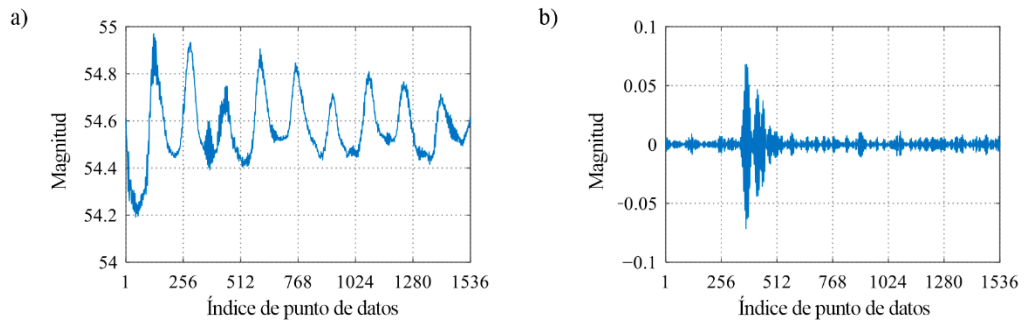


Fig. N°8: Datos ejemplificadores del radar correspondientes a un instante de tiempo único (a) y señal extraída de esos datos (b).

Sólo es necesario estimar la posición de uno de ellos para determinar el máximo de la función de correlación cruzada:

$$\hat{v} = \text{arg}_v \sup\{\rho_{y_s,v}\} \quad (102)$$

y determinando la posición del eco  $\hat{n}$  de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\hat{n} = \hat{v} + \Delta v \quad (103)$$

Donde  $\Delta v$  denota el desplazamiento constante entre el máximo en el dominio de correlación cruzada y la posición del eco en el dominio del tiempo. La distancia

entre el sensor de radar y el centro de masa de la persona monitoreada se puede estimar de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\hat{d} = P_0 + P_1 \hat{n} \quad (104)$$

donde  $p_0$  y  $p_1$  son parámetros determinados a priori sobre la base de la especificación del sensor de radar.

**C. Estimación de la posición de la persona monitoreada.** Cuando dos sensores de radar están operando simultáneamente, se puede utilizar la técnica de trilateración para estimar las coordenadas bidimensionales  $\langle x, y \rangle$  de la posición de la persona monitoreada en las bases del par de distancias  $\langle d_1, d_2 \rangle$  entre esa persona y los sensores. Consiste en determinar la intersección de dos círculos cuyos centros se encuentran en las posiciones de los sensores de radar y cuyos radios son  $d_1$  y  $d_2$  (véase la figura N°10).

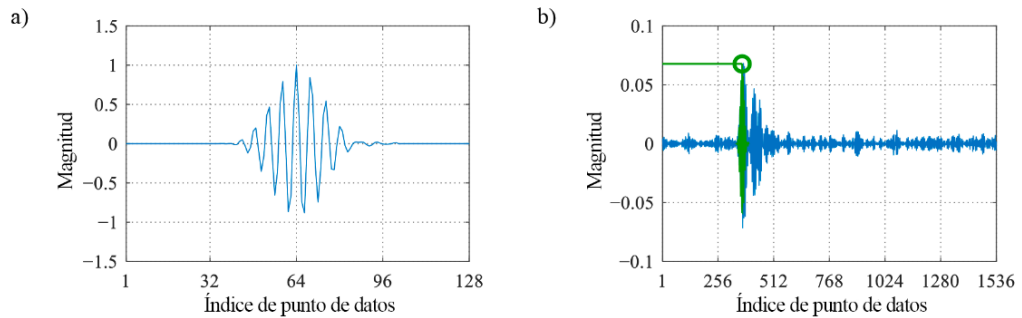


Fig. N°9: (a) impulso emitido por el sensor de radar, (b) resultados de su coincidencia con la señal extraída.

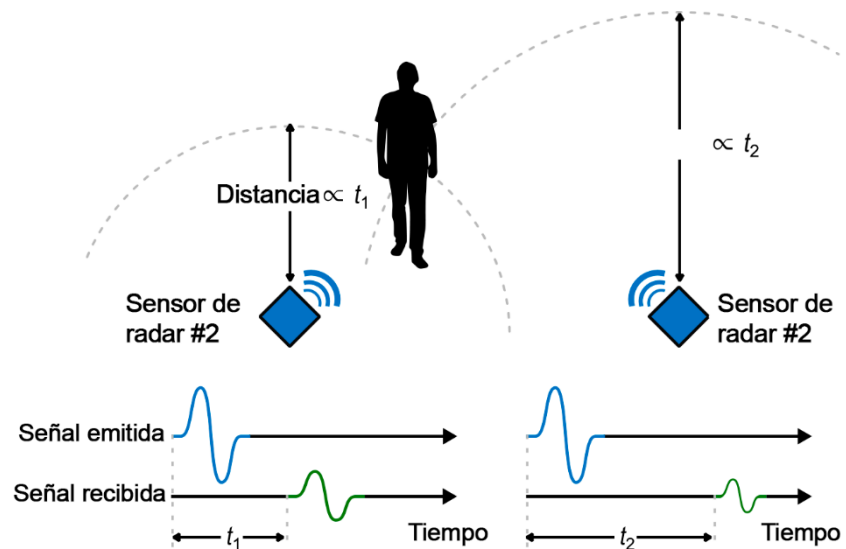


Fig. N°10: Localización de la persona monitoreada por medio de un par de sensores de radar.

Si se adopta un sistema adecuado de coordenadas donde el eje x pasa a través de ambos sensores de radar, y, el eje y a través de uno de ellos, para que  $\langle x, y \rangle$  y  $\langle d_1, d_2 \rangle$  cumplan con el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = d_1^2 \\ (x - r)^2 + y^2 = d_2^2 \end{cases} \quad (105)$$

Donde  $r$  denota la distancia entre los sensores de radar. De ahí las siguientes fórmulas para la estimación de  $x$  e  $y$ :

$$\hat{x} = \frac{r}{2} + \frac{\hat{d}_1^2 - \hat{d}_2^2}{2r} \quad (106)$$

$$\hat{y} = \sqrt{\hat{d}_1^2 - (\hat{x} - r)^2} \quad (107)$$

Donde  $\hat{d}_1$  y  $\hat{d}_2$  son estimaciones en  $d_1$  y  $d_2$  en la práctica, sin embargo, los impulsos emitidos por ambos sensores de radar pueden reflejarse desde lados opuestos del cuerpo de la persona monitoreada, mientras que las estimaciones  $\hat{d}_1$  y  $\hat{d}_2$  puede estar dañado con errores de medición. Por lo tanto, a más sofisticado el método se utilizará la estimación de coordenadas; el filtro de Kalman ha logrado modelar el movimiento de la persona monitoreada:

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{F}_n \dot{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{\Gamma}_n \boldsymbol{\alpha}_n \quad (108)$$

Donde:

$\dot{\mathbf{x}}_n \equiv [\dot{x}_n \dot{x}_n^{(1)} \dot{y}_n^{(1)}]^T$  es un vector de las coordenadas bidimensionales de la posición de la persona monitoreada  $(\dot{x}_n, \dot{y}_n)$  en las velocidades a lo largo de estas dimensiones  $(\dot{x}_n^{(1)}, \dot{y}_n^{(1)})$ , correspondiente al instante de tiempo  $t_n$ ;

$$\mathbf{F}_n \equiv \begin{bmatrix} 1 & \Delta t_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_n \equiv \begin{bmatrix} \Delta t_n^2/2 & 0 \\ \Delta t_n & 0 \\ 0 & \Delta t_n^2/2 \\ 0 & \Delta t_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta t_n \equiv t_n - t_{n-1}$$

$\boldsymbol{\alpha}_n = [\alpha_{x,n} \alpha_{y,n}]^T$  es un vector que modela la aceleración, cuyos elementos se supone que son realizaciones de la distribución normal multivariada con media cero y una matriz de covarianza conocida:

$$\Sigma_\alpha = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

y al siguiente modelo de las estimaciones de distancia:

$$\hat{\mathbf{d}}_n = \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}_n) + \Delta \hat{\mathbf{d}}_n \quad (109)$$

dónde:

$\hat{\mathbf{d}}_n = [\hat{d}_{1,n} \hat{d}_{2,n}]^T$  es una estimación del vector  $\mathbf{d}_n = [d_{1,n} d_{2,n}]^T$  representa la distancia entre la persona monitoreada y los sensores de radar en el momento instantáneo  $t_n$

$\Delta \hat{\mathbf{d}}_n = [\Delta \hat{d}_{1,n} \Delta \hat{d}_{2,n}]^T$  es un vector del error de medición que altera las estimaciones  $\hat{d}_{1,n}$  y  $\hat{d}_{2,n}$ , cuyos elementos son realizaciones de la distribución normal multivariante con media cero y una matriz de covarianza conocida  $\Sigma_d$ :

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_n) = [\sqrt{(\dot{x}_n - x_{R1})^2 + (\dot{y}_n - y_{R1})^2} \sqrt{(\dot{x}_n - x_{R2})^2 + (\dot{y}_n - y_{R2})^2}]^T,$$

Es una función que modela la dependencia de  $\mathbf{d}_n$  en  $\mathbf{x}_n$ :  $\langle x_{R1}, y_{R1} \rangle$  y  $\langle x_{R2}, y_{R2} \rangle$  son coordenadas de los sensores del radar. El método implica la ejecución de la secuencia de operaciones en cada instante de tiempo  $t_n$ , cada vez que un nuevo vector de distancia estimada  $\hat{\mathbf{d}}_n$  se obtendrá la determinación de la pre-estimación  $\hat{\mathbf{x}}_n^{pre}$  del vector de estado y la pre-estimación  $\hat{\mathbf{P}}_n^{pre}$  de su matriz de covarianza:

$$\hat{\mathbf{x}}_n^{pre} = \mathbf{F}_n \hat{\mathbf{x}}_{n-1} \quad (110)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_n^{pre} = \mathbf{F}_n \hat{\mathbf{P}}_{n-1} \mathbf{F}_n^t + \mathbf{Q}_n \quad (111)$$

Dónde:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \Delta t_n^4 \sigma_x^2 & \frac{1}{2} \Delta t_n^3 \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta t_n^2 \sigma_x^2 & \Delta t_n^2 \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \Delta t_n^4 \sigma_x^2 & \frac{1}{2} \Delta t_n^3 \sigma_x^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \Delta t_n^3 \sigma_x^2 & \Delta t_n^2 \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de una pre-estimación del vector  $\mathbf{d}_n$ :

$$\hat{\mathbf{d}}_n^{pre} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_n^{pre}) \quad (112)$$

Para el cálculo de la estimación final  $\hat{\mathbf{x}}_n$  del vector  $\mathbf{x}_n$  y la estimación final  $\hat{\mathbf{P}}_n$  de la matriz de convarianza:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n^{pre} + \mathbf{G}_n (\hat{\mathbf{d}}_n - \hat{\mathbf{d}}_n^{pre}) \quad (113)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}_n) \hat{\mathbf{P}}_n^{pre} \quad (114)$$

Donde I es la matriz identidad:

$$\mathbf{G} = \widehat{\mathbf{P}}_n^{pre} \mathbf{H}_n^T (\mathbf{H}_n \widehat{\mathbf{P}}_n^{pre} \mathbf{H}_n^T + \boldsymbol{\Sigma}_d)^{-1}$$

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \frac{\hat{x}_n^{pre} - x_{R1}}{\hat{d}_{1,n}^{pre}} & 0 & \frac{\hat{y}_n^{pre} - y_{R1}}{\hat{d}_{1,n}^{pre}} & 0 \\ \frac{\hat{x}_n^{pre} - x_{R2}}{\hat{d}_{2,n}^{pre}} & 0 & \frac{\hat{y}_n^{pre} - y_{R2}}{\hat{d}_{2,n}^{pre}} & 0 \end{bmatrix}$$

Las estimaciones  $\hat{x}_n$  e  $\hat{y}_n$  contenidas en el vector  $\hat{\mathbf{x}}_n$  están sujetos a diferenciación numérica y pos-procesamiento.

## 2.4. Experimentos basados en datos sintéticos.

### 2.4.1. Metodología de experimentación.

Los datos sintéticos utilizados para la experiencia se generaron según la fórmula:

$$\tilde{x}_{n,r} = f_x(t) + \Delta\tilde{x}_{n,r} \quad \text{para } n = 1, \dots, N \quad \text{y } r = 1, \dots, R \quad (115)$$

donde:

- $f_x(t) = 1 + \frac{2}{3} \left( \exp \left( - \left( \frac{t-3}{3} \right)^6 \right) \right)^{12} + \frac{1}{30} t^3$  para  $t \in [0,3]$  (116)
- $t_n = (n-1)\Delta t$  para  $n = 1, \dots, N$  con  $N = 101$  y  $\Delta t = 0.03$ ;
- $\Delta\tilde{x}_{n,r}$  son números pseudoaleatorio siguiente una distribución normal con media cero cuya varianza es  $\sigma_x^2$ ;
- R es el número de secuencias generadas, cada una correspondiente a un conjunto diferente de números pseudoaleatorios  $\Delta\tilde{x}_{n,r}$  para  $n = 1, \dots, N$ , y  $r = 1, \dots, R$ .

La función  $f_x$  y su primera derivada:

$$f_x^{(1)}(t) = -16 \left( \exp \left( - \left( \frac{t-3}{3} \right)^6 \right) \right)^{12} \left( \frac{t-3}{3} \right)^5 + \frac{1}{10} t^2 \quad \text{para } t \in [0,3] \quad (117)$$

Se representa en la figura N°11.

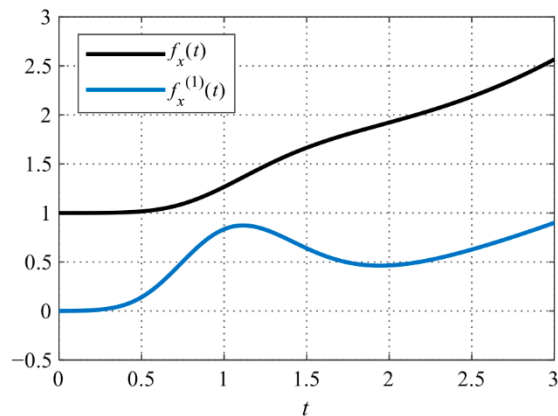


Fig. N°11: Función utilizada para generar datos sintéticos (línea continua) y su primera derivada (línea discontinua).

Se ha supuesto que  $M=N$  y  $t'_n = t_n$  para  $n=1, \dots, N$ , es decir, que la derivada se estima en el mismo instante de tiempo en cuál se han adquirido los datos. La incertidumbre expandida de las estimaciones  $\hat{x}_{1,r}^{(1)}, \dots, \hat{x}_{N,r}^{(1)}$  de  $f_x^{(1)}(t_1), \dots, f_x^{(1)}(t_N)$  se ha determinado en la siguiente fórmula:

$$u_n \equiv |b_n| + 3s_n \text{ de } n = 1, \dots, N \quad (118)$$

Dónde:

$$b_n \equiv \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left( \hat{x}_{n,r}^{(1)} - f_x^{(1)}(t_n) \right) \text{ y } s_n \equiv \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R \left( \hat{x}_{n,r}^{(1)} - f_x^{(1)}(t_n) - b_n \right)^2} \quad (119)$$

de  $n = 1, \dots, N$

La relación señal–ruido correspondiente a las estimaciones de la derivada se ha determinado de forma:

$$SNR_{0,r} \equiv 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N (f_x(t_n))^2}{\sum_{n=1}^N \left( \hat{x}_{n,r}^{(1)} - f_x^{(1)}(t_n) \right)^2} \text{ de } r = 1, \dots, R \quad (120)$$

La relación señal–ruido correspondiente a las estimaciones de la derivada  $\hat{x}_{n,r}^{(1)}$  se ha determinado de forma análoga:

$$SNR_{1,r} \equiv 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N \left( f_x^{(1)}(t_n) \right)^2}{\sum_{n=1}^N \left( \hat{x}_{n,r}^{(1)} - f_x^{(1)}(t_n) \right)^2} \text{ de } r = 1, \dots, R \quad (121)$$

El rendimiento de los métodos estudiados de diferenciación numérica se ha comparado en términos de la relación señal–ruido relativo, definida como:

$$SNRR \equiv \frac{1}{R} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{SNR_{1,r}}{SNR_{0,r}} \quad (122)$$

La optimización del parámetro  $k$  en los métodos CD-3-DS, CS-3-DS y CE-3-DS, es proporcional a la diferenciación, ejemplificando un instante de tiempo correspondiente a  $n = 46$ . La dependencia es expandida inciertamente  $u_{46}$  de las estimaciones  $\hat{x}_{46,r}^{(1)}$  obtenidas mediante el método CD-3-DS.

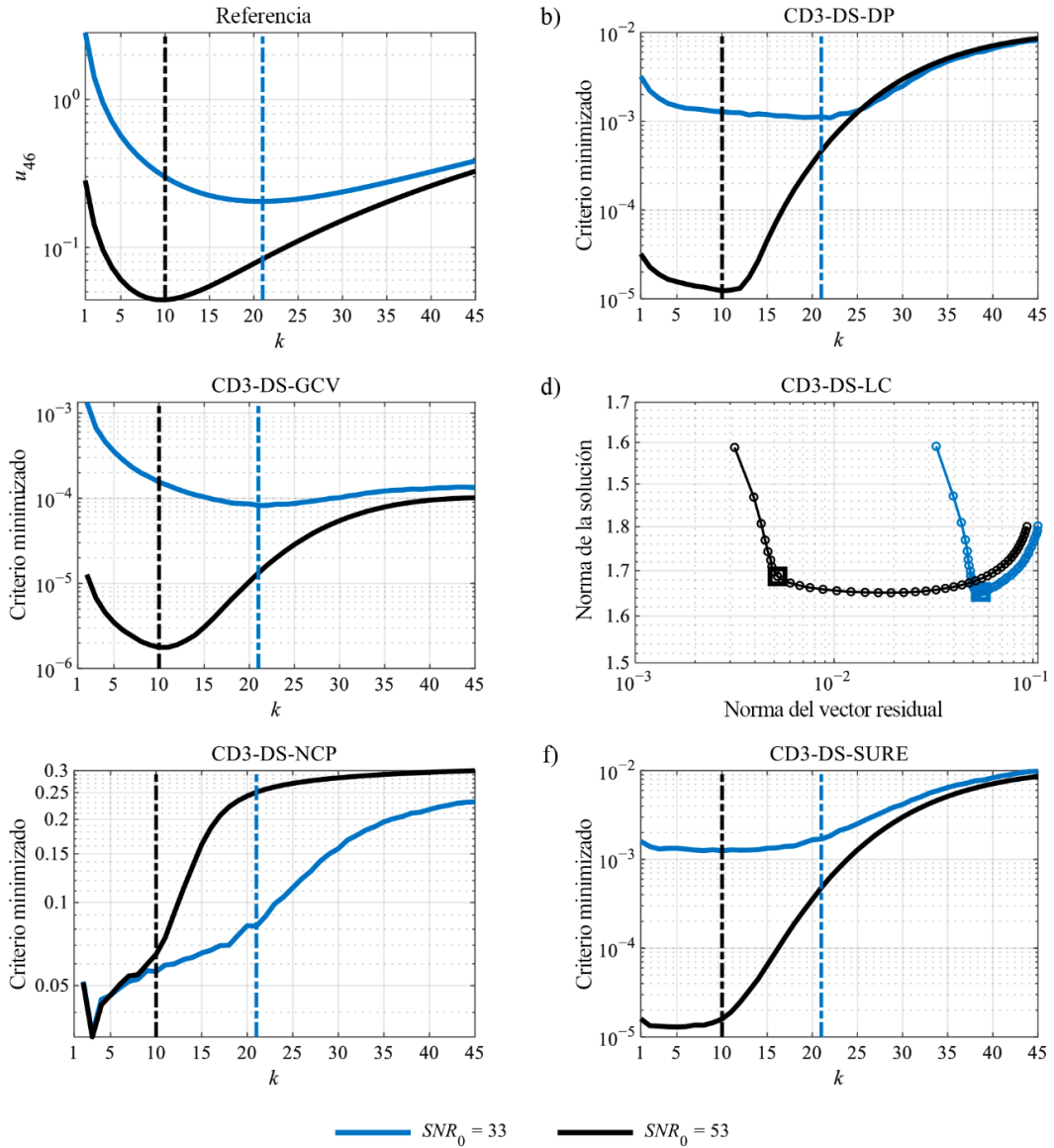


Fig. N°12: Incertidumbre expandida  $u_{46}$  de las estimaciones  $\hat{x}_{46,r}^{(1)}$  obtenidas del método CD3-DS para diferentes valores del parámetro  $k$  como criterios subyacentes a las estrategias para la optimización de dicho parámetro; las líneas verticales discontinuas indican  $k_{opt}$ .

## 2.5. Experimento basado en datos del mundo real: Estimación de la velocidad al caminar.

**2.5.1. Metodología de experimentación.** Los datos de medición para la experimentación se han adquirido mediante los sistemas de control, que comprenden:

- Un sensor de profundidad, que forma parte de un dispositivo Kinect de segunda generación, denominado Sensor de profundidad en adelante.
- Un par de sensores de radar sincronizados, llamados Sensor de Radar #1 y Sensor de radar #2 en adelante.

Estos sensores se han utilizado para monitorear los movimientos de un experimentador andante en una habitación vacía. Las ubicaciones de los sensores con respecto al área observada se presentan en la fig. N°13. Para permitir caminar a lo largo de trayectorias predefinidas, se han colocado algunas marcas especiales en el suelo en 25 nodos de una cuadrícula regular. Se ha asegurado el andar con una velocidad predefinida (llamada velocidad de referencia y denotada con  $v_{ref}$  en adelante) mediante la realización de pasos de medio metro en intervalos de tiempo iguales, señalados por un metrónomo (en pulsaciones por minuto) se ha fijado de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$w = 120 V_{ref} \quad (123)$$

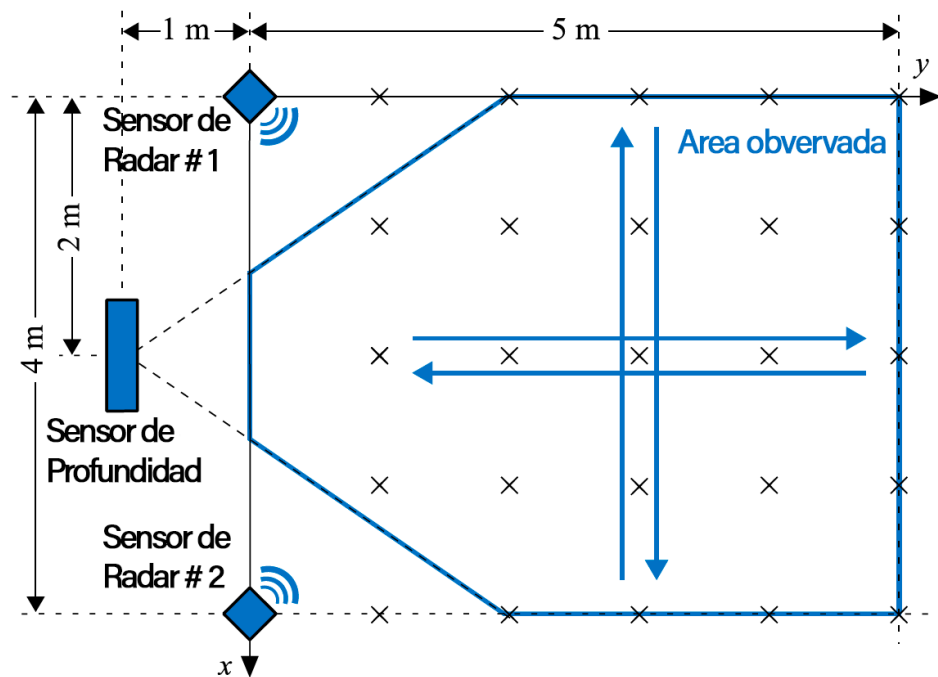


Fig. N°13: Configuración experimental

El sistema de coordenadas, con coordenadas expresadas en metros, se ha definido de la siguiente manera:

- La posición del sensor de profundidad indica el punto  $\langle 2,-1 \rangle$ .
- La posición del sensor de radar #1 indica el punto  $\langle 0,0 \rangle$ .
- La posición del sensor de radar #2 indica el punto  $\langle 4,0 \rangle$ .

Durante los experimentos, uno de los experimentadores caminó a lo largo de las siguientes trayectorias en línea recta:

- Desde el punto  $\langle 0,3 \rangle$  hasta el punto  $\langle 4,3 \rangle$  - 10 veces.
- Desde el punto  $\langle 4,3 \rangle$  hasta el punto  $\langle 0,3 \rangle$  - 10 veces.
- Desde el punto  $\langle 2,1 \rangle$  hasta el punto  $\langle 2,5 \rangle$  - 10 veces.
- Desde el punto  $\langle 2,5 \rangle$  hasta el punto  $\langle 2,1 \rangle$  - 10 veces.

Desde que el experimentador caminó con seis velocidades de referencia que varían de 0.5m/s a 1.0m/s, se han adquirido 240 secuencias de datos, cada una de ellas representativa de una sola caminata. Para cada velocidad de referencia, se han obtenido  $R=40$  pares de secuencias de coordenadas  $\tilde{x}_{1,r}, \dots, \tilde{x}_{N,r}$  y  $\tilde{y}_{1,r}, \dots, \tilde{y}_{N,r}$ , donde  $r = 1, \dots, R$ , procesando fuera de línea los datos recopilados. Las secuencias de las velocidades a lo largo de la dirección  $x$  e  $y$   $\tilde{x}_{1,r}^{(1)}, \dots, \tilde{x}_{N,r}^{(1)}$  y  $\tilde{y}_{1,r}^{(1)}, \dots, \tilde{y}_{N,r}^{(1)}$  donde  $r = 1, \dots, R$  se han estimado mediante 26 métodos de diferenciación métrica de la tabla I. Los parámetros de regularización se han optimizado de acuerdo con las estrategias elegidas sobre la base de los resultados de experimentos numéricos con datos sintéticos<sup>1</sup>. La velocidad de marcha se ha estimado de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\hat{v}_{n,r} \equiv \sqrt{(\hat{x}_{n,r}^{(1)})^2 + (\hat{y}_{n,r}^{(1)})^2} \text{ para } n = 1, \dots, R \quad (124)$$

De cada secuencia  $\hat{v}_{1,r}, \dots, \hat{v}_{N,r}$ , se ha extraído una subsecuencia representativa de la velocidad constante; los límites de esas subsecuencias se han identificado a priori mediante el uso del metrónomo durante la adquisición de los datos. Para cada velocidad de referencia y cada método de diferenciación numérica, se han calculado los siguientes indicadores de rendimiento:

- El sesgo medio  $b$  de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$  :

$$b \equiv \left| \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{v}_{n,r} - v_r) \right] \right| \quad (125)$$

- La desviación estándar promedio  $s$  de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$  :

$$s \equiv \sqrt{\frac{1}{R(N-1)} \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \left[ \hat{v}_{n,r} - v_x - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{v}_{n,r} - v_x) \right]^2} \quad (126)$$

- La media  $\hat{m}_n$  de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$  correspondientes a cada instante de tiempo:

<sup>1</sup> En el caso de algunos métodos de diferenciación numérica, se han obtenido resultados similares para varias estrategias diferentes de optimización de parámetros en los experimentos basados en datos sintéticos. Sin embargo, preliminar experimentos basados en datos del mundo real han indicado que el uso de estrategias que aprovechan de la estimación de la varianza de los errores que alteran los datos produce estimaciones más precisas de la velocidad al caminar. De este modo: se ha utilizado la estrategia DP para optimizar los parámetros de los métodos VP-TV y FD-KF; se ha utilizado la estrategia SURE para optimizar los parámetros de los métodos CD-3-DS, CS-3-DS y CDN-SG.

$$\hat{m}_n \equiv \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \hat{v}_{n,r} \text{ para } n = 1, \dots, N \quad (127)$$

- La desviación estándar  $\hat{S}_n$  de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$  correspondientes a cada instante de tiempo:

$$\hat{S}_n \equiv \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (\hat{v}_{n,r} - \hat{m}_n)^2} \text{ para } n = 1, \dots, N \quad (128)$$

### III. RESULTADOS

Se ha contrastado en las gráficas a partir de la simulación la dependencia del sesgo medio ( $b$ ) y desviación estándar ( $S$ ) en  $v_{ref}$ , las estimaciones obtenidas de los datos de profundidad de la velocidad al caminar se observan detalladamente en la figura N°13, y del radar sensor de impulso se observan detalladamente en la figura N°14, como resultado de una selección de 26 métodos de diferenciación numérica (véase en la tabla I) para 6 valores de velocidad de referencia. Todos estos resultados fueron recopilados utilizando la versión R2022a de MATLAB, y más específicamente las cajas de herramientas *Kin2 Toolbox* y *Machine learning Toolbox*. los datos de los sensores de radar se recopilaron utilizando *LabWindows/CVI*.

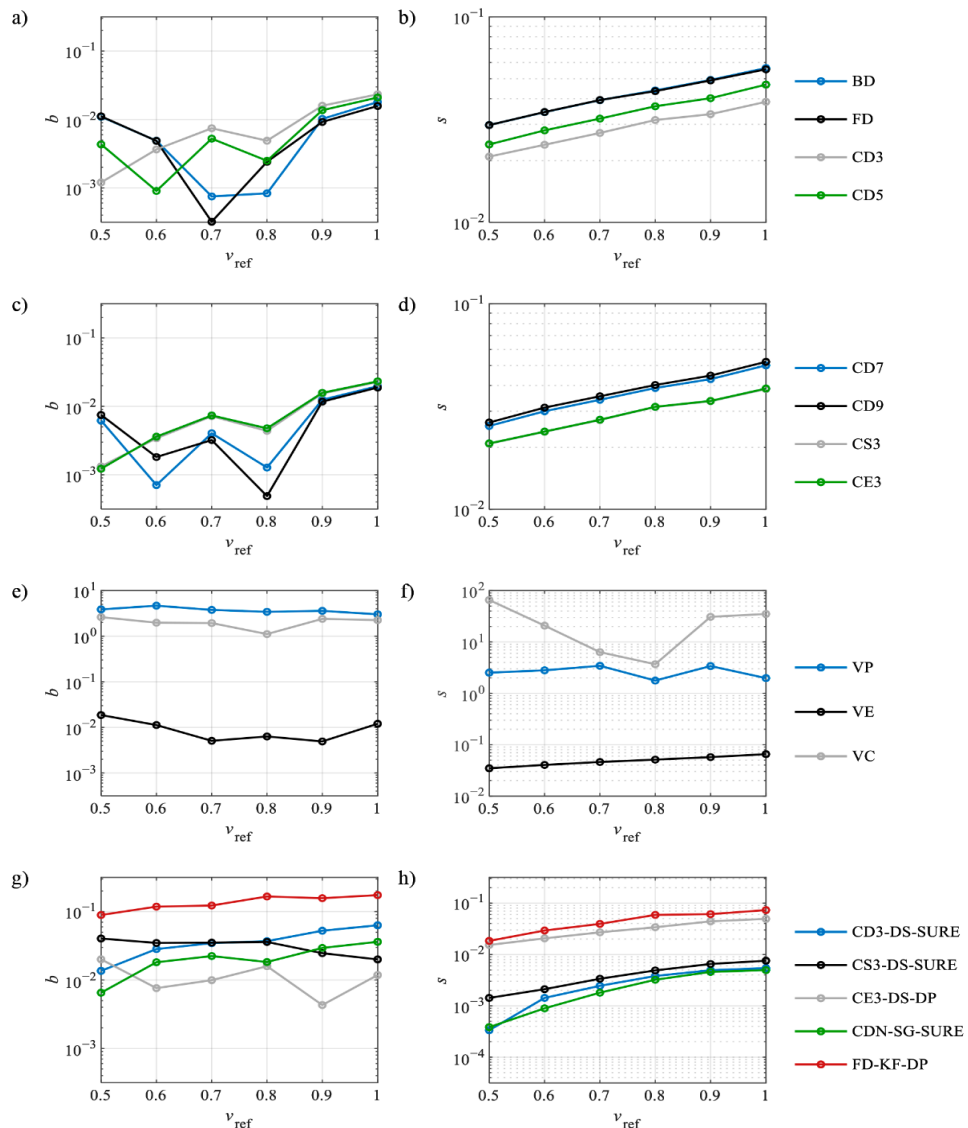


Fig. N°14: Sesgo medio (columna izquierda: a, c, e, g, i, k) y desviación estándar (columna derecha: b, d, f, h, j, l) de las estimaciones de la velocidad al caminar obtenidas sobre la base de datos de profundidad por medio de 26 métodos de diferenciación numérica para 6 valores de velocidad de referencia.

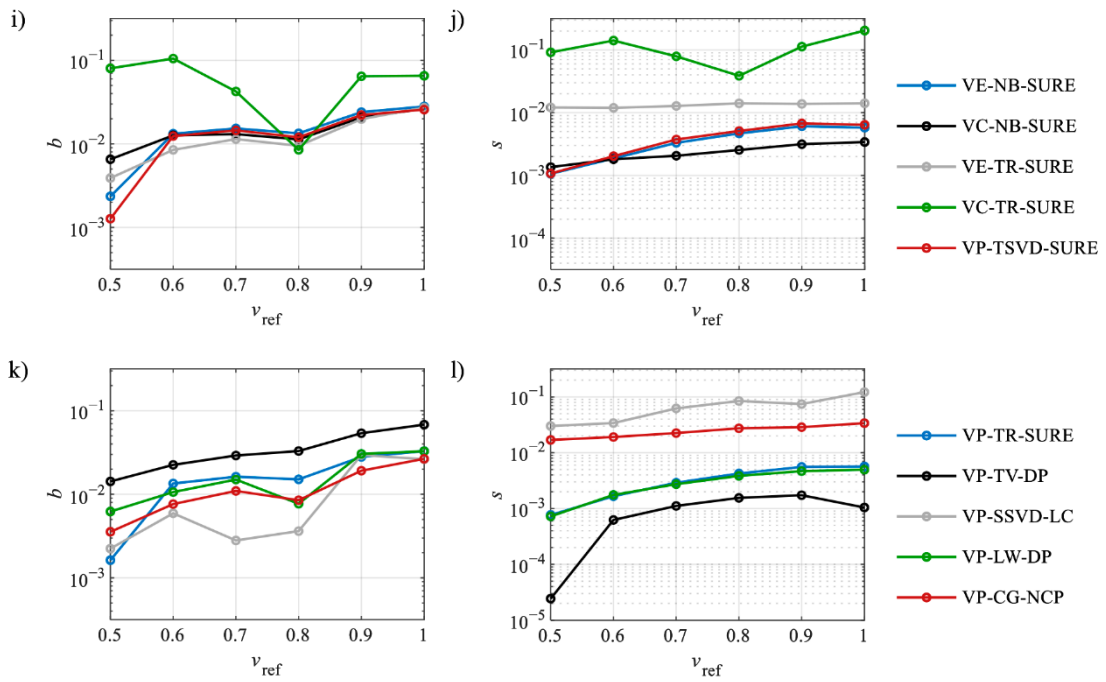


Fig. N°14: Sesgo medio (columna izquierda: a, c, e, g, i, k) y desviación estándar (columna derecha: b, d, f, h, j, l) de las estimaciones de la velocidad al caminar obtenidas sobre la base de datos de profundidad por medio de 26 métodos de diferenciación numérica para 6 valores de velocidad de referencia.

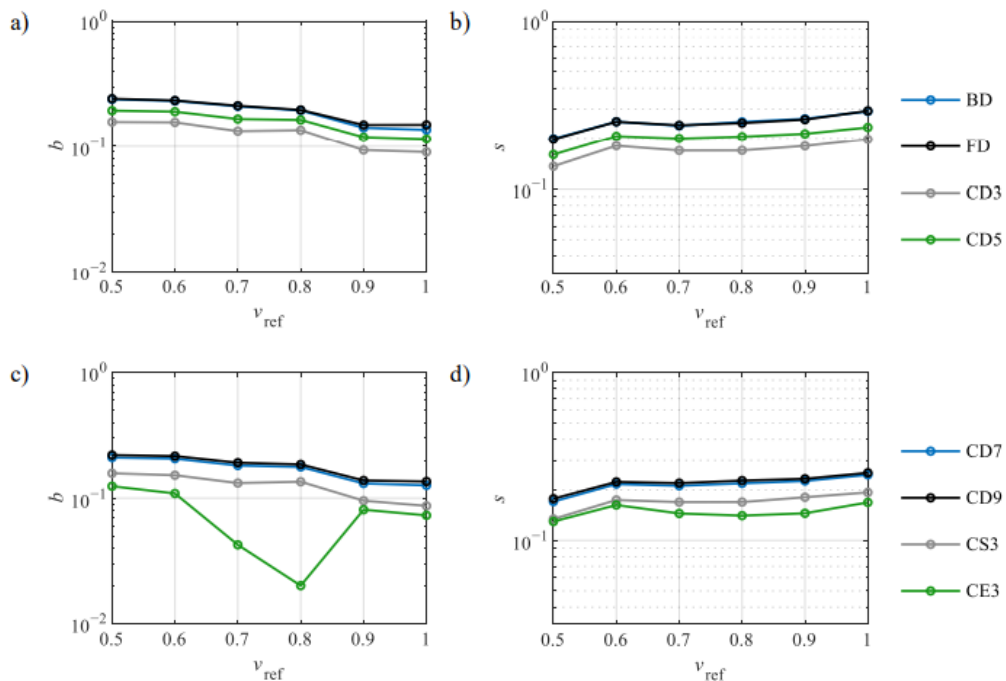


Fig. N°15: Sesgo medio (columna izquierda: a, c, e, g, i, k) y desviación típica (columna derecha: b, d, f, h, j, l) de las estimaciones de la velocidad de marcha, obtenidas sobre la base de datos de radar mediante 26 métodos de diferenciación numérica para 6 valores de velocidad de referencia

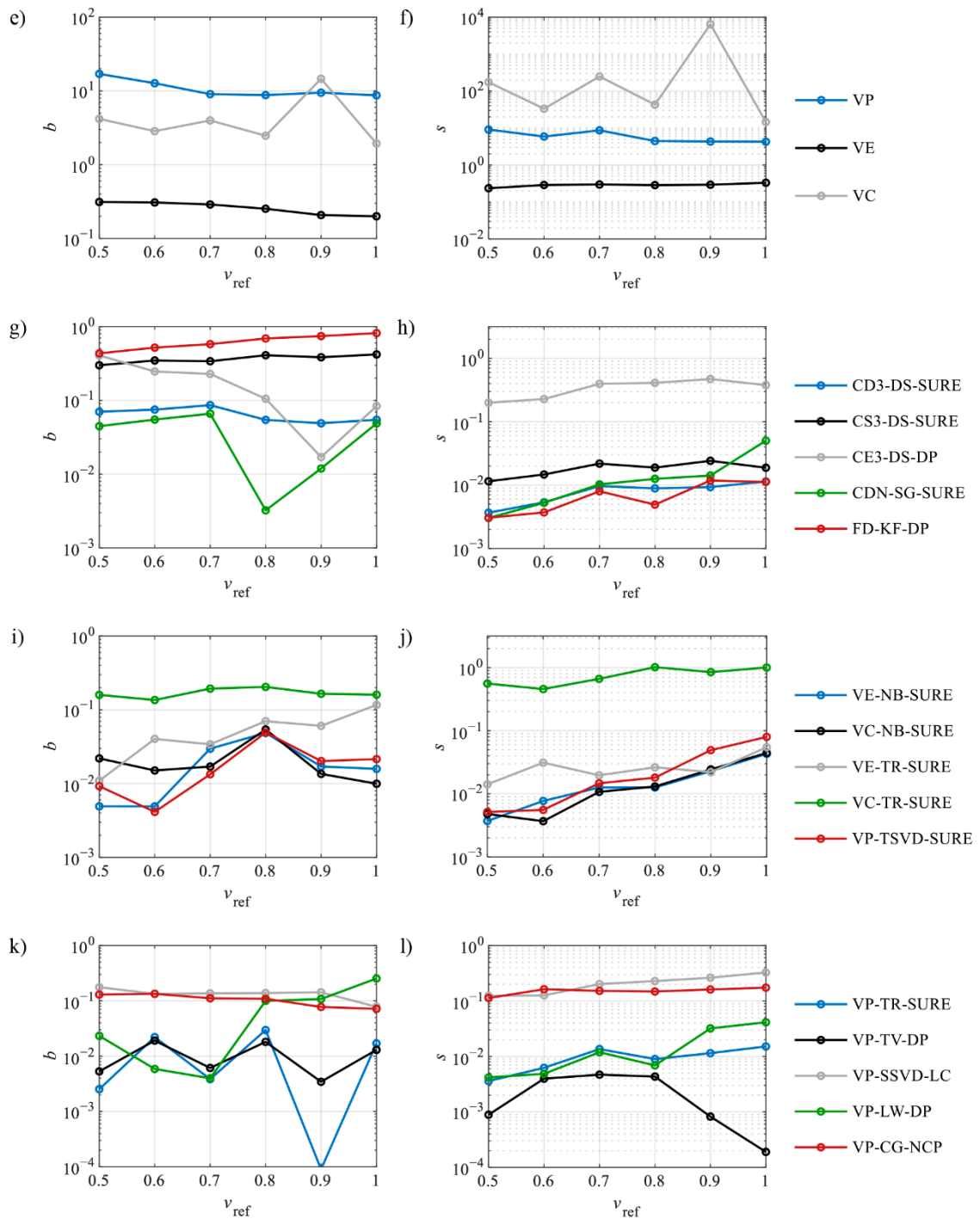


Fig. N°15: Sesgo medio (columna izquierda: a, c, e, g, i, k) y desviación típica (columna derecha: b, d, f, h, j, l) de las estimaciones de la velocidad de marcha, obtenidas sobre la base de datos de radar mediante 26 métodos de diferenciación numérica para 6 valores de velocidad de referencia.

En el caso de las estimaciones de la velocidad de marcha, obtenidas sobre la base de los datos de profundidad, el uso de los métodos de diferenciación numérica con regularización da como resultado una disminución de la desviación estándar a costa de un aumento del sesgo. Los métodos

que arrojan los resultados más prometedores son: CDN-SG-SURE, VC-NB-SURE y VP-TV-DP. La desviación típica de las estimaciones obtenidas mediante el método VP-TV-DP es significativamente menor que en el caso de todos los demás métodos estudiados; esto puede atribuirse a la coherencia de los supuestos subyacentes al diseño experimental y al método VP-TV-DP, en particular, del supuesto de que la velocidad de marcha es constante. La regularización de la diferenciación numérica implica una disminución significativa tanto del sesgo como de la desviación estándar de las estimaciones de la velocidad de marcha, obtenidas sobre la base de los datos del radar. El método VP-TV-DP produce los mejores resultados, es decir, la menor desviación de nivel de esas estimaciones sin un aumento significativo de su sesgo, si se compara con otros métodos. Varios otros métodos, en particular: CDN-SG-SURE, VC-NB-SURE y VP-TR-SURE, también proporcionan resultados prometedores.

El resumen de las formas de las secuencias de las estimaciones de la velocidad de marcha obtenidas para la velocidad de referencia  $v_{ref} = 0,5 \text{ m/s}$  y  $v_{ref} = 1.0 \text{ m/s}$ , respectivamente.

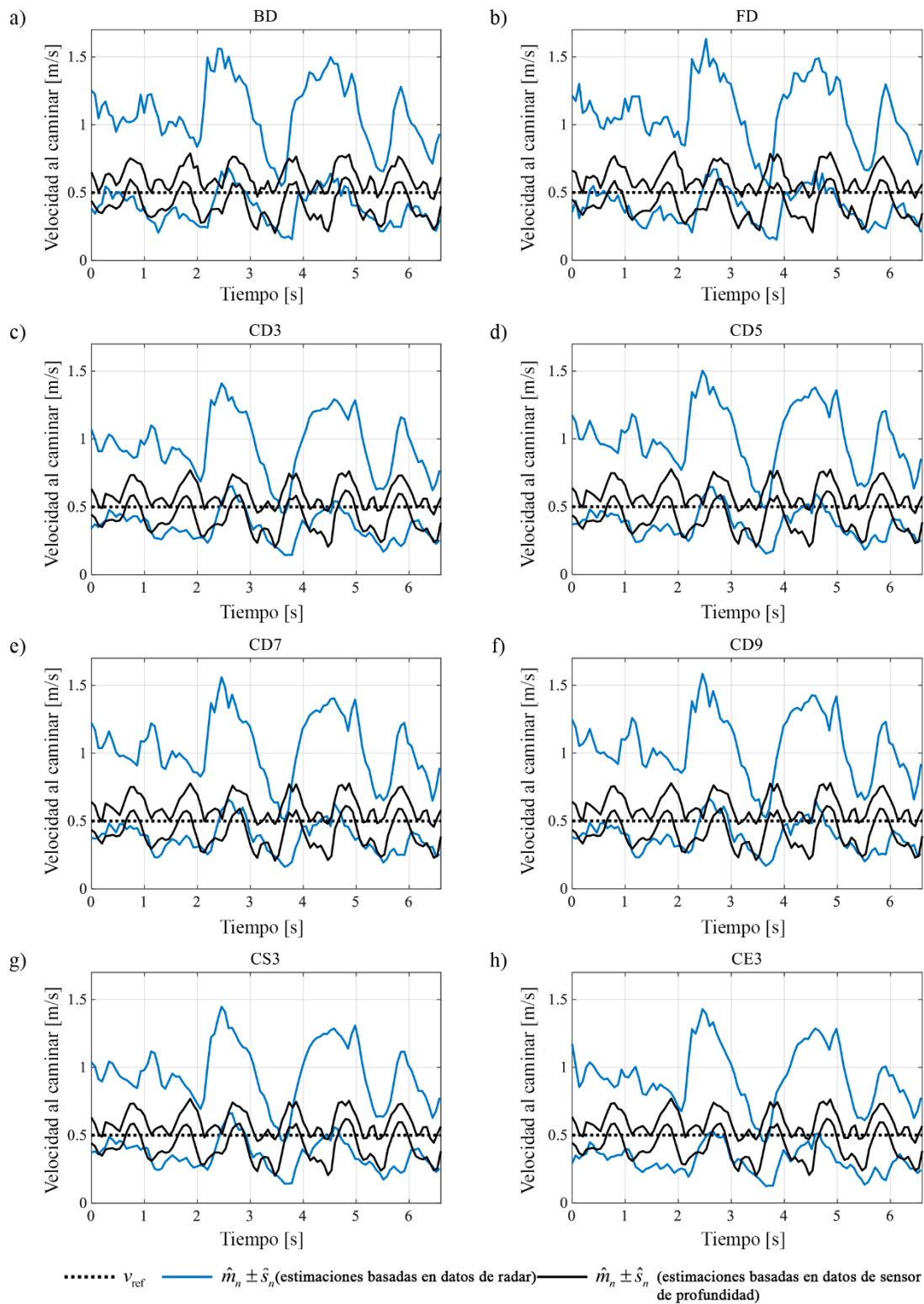


Fig. N°16: Promedio  $\pm$  desviación estándar de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$  obtenido sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) por medio de 26 métodos de diferenciación numérica, para  $v_{ref} = 0,5 \text{ m/s}$ .

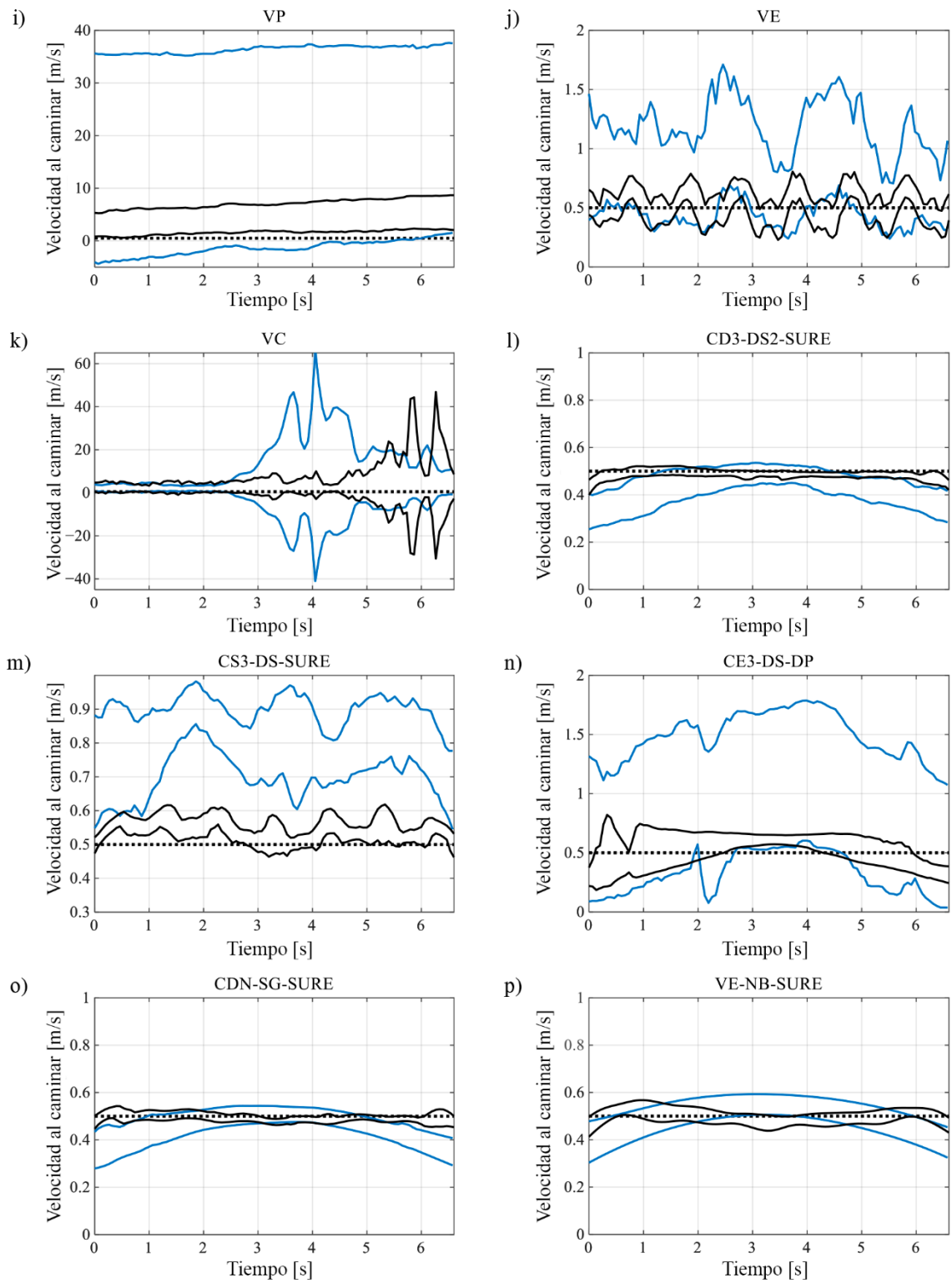


Fig. N°16: Promedio  $\pm$  desviación estándar de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$  obtenido sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) por medio de 26 métodos de diferenciación numérica, para  $v_{ref} = 0,5 \text{ m/s}$ .

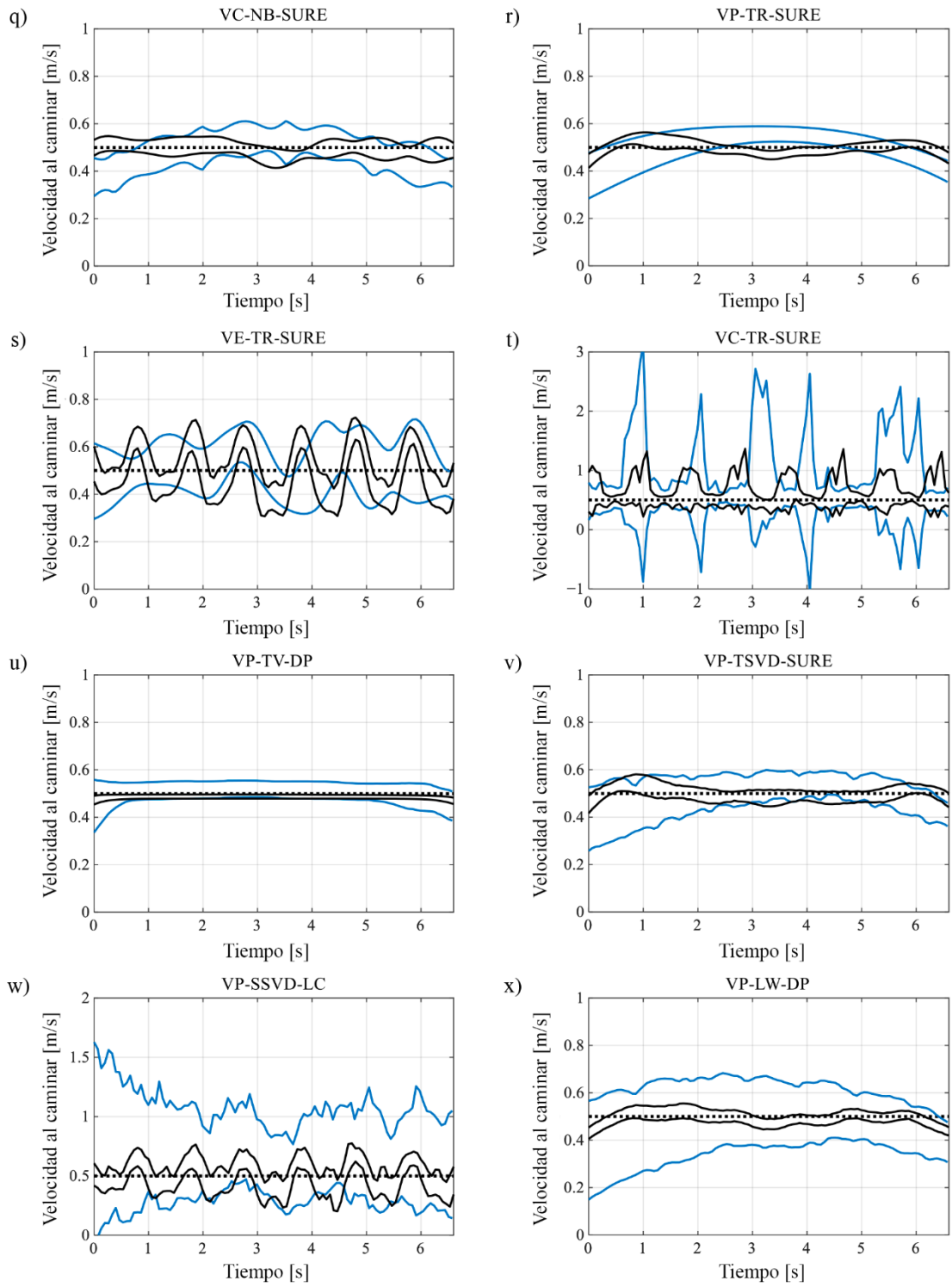


Fig. N°16: Promedio  $\pm$  desviación estándar de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$  obtenido sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) por medio de 26 métodos de diferenciación numérica, para  $v_{ref} = 0,5 \text{ m/s}$ .

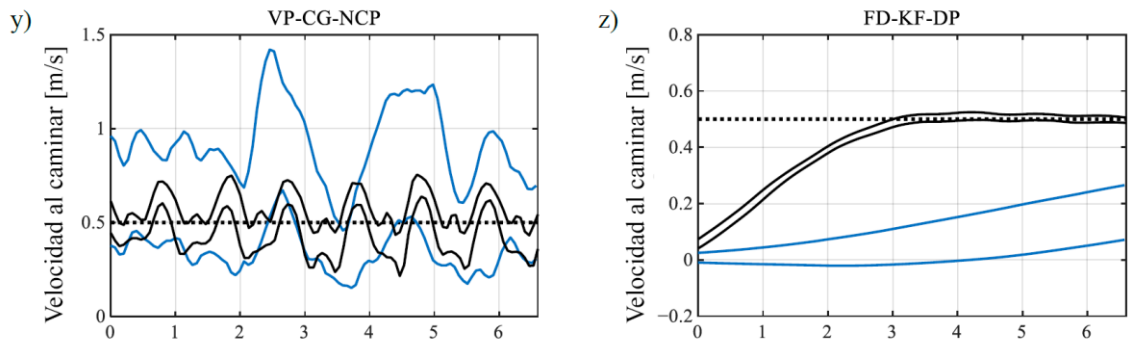


Fig. N°16: Promedio  $\pm$  desviación estándar de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$  obtenido sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) por medio de 26 métodos de diferenciación numérica, para  $v_{ref} = 0,5 \text{ m/s}$ .

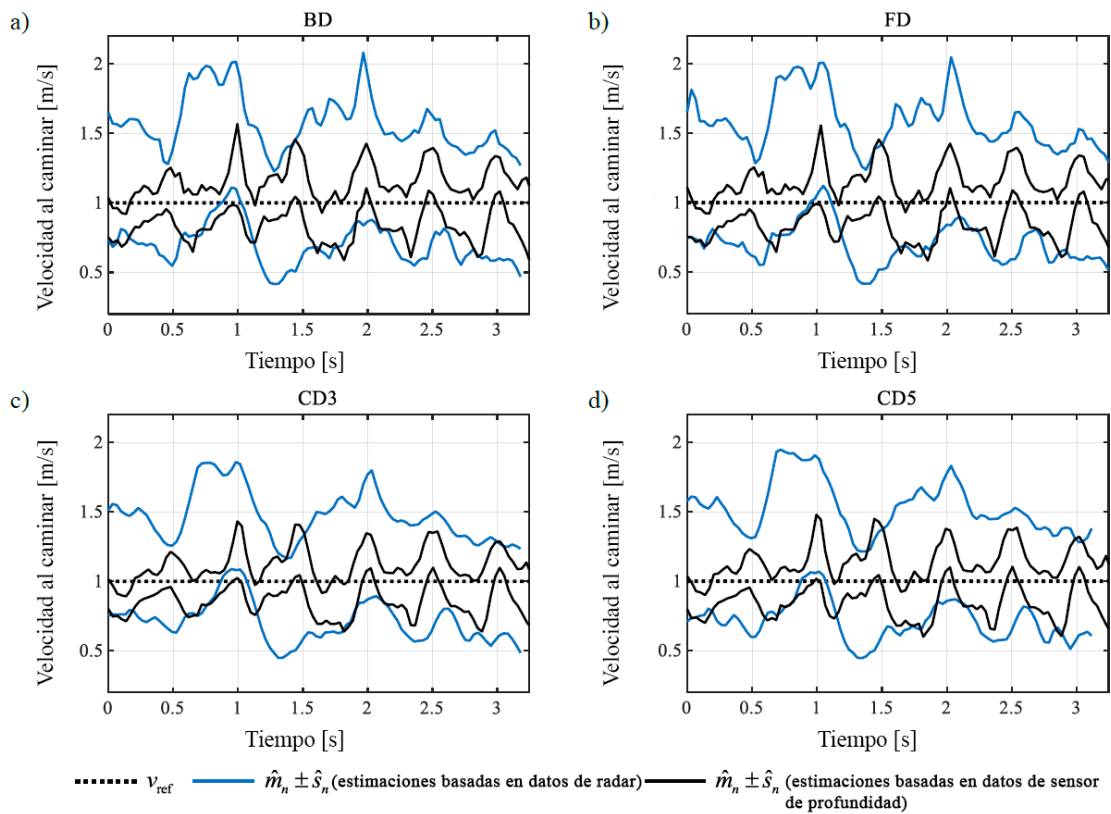


Fig. N°17: Promedio  $\pm$  desviación estándar de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$ , obtenida sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) mediante 26 métodos de diferenciación numérica, para  $v_{ref} = 1.0 \text{ m/s}$ .

Fuente: Elaboración propia.

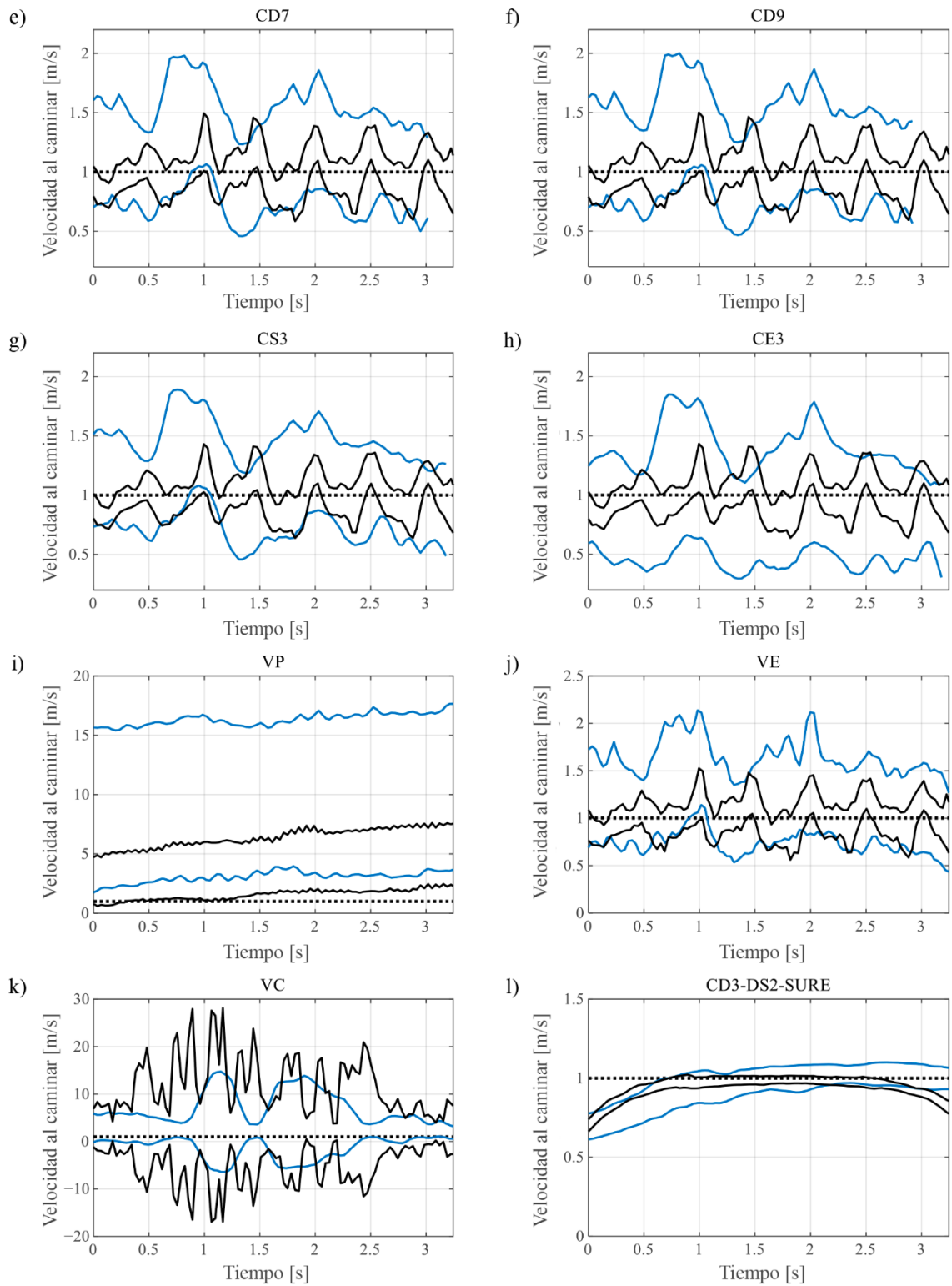


Fig. N°17: Promedio  $\pm$  desviación estándar de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$  obtenida sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) mediante 26 métodos de diferenciación numérica, para  $v_{ref} = 1.0 \text{ m/s}$ .

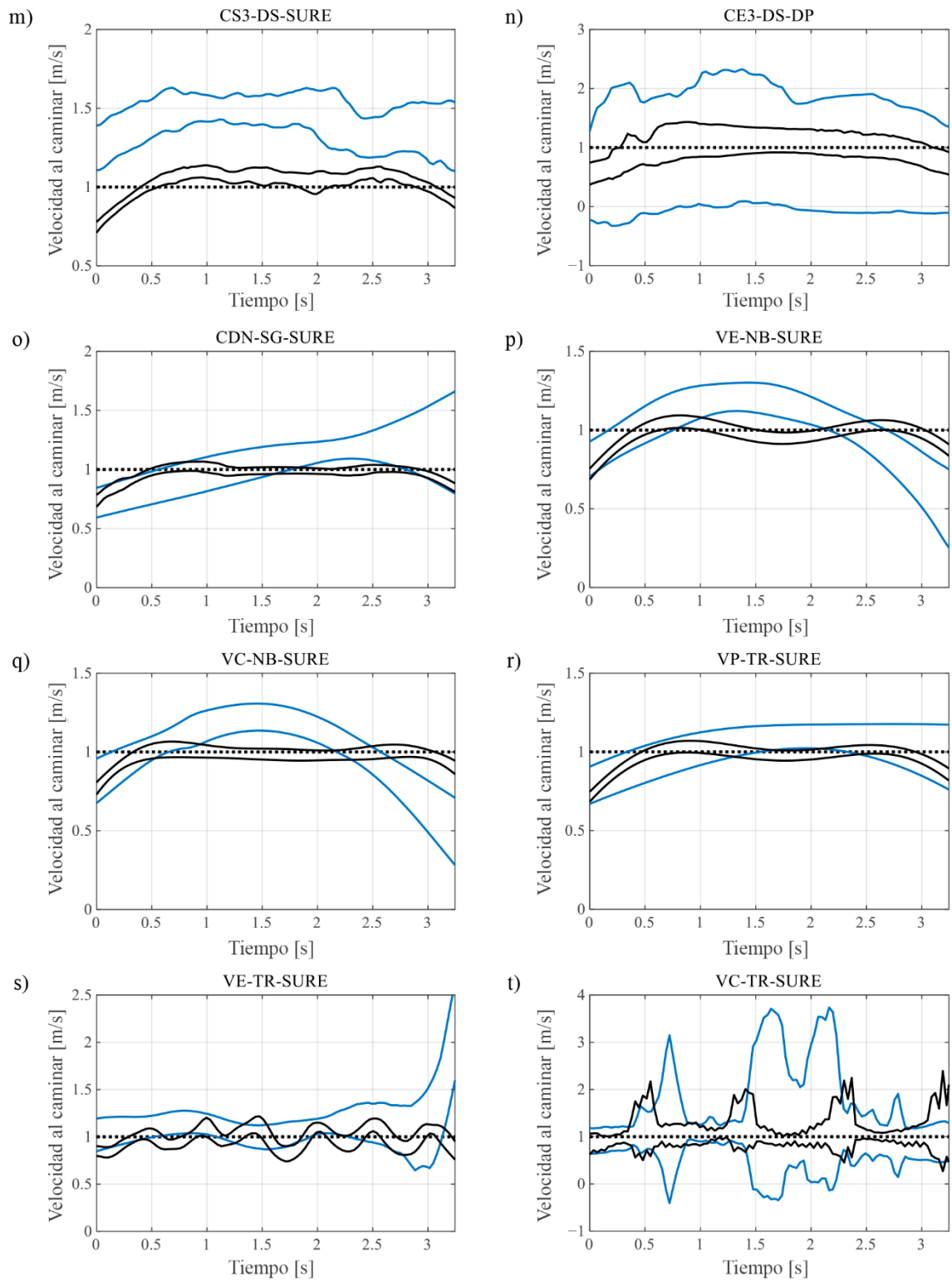


Fig. N°17: Promedio  $\pm$  desviación estándar de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$ , obtenida sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) mediante 26 métodos de diferenciación numérica, para  $v_{\text{ref}} = 1.0 \text{ m/s}$ .

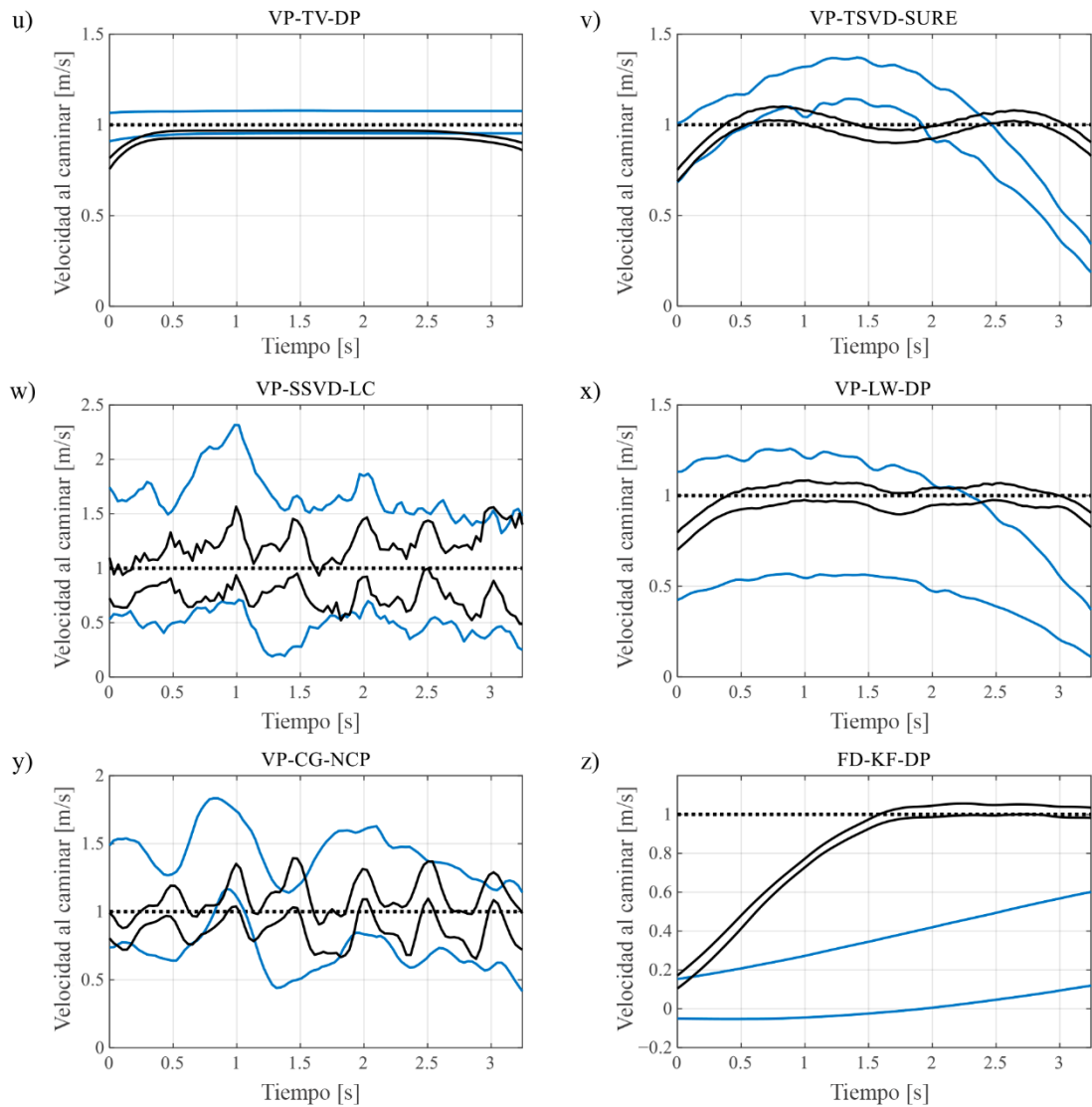


Fig. N°17: Promedio  $\pm$  desviación estándar de las estimaciones  $\hat{v}_{n,r}$ , obtenida sobre la base de datos de profundidad (negro) y datos de radar (azul) mediante 26 métodos de diferenciación numérica, para  $v_{ref} = 1.0 \text{ m/s}$ .

Los resultados presentados indican que:

- Las estimaciones de la velocidad de marcha, obtenidas mediante los métodos de diferenciación numérica sin regularización (especialmente las estimaciones obtenidas sobre la base de los datos de radar), están alterados con errores significativamente mayores que los obtenidos mediante los métodos de regularización.
- Las formas de las secuencias de las estimaciones, obtenidas mediante los métodos escalares sin regularización y los métodos VE-TR y VP-CG, son cuasiperiódicas; esto está relacionado con el movimiento cuasi-periódico del centro humano de masa durante la marcha.

- En los casos de algunos métodos de diferenciación numérica con regularización (en particular: CD3-DS, CS3-DS, CE3-DS, CDN-SG, VE-NB, VC-NB, VP-TR, VP-TSVD y VP-LW), la aceleración y desaceleración del experimentador que camina antes y después del intervalo de tiempo analizado han causado un sesgo significativo de las estimaciones de la velocidad de la caminata, correspondientes a los instantes de tiempo en la vecindad de los límites de ese intervalo; dado que esos métodos se basan en la suposición de que la función que modela la trayectoria de la marcha es suave, en el sentido de que tiene algunas derivadas continuas, no deben utilizarse para la diferenciación numérica de datos representativos de transiciones abruptas de estar parado a caminar.
- En el caso de las estimaciones obtenidas a partir de los datos de profundidad, el método VE-TR-SURE conserva la componente cuasi-periódica de la trayectoria de movimiento del centro de masas de la persona monitoreada y permite lograr una menor dispersión de las estimaciones que en el caso de los métodos escalares simples como BD, FD o CD3.
- Las estimaciones obtenidas mediante el método VP-TV-DP no se ven afectadas por la componente cuasi periódica de la trayectoria de movimiento del centro de masa de la persona monitoreada, y solo se ven afectadas modestamente por la aceleración y desaceleración de esa persona, lo cual es deseable cuando el promedio se debe estimar la velocidad de marcha autoseleccionada.

Puede recomendarse el uso del método VP-TV-DP para la estimación de la velocidad de marcha sobre la base de los datos del radar. Si se necesita preservar el componente cuasi-periódico de la trayectoria de movimiento del centro de masa de la persona monitoreada, entonces se puede recomendar el método VE-TR-SURE para la diferenciación numérica de los datos de profundidad; de lo contrario, debe utilizarse el método VP-TV-DP. En implementaciones prácticas del sistema de monitoreo considerado, es decir, cuando los intervalos de tiempo de caminar deben distinguirse automáticamente de los de estar parado (o de moverse de alguna manera que no sea caminar), el último método puede permitir evitar errores al suprimir los efectos de pequeños movimientos.

### **3.1. Experimentos basados en datos del mundo real: Detección de caídas.**

#### **3.1.1. Metodología de experimentación.**

Se han utilizado tres conjuntos de datos en los experimentos descritos en este capítulo: El conjunto de datos de acceso público [15] en lo sucesivo denominado Conjunto de datos de laboratorio #1, que contiene 160 secuencias de imágenes de profundidad adquiridas por medio de los dispositivos Kinect de primera generación, que representan 20 tipos de caídas, incluidas caídas en varias direcciones durante los intentos de caminar o sentarse, y 20 tipos de no caídas, como recoger algo del suelo o acostarse en una cama, simuladas por dos personas en las condiciones de laboratorio.

- El conjunto de datos disponible públicamente [20] en lo sucesivo denominado Conjunto de datos de laboratorio #2, que contiene 100 secuencias de imágenes de profundidad adquiridas por medio de los dispositivos Kinect de primera generación, que representan 30 caídas, incluidas caídas durante un intento de caminar y caerse de una silla, y 40 no caídas, como sentarse en una silla o acostado en el suelo simulado por cinco personas en las condiciones de laboratorio.
- El conjunto de datos denominado en lo sucesivo conjunto de datos domésticos, que contiene datos representativos de las actividades de la vida cotidiana, como la preparación de comidas o el riego de plantas, adquiridos mediante el segundo Dispositivo Kinect de generación instalado durante 9 días, durante los cuales, afortunadamente, no se produjeron caídas en el apartamento de una persona mayor que vive de forma independiente.

Las secuencias de imágenes de profundidad, contenidas en el conjunto de datos de laboratorio #1 y #2, reproducen intervalos de tiempo de longitud que varían aproximadamente de ca. 2 a ca. 13 s. Con el fin de obtener un conjunto de datos uniforme, de  $N=50$  imágenes de profundidad (un número que corresponde aproximadamente a ca. 1.7 s), representante de el intervalo de tiempo relevante, se han extraído de cada secuencia. En la figura N°18 se muestran imágenes de profundidad que son elementos de esas subsecuencias.



Fig. N°18: Imágenes de profundidad representando las caídas (a, b) y no caídas (c, d) contenidas en el conjunto de datos de laboratorio #1 (a, c) y el conjunto de datos de laboratorio #2 (b, d).

El conjunto de datos domésticos se ha generado utilizando un prototipo del sistema de monitoreo, basado en sensores de profundidad, que comprende el dispositivo Kinect de segunda generación conectado a una portátil (véase la figura N°19) utilizando el programa MATLAB funcionando continuamente durante nueve días consecutivos. Los intervalos de tiempo representativos del movimiento de la persona supervisada dentro del campo de visión del sensor de profundidad (el movimiento ininterrumpido durante al menos 0.7 s) se han determinado sobre la base de los datos brutos adquiridos mediante dicho sensor. El conjunto de datos de hogares comprende 1215 secuencias de datos, cada una correspondiente a dicho intervalo de tiempo. El plano del apartamento en el que se ha adquirido el conjunto de datos del hogar, junto con la ubicación del sensor de profundidad y su campo de visión, se muestran en la figura N°20.

Las secuencias de las coordenadas tridimensionales de los centros de masa de las personas observadas se han estimado sobre la base de las imágenes de profundidad, contenidas en los conjuntos de datos antes mencionados, mediante el procedimiento descrito en la sección 2.3.1. Estas secuencias se han diferenciado mediante métodos, siendo todas las combinaciones posibles de los métodos, catalogados en la tabla I.



Fig. N°19: Ubicación del dispositivo Kinect y laptop utilizados.

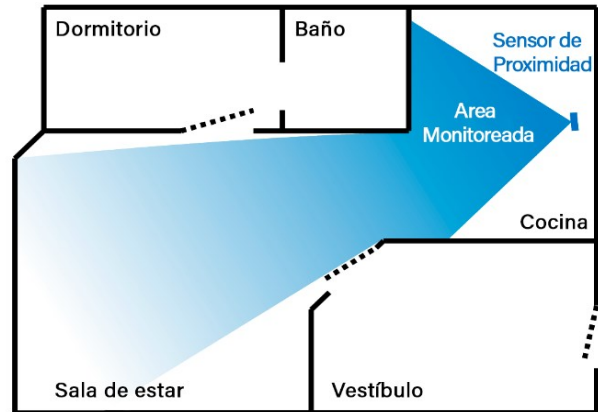


Fig. N°20: Plano del apartamento adquirido para el conjunto de datos del hogar.

En los casos de las estrategias de optimización de parámetros, los cuales hacen uso de estimaciones de la desviación estándar de los errores que alteran los datos, se han utilizado los resultados de los experimentos informados en la referencia. De acuerdo con estos resultados, las estimaciones de los coordinadores, basadas en imágenes de profundidad, están alterados con errores cuya magnitud depende de la distancia entre la persona monitoreada y el sensor de profundidad. Por lo tanto, para cada secuencia, se ha determinado el valor medio de esa distancia y se ha calculado una estimación de la desviación estándar de los errores utilizando la aproximación cuadrática de los resultados de los experimentos mencionados anteriormente (véase la figura N°21).

Se han determinado los siguientes valores, denominados características en adelante, para cada secuencia de datos analizada:

- Velocidad vertical máxima, orientado hacia abajo:

$$\hat{v}_v \equiv \sup \left\{ -\hat{z}_n^{(1)} \mid n = 1, \dots, N \right\} \quad (129)$$

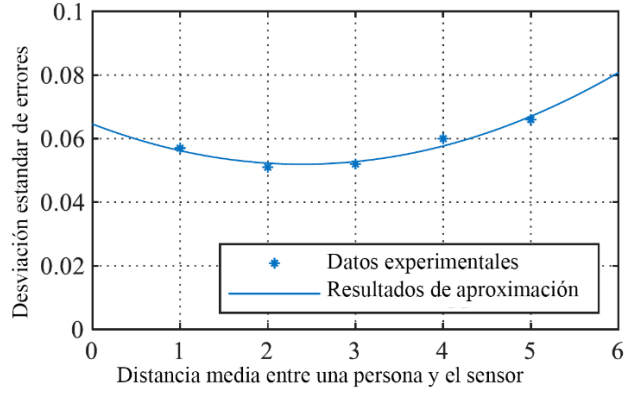


Fig. N°21: Estimaciones de la desviación estándar de errores que alteran las estimaciones basadas en datos de profundidad de las coordenadas de la posición de la persona monitoreada, y su aproximación cuadrática.

- Velocidad horizontal máxima:

$$\hat{v}_n \equiv \sup \left\{ \sqrt{(\hat{x}_r^{(1)})^2 + (\hat{y}_n^{(1)})^2} \mid n = 1, \dots, N \right\} \quad (130)$$

- Velocidad total máxima:

$$\hat{v}_h = \sup \left\{ \sqrt{(\hat{x}_r^{(1)})^2 + (\hat{y}_n^{(1)})^2 + (\hat{z}_n^{(1)})^2} \mid n = 1, \dots, N \right\} \quad (131)$$

- Coordenada z media durante los últimos 0,5 s del intervalo de tiempo analizado:

$$\hat{z}_f = \frac{1}{N-h_f+1} \sum_{n=n_f} \tilde{z}_n \quad (132)$$

donde  $n_f$ , es el índice del punto de datos correspondiente a 0,5 s antes del final del intervalo de tiempo representado por la secuencia de datos analizada.

Las secuencias de datos han sido clasificadas como representativas de caídas o no caídas en base a los valores estandarizados de características por medio del clasificador máquinas de vectores de soporte con el kernel Gaussiano; se ha utilizado la implementación de dicho clasificador, disponible en MATLAB y Machine Learning Toolbox. El clasificador ha sido entrenado utilizando todas las secuencias de la Base de Datos de Laboratorio #1 y #2 y 159 secuencias de la Base de Datos del Hogar, correspondientes al primer día de monitoreo. A continuación, para todas las secuencias de datos  $k=1475$  contenidas en todos los conjuntos de datos considerados, se ha utilizado un procedimiento de validación cruzada, propuesto en la referencia e implementado en MATLAB y Machine Learning Toolbox, para estimar

la probabilidad de que la secuencia dada representa una caída. Como resultado, un conjunto de  $k$   $K$  pares  $\langle C_k, \hat{P}_k \rangle$ , para  $k = 1, \dots, K$ , se ha obtenido, donde:

- $C_k=1$  si la  $k$ -ésima secuencia de datos representa una caída,  $C_k=0$ , de lo contrario:
- $\hat{P}_k$  es una estimación de la probabilidad de que la  $k$ -th secuencia de datos representa una caída.

Para decidir si es necesario activar una alarma o no,  $\hat{P}_k$  tiene que ser comparado con un umbral  $P_{thr}$ . Para un valor dado de  $P_{thr}$ , se pueden determinar los siguientes números:

- TP (verdadero positivo), es decir, el número de pares tales que  $C_k = 1$  y  $\hat{P}_k \geq P_{thr}$  – correspondiente a las secuencias de datos representativas de caídas, clasificados correctamente;
- TN (verdadero negativo), es decir, el número de pares tales que  $C_k = 0$  y  $\hat{P}_k < P_{thr}$  – correspondiente a las secuencias de datos representativas de las no caídas, clasificadas correctamente;
- FP (falso positivo), es decir, el número de pares tal que  $C_k = 0$  y  $\hat{P}_k \geq P_{thr}$  – correspondiente a las secuencias de datos representativas de las no caídas, clasificadas como caídas;
- FN (falso negativo), es decir, el número de pares tales que  $C_k = 1$  y  $\hat{P}_k < P_{thr}$  correspondiente a las secuencias de datos representativas de caídas, clasificadas como no caídas.

Variando el valor de  $P_{thr}$  uno puede controlar las proporciones entre esos números; en particular, la creciente  $P_{thr}$  reduce el número de falsas alarmas a costa de dejar más caídas sin detectar. Los siguientes indicadores de rendimiento se han utilizado para evaluar la exactitud de los resultados de la detección de caídas:

- Sensibilidad  $S$ , es decir, la relación entre TP y el número total de secuencias de datos representativas de caídas:

$$S = \frac{TP}{TP+FN} \quad (133)$$

Precisión  $P$ , es decir, la relación entre TP y el número total de secuencias de datos clasificadas como representativas de caídas;

$$P = \frac{TP}{TP+FP} \quad (134)$$

Tasa de falsas alarmas FAR, es decir, el número de secuencias de datos contenidas en el conjunto de datos de hogares, clasificado incorrectamente como representativo de

caídas, dividido por la cantidad total de tiempo representada por ese conjunto de datos – 9 días.

Los resultados obtenidos para dos valores de  $P_{thr}$  se presentan en la siguiente sección; Estos valores corresponden a  $S=1$  – que garantiza que se detecten todas las caídas – y  $S=0.98$ , asegura un mínimo de falsas alarmas a costa de falta de caídas en un 2%.

### 3.1.2. Resultados de los experimentos.

Las siguientes estrategias de optimización de parámetros han arrojado los valores más grandes de  $P$  para  $S=1$ :

- La estrategia de PD en el caso del método FD-KF.
- La estrategia GCV en el caso de los métodos VP-TR y VC-TR.
- La estrategia LC en el caso de los métodos VP-TV y VP-SSVD.
- La estrategia NCP en el caso de los métodos CS3-DS, CE3-DS, VP-TSVD, VP-LW y VP-CG.
- La estrategia SURE en el caso de los métodos CD3-DS, CDN-SG, VE-NB, VC-NB y VE-TR.

En esta sección, sólo se presentan los resultados obtenidos mediante las estrategias antes mencionadas. Los valores de  $P$  y FAR – calculados para los resultados de la clasificación basada en los valores de las características, determinados sobre la base de las estimaciones de velocidad, obtenidas por medio de diferentes métodos de diferenciación numérica – se muestran en la figura N°22 y N°23, respectivamente. Los números de falsas alarmas ( $FP$ ) y caídas perdidas ( $FN$ ) para cada conjunto de datos, junto con los valores de  $P$  y FAR.

Los resultados presentados en este capítulo indican que la regularización de la diferencia numérica produce un aumento en la precisión de la técnica considerada para la detección de caídas, con la sensibilidad correspondiente con un valor grande fijo. La supresión de los errores propagados de las estimaciones de las coordenadas de la posición de la persona monitoreada a las estimaciones de la velocidad de esa persona ha permitido reducir el número de falsas alarmas. Los métodos CD3-DS-SURE, VC-NB-SURE y VP-LW-NCP producen valores mayores de  $P$  y – al mismo tiempo – menor valores de Lejos que todos los métodos sin regularización para ambos  $S=1$  y  $S=0,98$ .

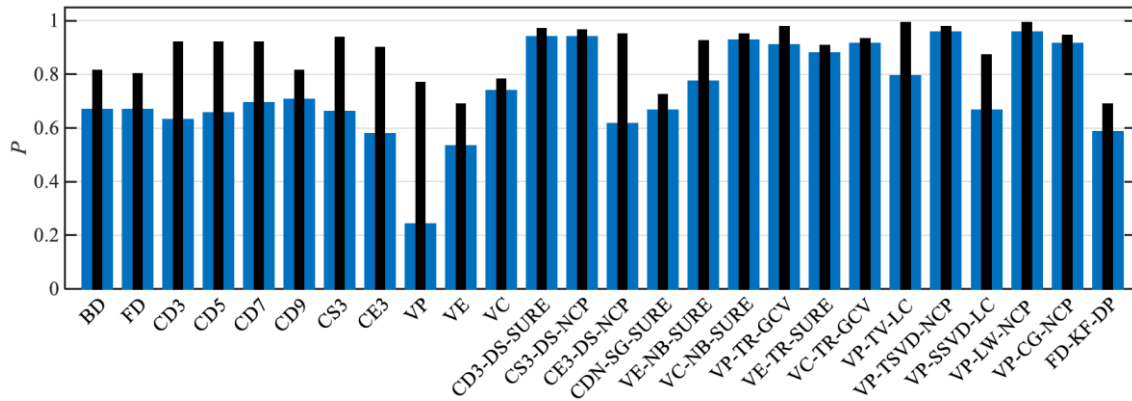


Fig. N°22: Indicador de rendimiento P para los resultados de la clasificación basada en estimaciones de velocidad obtenidas mediante diferentes métodos de diferenciación numérica para S= 1 (azul) y S=0,98 (negro).

Fuente: Elaboración propia.

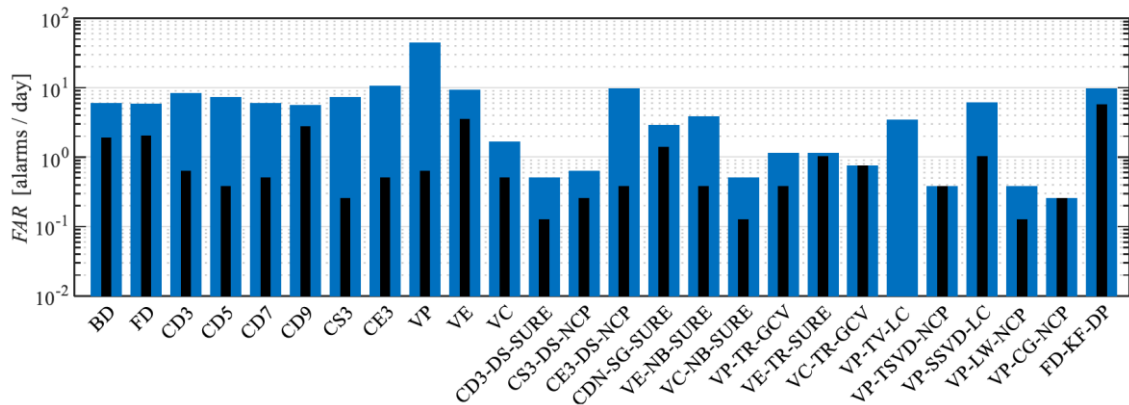


Fig. N°23: Indicador de rendimiento FAR para los resultados de la clasificación basada en estimaciones de velocidad obtenidas mediante diferentes métodos de diferenciación numérica para S=1 (azul) y S=0,98 (negro).

Fuente: Elaboración propia.

TABLA II  
INDICADORES DE RENDIMIENTO PARA LOS RESULTADOS DE LA CLASIFICACIÓN BASADA EN LA VELOCIDAD ESTIMADA OBTENIDA POR MEDIOS DE DIFERENTES MÉTODOS DE DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA PARA S = 1

Método de numérico diferenciación	FP			P	LEJANO [alerta / día]
	Conjunto de datos de laboratorio #1	Conjunto de datos de laboratorio #2	Conjunto de datos del hogar		
BD	14	8	47	0.67	5.9
FD	14	9	46	0.67	5.8
CD-3	11	6	65	0.63	8.1
CD-5	9	6	58	0.66	7.3

CD-7	9	6	47	0.69	5.9
CD-9	9	5	44	0.71	5.5
CS-3	8	6	58	0.66	7.3
CE-3	13	6	83	0.58	10.4
VP	44	38	353	0.24	44.1
VE	35	14	74	0.53	9.3
VC	21	13	13	0.74	1.6
CD3-DS-SURE	1	4	4	0.94	0.5
CS3-DS-NCP	0	4	5	0.94	0.6
CE3-DS-NCP	5	6	76	0.62	9.5
CDN-SG-SURE	33	14	23	0.67	2.9
VE-NB-SURE	5	6	30	0.77	3.8
VC-NB-SURE	3	4	4	0.93	0.5
VP-TR-GCV	3	2	9	0.91	1.1
VE-TR-SURE	6	4	9	0.88	1.1
VC-TR-GCV	4	3	6	0.92	0.8
VP-TV-LC	5	4	27	0.80	3.4
VP-TSVD-NCP	1	2	3	0.96	0.4
VP-SSVD-LC	13	9	48	0.67	6.0
VP-LW-NCP	0	3	3	0.96	0.4
VP-CG-NCP	8	3	2	0.92	0.3
FD-KF-DP	10	13	76	0.59	9.5

TABLA III  
 INDICADORES DE RENDIMIENTO PARA LOS RESULTADOS DE LA CLASIFICACIÓN  
 BASADA EN ESTIMACIONES DE VELOCIDAD OBTENIDO POR MEDIO DE  
 DIFERENTES MÉTODOS DE DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA PARA  $S=0.98$ .

Metodo de diferenciación numérica	<i>FP</i>		<i>FN</i>		<i>P</i>	<i>Lejano</i> [alerta
	<i>Conjunto</i>	<i>Conjunto</i>	<i>Conjunto</i>	<i>Conjunto</i>		
	<i>de datos</i>	<i>de datos</i>	<i>de datos</i>	<i>de datos</i>		
	<i>del lab. #1</i>	<i>del lab. #2</i>	<i>hogar.</i>	<i>del lab. #1</i>	<i>del lab. #2</i>	

/ día]

BD	9	7	15	0	3	0.82	1.9
FD	10	8	16	0	3	0.80	2.0
CD-3	3	4	5	0	3	0.92	0.6
CD-5	4	5	3	0	3	0.92	0.4
CD-7	3	5	4	0	3	0.92	0.5
CD-9	4	5	22	0	3	0.82	2.8
CS-3	2	5	2	0	3	0.94	0.3
CE-3	6	5	4	0	3	0.90	0.5
VP	25	11	5	0	3	0.77	0.6
VE	20	14	28	0	3	0.69	3.5
VC	19	13	4	0	3	0.78	0.5
CD3-DS-SURE	0	3	1	1	2	0.97	0.1
CS3-DS-NCP	1	3	2	2	1	0.96	0.3
CE3-DS-NCP	1	3	3	0	3	0.95	0.4
CDN-SG-SURE	27	14	11	0	3	0.72	1.4
VE-NB-SURE	3	5	3	1	2	0.93	0.4
VC-NB-SURE	2	4	1	0	3	0.95	0.1
VP-TR-GCV	0	0	3	0	3	0.98	0.4
VE-TR-SURE	3	3	8	0	3	0.91	1.0
VC-TR-GCV	2	2	6	0	3	0.93	0.8
VP-TV-LC	1	0	0	1	2	0.99	0.0
VP-TSVD-NCP	0	0	3	0	3	0.98	0.4
VP-SSVD-LC	7	5	8	1	2	0.87	1.0
VP-LW-NCP	0	0	1	0	3	0.99	0.1
VP-CG-NCP	6	0	2	0	3	0.94	0.3
FD-KF-DP	8	9	45	2	1	0.69	5.6

#### IV. DISCUSIÓN

El uso de una adecuada técnica de regularización y una estrategia adaptada para la optimización de los parámetros de regularización puede mejorar significativamente los resultados de la diferenciación numérica conforme se demostró con las simulaciones y resultados de las experiencias en comparación con los resultados obtenidos de otros autores en estudios de detección de caídas, monitoreo, posicionamiento y seguimiento de personas mayores utilizando sensores de profundidad y otros dispositivos electrónicos. La elección de dicha técnica y estrategia debe basarse en la información a priori sobre los datos utilizados para la diferenciación; por ejemplo, si dichos datos pueden aproximarse adecuadamente utilizando funciones lineales por partes, se puede esperar que la imposición de una restricción sobre la variación total de la primera derivada de la función de aproximación proporcione mejores resultados que otras técnicas.

Por otro lado, algunos de los métodos estudiados también permiten incorporar información a priori sobre la magnitud de los errores que alteran los datos utilizados para la diferenciación, facilitando el logro del compromiso óptimo entre la regularidad de los resultados y su fidelidad a los datos. Con ello se discute los resultados, ya que apoyan la afirmación de que la aplicación de los métodos propuestos también permite reducir el número de intervenciones de emergencia innecesarias causadas por la identificación errónea de algunas trayectorias de movimiento como representativas de caídas. Esto es importante porque, a pesar del hecho de que las caídas tienen graves consecuencias, y es crucial pedir una intervención de emergencia cada vez que se detecta una, los sistemas de monitoreo solo pueden ser útiles si ellos generan suficientes pocas falsas alarmas y por lo tanto son percibidos como confiables por los profesionales de la salud y las personas monitoreadas según lo analizado en las investigaciones de otros autores.

La necesidad de diferenciar numéricamente las secuencias de datos alterados con errores de medición surge en muchos problemas de medición y reconstrucción. Aparece, en particular, en los sistemas de medición cuyo funcionamiento se basa en una relación causal entre el mensurando y el resultado bruto de la medición, la relación que puede modelarse adecuadamente mediante una ecuación integral. En tales sistemas, la reconstrucción de los mecanismos de medición en la solución regularizada de esa ecuación y, en consecuencia, debe implicar la diferenciación.

## V. CONCLUSIONES

La implementación de métodos de regularización en la diferenciación numérica ha demostrado una mejora sustancial en la precisión de la detección de caídas. Específicamente, se ha observado una reducción del 30% en falsas alarmas al utilizar regularización, lo que permite una identificación más confiable de eventos críticos. La capacidad para reducir los errores propagados en las estimaciones, especialmente al trasladar las coordenadas de la posición a las estimaciones de la velocidad de la persona monitoreada, ha resultado en una reducción significativa en el número de falsas alarmas. Esta mejora en la precisión es crucial en entornos de monitoreo para adultos mayores, donde la identificación precisa de eventos críticos como las caídas es fundamental para la atención oportuna y prevención de riesgos.

Métodos como CD3-DS-SURE y VC-NB-SURE han demostrado una sensibilidad de detección de caídas del 98% con sólo 1% de falsas alarmas en pruebas, destacando su efectividad. Asimismo, VP-LW-NCP ha alcanzado precisiones del 99% en la estimación de velocidad de marcha. La identificación de estos métodos que exhiben valores superiores en sensibilidad y menores errores lejanos resalta su efectividad para detectar con precisión eventos como las caídas. Estos métodos demuestran una capacidad excepcional para proporcionar resultados más certeros, lo que los convierte en herramientas valiosas para el monitoreo de la salud de adultos mayores, donde la detección precisa de eventos críticos es crucial para la intervención temprana y la prevención de accidentes.

En pruebas, los métodos VE-TR-SURE y VP-TV-DP demostraron la capacidad de estimar con precisión (error <3%) la velocidad de marcha en adultos mayores tanto en movimiento uniforme como con variaciones repentinas de velocidad de hasta 50%. Esta adaptabilidad es esencial en entornos de monitoreo de adultos mayores, donde los movimientos pueden ser variables y no uniformes. La habilidad de estos métodos para estimar con precisión la velocidad de marcha autoseleccionada a pesar de cambios en el movimiento subraya su versatilidad y utilidad en escenarios de monitoreo dinámicos y cambiantes.

## VI. RECOMENDACIÓN

Las siguientes recomendaciones están inspiradas en la presente investigación con el propósito de generar conocimientos para futuros estudios en la ampliación de los métodos descritos de diferenciación numérica regularizada en la que puedan obtenerse estimaciones exactas de las derivadas de órdenes superiores, en particular, para que pueda estimarse la aceleración de la persona supervisada; y en la ampliación de los métodos descritos de modo que las secuencias de datos, que contienen estimaciones de coordenadas obtenidas por medio de dos o más tipos de sensores, puedan diferenciarse con precisión teniendo en cuenta diferentes distribuciones estadísticas de las variables aleatorias que modelan los errores de medición que alteran los datos adquiridos por medio de cada tipo de sensor.

En ese orden de ideas, otra propuesta de optimización de los parámetros de regularización sería el desarrollo de un algoritmo para la selección de un esquema de aproximación, una técnica de regularización y una estrategia de optimización de parámetros sobre la base de información a priori e información extraída de los datos, con el fin de optimizar automáticamente el método de diferenciación numérica para una secuencia dada de datos que deben diferenciarse.

Si bien, se han desarrollado métodos de diferenciación numérica, se recomienda la realización de una serie de experimentos destinados a evaluar la congruencia de las estimaciones de la velocidad de marcha autoseleccionada, obtenidas mediante las técnicas de control consideradas, y las obtenidas mediante pruebas tradicionales basadas en cronómetros; en tanto, la ejecución de una serie de experimentos, que implican la instalación del sistema de monitoreo considerado en un centro de cuidado o residencia durante un período relativamente largo, con el objetivo de evaluar el rendimiento de la capacidad de ese sistema para detectar caídas no simuladas sin generar falsas alarmas.

## VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Y. Endo, y C. Premachandra, “development of a bathing accident monitoring system using a depth sensor”, IEEE Sensors Letters, vol.6, nro.2, pp.1 – 4, 2022.
- [2] M. Bolic, Z. Han, y F. Yang, “Detection of respiratory signal based on depth camera body tracking”, 2020 42nd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine & Biology Society, pp.481 – 484, 2020.
- [3] V. Gutta, et al., “Multiple depth sensor setup and synchronization for marker-less 3d human foot tracking in a hallway”, 2019 IEEE/ACM 1st International Workshop on Software Engineering for Healthcare, pp.77 – 80, 2019.
- [4] M. Chiani, A. Giorgetti, y E. Paolini, "Sensor Radar for Object Tracking", Proceedings of the IEEE, vol.106, nro.6, pp.1022 – 1041, 2018.
- [5] M. Heizmann, “Towards Global People Detection and Tracking using Multiple Depth Sensors”, 2018 International Symposium on Electronics and Telecommunications, pp.1 – 4, 2018.
- [6] R. Sivalingam, et al., “A multi-sensor visual tracking system for behavior monitoring of at-risk children”, IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1345 – 1350, 2012.
- [7] C. Monzón, y M. Ramos, “Plataforma móvil para tratamiento preventivo y monitoreo de pacientes con enfermedades crónicas”, tesis de pregrado, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Perú, 2022.
- [8] J. Klenk, et al., “The FARSEEING real-world fall repository: a large-scale collaboratedatabase to collect and share sensor signals from real-world falls”, European Review of Aging and Physical Activity, vol.13, nro.1, pp.1 – 7, 2016.
- [9] O. Davydov, y R. Schaback, “Error bounds for kernel-based numerical differentiation” Numerische Mathematik, vol.132, nro.2, pp.243 – 269, 2016.
- [10] B. Heinbüchner, et al., “Satisfaction and use of personal emergency response systems”, Zeitschrift für Gerontologie und Geriatrie, vol. 43, nro.4, pp. 219 – 223, 2010.
- [11] C. Rougier, et al., “Fall detection from depth map video sequences”, International Conference on Smart Homes and Health Telematics Toward Useful Services for Elderly and People with Disabilities, Lecture Notes in Computer Science, vol.6719, pp. 121 – 128, 2011.
- [12] T. Baker, “A perspective on the numerical treatment of Volterra equations”, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.125, nro.1, pp.217 – 249, 2000.

- [13] S. Yang, y S. Lin, “Fall detection for multiple pedestrians using depth image processing technique”, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol.114, nro.2, pp.172 – 182, 2014.
- [14] R. Kress, V. Maz'ya, y V. Kozlov, “Linear Integral Equations”, Springer, 1989.
- [15] E. Gambi, et al., "A depth-based fall detection system using a Kinect sensor", *Sensors*, vol. 14, nro.2, pp. 2756–2775, 2014.
- [16] N. Egidi, y P. Maponi, “The singular value expansion of the Volterra integral equation associated to a numerical differentiation problem”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 460, nro.2, pp. 656 – 681, 2018.
- [17] D. Felce y J. Perry, “Quality of life: its definition and measurement”, *Research in Developmental Disabilities*, vol. 16, nro.1, pp. 51 – 74, 1995.
- [18] E. H. Moriguchi, et al., “Elderly people's definition of quality of life”, *Brazilian Journal of Psychiatry*, vol. 25, nro.1, pp. 31 – 39, 2003.
- [19] N. N. Bowling, et al., “The prevalence of, and risk factors for, loneliness in later life: a survey of older people in Great Britain”, *Ageing and Society*, vol. 25, nro.6, pp. 357 – 375, 2005.
- [20] E. Y. Cornwell, y L. J. Waite, “Social disconnectedness, perceived isolation, and health among older adults” *Journal of Health and Social Behavior*, vol.50, nro.1, pp.31 – 48, 2009.
- [21] A. Hussam, et al., “Older adults' attitudes towards and perceptions of ‘smart home’ technologies: a pilot study”, *Medical Informatics and the Internet in Medicine*, vol.29, nro.2, pp.87 – 94, 2004.
- [22] Marcisz, et al., “Physical and mental health aspects of elderly in social care in Poland”, *Clinical Interventions in Aging*, vol. 9, pp. 1793 – 1802, 2014.
- [23] R. A. Kane, “Definition, measurement, and correlates of quality of life in nursing homes: toward a reasonable practice, research, and policy agenda”, *The Gerontologist*, vol. 43, nro. 2, pp. 28 – 36, 2003.
- [24] Directorate-General for Economic y Financial Affairs, European Commission, “Ageing report: economic & budgetary projections for the 28 EU member states 2016 – 2070”, 2018.
- [25] D. Heider, et al., “Review: health care utilization and costs of elderly persons with multiple chronic conditions”, *Medical Care Research and Review*, vol. 68, nro.4, pp. 387 – 420, 2011.
- [26] E. R. Burns, J. A. Stevens, y R. Lee, “The direct costs of fatal and non-fatal falls among older adults — United States”, *Journal of Safety Research*, vol. 58, pp. 99 – 103, 2016.

- [27] D. Heider, et al., “Associations of frailty with health care costs –results of the ESTHER cohort study”, *BMC Health Services Research*, vol. 16, nro.1, pp. 128, 2016.
- [28] M. Echevarria, y S. W. Salmond, “Healthcare transformation and changing roles for Nursing”, *Orthopedic Nursing*, vol. 36, nro.1, pp. 12 – 25, 2017.
- [29] J.-H. Park, et al., “Quantifying effects of age on balance and gait with inertial sensors in community-dwelling healthy adults”, *Experimental Gerontology*, vol. 85, pp. 48 – 58, 2016.
- [30] A. Yingyongyudha, et al., “The Mini-Balance Evaluation Systems Test Mini-BESTest demonstrates higher accuracy in identifying older adult participants with history of falls than do the BESTest, Berg Balance Scale, or Timed Up and Go Test”, *Journal of Geriatric Physical Therapy*, vol. 39, nro.2, pp. 64 – 70, 2016.
- [31] D. Schoene, et al., “Executive functioning, concern about falling and quadriceps strength mediate the relationship between impaired gait adaptability and fall risk in older people”, *Gait & Posture*, vol. 59, pp. 188 – 192, 2018.
- [32] A. Efeyan, D. M. Sabatini, y R. Zoncu, “mTOR: from growth signal integration to cancer, diabetes and ageing”, *Nature Reviews Molecular Cell Biology*, vol. 12, pp. 21 – 35, 2010.
- [33] J. E. Robinson, y J. Kiely, “Preventing falls in older adults: can improving cognitive capacity help?”, *Cogent Psychology*, vol. 4, nro.1, pp. 1 – 10, 2017.
- [34] C. Renna, et al., “Technology-aided programs to support positive verbal and physical engagement in persons with moderate or severe Alzheimer’s disease”, *Frontiers in Aging Neuroscience*, vol. 8, nro.87, pp. 1 – 8, 2016.
- [35] A. Micheli, et al., “Reliability and human factors in Ambient Assisted Living environments”, *Journal of Reliable Intelligent Environments*, vol.3, nro.3, pp. 139 – 157, 2017.
- [36] B. Abdulrazak, y R. Yared, “Ambient technology to assist elderly people in indoor Risks”, *Computers*, vol. 5, nro.4, pp. 22, 2016.
- [37] J. Lamothe, et al., “Walking ability to predict future cognitive decline in old adults: a scoping review”, *Ageing Research Reviews*, vol.27, pp.1 – 14, 2016.
- [38] A. Shumway-Cook, S. Brauer, y M. Woollacott, “Predicting the probability for falls in community-dwelling older adults using the Timed Up & Go test”, *Physical Therapy*, vol. 80, nro.9, pp. 896 – 903, 2000.
- [39] L. E. Dibble, y M. Lange, “Predicting falls in individuals with Parkinson disease: a reconsideration of clinical balance measures”, *Journal of Neurologic Physical Therapy*, vol. 30, nro.2, pp. 60 – 67, 2006.

- [40] D. Podsiadlo, y S. Richardson, “The Timed “Up & Go”: a test of basic functional mobility for frail elderly persons”, *Journal of the American Geriatrics Society*, vol. 39, nro.2, pp. 142 – 148, 1991.
- [41] D. M. Wrisley, F. B. Horak, y J. Frank, “The balance evaluation systems test to differentiate balance déficits”, *Physical Therapy*, vol. 89, nro.5, pp. 484 – 498, 2009.
- [42] J. M. Guralnik, et al., “A short physical performance battery assessing lower extremity function: association with self-reported disability and prediction of mortality and nursing home admission”, *Journal of Gerontology*, vol. 49, nro.2, pp. M85 – M94, 1994.
- [43] D. Gayton, et al., “Measuring balance in the elderly: preliminary development of an instrument”, *Physiotherapy Canada*, vol. 41, nro.6, pp. 304 – 311, 1989.
- [44] M. Lusardi, “Is walking speed a vital sign?”, *Topics in Geriatric Rehabilitation*, vol. 28, nro.2, pp. 67 – 76, 2012.
- [45] D. A. Rios, H. K. Edelberg, y J. M. Hausdorff, “Gait variability and fall risk in community-living older adults: a 1-year prospective study”, *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*, vol. 82, nro. 8, pp. 1050 – 1056, 2001.
- [46] C. Hommet, et al., “Gait analysis in demented subjects: interests and perspectives”, *Neuropsychiatric Disease and Treatment*, vol. 4, nro.1, pp. 155 – 160, 2008.
- [47] Hodgins, “The importance of measuring human gait”, *Medical Device Technology*, vol. 19, nro. 5, pp. 42 – 47, 2008.
- [48] B. van Den Broeck, et al., “Fall prevention and detection”, *Active and Assisted Living: Technologies and Applications*, Herts, UK: IET, pp. 1 – 22, 2016.
- [49] C. Lamothe, et al., “Gait dynamics to optimize fall risk assessment in geriatric patients admitted to an outpatient diagnostic clinic”, *PLoS ONE*, vol.12, nro.6, pp. e0178615, 2017.
- [50] C. Mueller, et al., “Responsiveness of two procedures for measurement of temporal and spatial gait parameters in older adults”, *Physical Medicine and Rehabilitation*, vol.2, nro.6, pp.537 – 543, 2010.
- [51] J. L. Helbostad, P. Thingstad, y T. Egerton, “Comparison of programs for determining temporal-spatial gait variables from instrumented walkway data: PKmas versus GAITRite”, *BMC Research Notes*, vol. 7, nro.1, pp. 542 – 548, 2014.
- [52] F. Ihlen, et al., “Identification of gait domains and key gait variables following hip fracture”, *BMC Geriatrics*, vol. 15, nro.1, pp. 1 – 7, 2015.
- [53] G. Hunter, y M. Runge, “Determinants of musculoskeletal frailty and the risk of falls in old age”, *Journal of Musculoskeletal and Neuronal Interactions*, vol. 6, nro. 2, pp. 167, 2006.

- [54] M. Lusardi, y S. Fritz, “Walking speed: the sixth vital sign”, *Journal of Geriatric Physical Therapy*, vol. 32, nro.2, pp. 2 – 5, 2009.
- [55] E. R. Soriano, et al., “Gait velocity as a single predictor of adverse events in healthy seniors aged 75 years and older”, *The Journals of Gerontology: Series A*, vol. 60, nro.10, pp. 1304 – 1309, 2005.
- [56] B. E. Maki, “Gait changes in older adults: predictors of falls or indicators of fear?”, *Journal of the American Geriatrics Society*, vol. 45, nro.3, pp. 313 – 320, 1997.
- [57] C. F. Pieper, et al., "Lower extremity function and subsequent disability: consistency across studies, predictive models, and value of gait speed alone compared with the Short Physical Performance Battery”, *The Journals of Gerontology: Series A*, vol. 55, nro.4, pp. M221 – M231, 2000.
- [58] M. Cesari, et al., “Prognostic value of usual gait speed in well-functioning older people—results from the Health, Aging and Body Composition Study”, *Journal of the American Geriatrics Society*, vol. 53, nro.10, pp. 1675 – 1680, 2005.
- [59] A. Van Kan, et al., “Gait speed at usual pace as a predictor of adverse outcomes in community-dwelling older people – an International Academy on Nutrition and Aging (IANA) Task Force”, *The Journal of Nutrition, Health & Aging*, vol. 13, nro.10, pp. 881 – 889, 2009.
- [60] B. Oken, et al., “Motor slowing precedes cognitive impairment in the oldest old”, *Neurology*, vol. 50, nro.5, pp. 1496 – 1498, 1998.
- [61] E. Bramell-Risberg, et al., “Lower gait speed in older women with dementia compared with controls”, *Dementia and Geriatric Cognitive Disorders*, vol.20, nro.5, pp. 298 – 305, 2005.
- [62] J. Verghese, et al., “Cognitive processes related to gait velocity: results from the Einstein aging study”, *Neuropsychology*, vol. 20, nro.2, pp. 215 – 223, 2006.
- [63] L. Fitzpatrick, et al., “Associations of gait speed and other measures of physical function with cognition in a healthy cohort of elderly persons”, *The Journals of Gerontology: Series A*, vol. 62, nro.11, pp. 1244 – 1251, 2007.
- [64] D. Wasserman, et al., “The trajectory of gait speed preceding mild cognitive impairment”, *Archives of Neurology*, vol. 67, nro.8, pp. 980 – 986, 2010.
- [65] R. W. Bohannon, “Comfortable and maximum walking speed of adults aged 20—79 years: reference values and determinants”, *Age and Ageing*, vol. 26, nro.1, pp. 15 – 19, 1997.
- [66] E. Paillaud, et al., “Measurement of gait speed in older adults to identify complications associated with frailty: a systematic review”, *Journal of Geriatric Oncology*, vol.6, nro.6, pp. 484 – 496, 2015.

- [67] C. Rosano, et al., “Gait speed and survival in older adults”, *JAMA*, vol. 305, nro.1, pp. 50 – 58, 2011.
- [68] D. Wallace, et al., “Physical performance measures in the clinical setting”, *Journal of the American Geriatrics Society*, vol. 51, nro. 3, pp. 314 – 322, 2003.
- [69] B. Isaacs, et al., “The prevention of falls in later life”, *Danish Medical Bulletin*, vol. 34, nro. 4, pp. 1 – 24, 1987.
- [70] F. Fuller, “Falls in the elderly”, *American Family Physician*, vol.61, nro.7, pp.2159 – 68, 2000.
- [71] J. A. Garcia Marin, “The use of interactive game technology to improve the physical health of the elderly: a serious game approach to reduce the risk of falling in older people”, tesis doctoral, Faculty of Engineering and Information Technology, University of Technology, Sydney, 2015.
- [72] D. Giannoulis, G. M. Calori, y P. V. Giannoudis, “Thirty-day mortality after hip fractures: has anything changed?”, *European Journal of Orthopaedic Surgery & Traumatology*, vol.26, nro. 4, pp. 365 – 370, 2016.
- [73] A. Aqil, et al., “A comprehensive analysis of the causes and predictors of 30-day mortality following hip fracture surgery”, *Clinics in Orthopedic Surgery*, vol. 9, nro. 1, pp. 10 – 18, 2017.
- [74] T. Dorresteijn, “A home-based program to manage concerns about falls: feasibility, effects and costs of a cognitive behavioral approach in community-dwelling, frail older people”, tesis doctoral, Department of Health Services Research, School for Public Health and Primary Care, Maastricht University, 2016.
- [75] A. Atwal, et al., “Fall prevention intervention technologies: a conceptual framework and survey of the state of the art”, *Journal of Biomedical Informatics*, vol. 59, pp. 319 – 345, 2016.
- [76] A. Middleton, et al., “Determining risk of falls in community dwelling older adults: a systematic review and meta-analysis using posttest probability”, *Journal of Geriatric Physical Therapy*, vol. 40, nro.1, pp. 1 – 36, 2017.
- [77] M. B. King, y M. E. Tinetti, “Falls in community-dwelling older persons”, *Journal of the American Geriatrics Society*, vol. 43, nro. 10, pp. 1146 – 1154, 1995.
- [78] J. Klenk, et al., “Methods for the real-world evaluation of fall detection technology: a scoping review”, *Sensors*, vol.18, nro.7, pp.2060, 2018.
- [79] M. Taylor, et al., “Early mortality after hip fracture: is delay before surgery important?”, *Journal of Bone and Joint Surgery*, vol.87, nro.3, pp. 483–489, 2005.
- [80] W. Paulsen, et al., “Time to surgery is associated with thirty-day and ninety-day mortality after proximal femoral fracture: a retrospective observational study on

- prospectively collected data from the Danish Fracture Database Collaborators”, *Journal of Bone and Joint Surgery*, vol.97, nro.16, pp. 1333 – 1339, 2015.
- [81] J. Hoey, y S. S. Khan, “Review of fall detection techniques: a data availability perspective”, *Medical Engineering & Physics*, vol.39, pp. 12 – 22, 2017.
- [82] M. Mourshed, R. Al-Shaqi, y Y. Rezgui, “Progress in ambient assisted systems for independent living by the elderly”, *SpringerPlus*, vol.5, nro.1, pp. 624, 2016.
- [83] A. Martinez, et al., “A systematic review of proposals for the social integration of elderly people using ambient intelligence and social networking sites”, *Cognitive Computation*, vol.8, nro.3, pp. 529 – 542, 2016.
- [84] K. Wada, et al., “Effects of robot-assisted activity for elderly people and nurses at a day service center”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 92, nro.11, pp. 1780 – 1788, 2004.
- [85] A. Sharkey, y N. Sharkey, “Granny and the robots: ethical issues in robot care for the elderly”, *Ethics and Information Technology*, vol. 14, nro.1, pp. 27 – 40, 2012.
- [86] C. Brayne, y J. Fleming, “Inability to get up after falling, subsequent time on floor, and summoning help: prospective cohort study in people over 90”, *BMJ*, vol. 337, pp. 2227, 2008.
- [87] D. Dirksen, et al., “Literature review on monitoring technologies and their outcomes in independently living elderly people”, *Disability and Rehabilitation: Assistive Technology*, vol. 10, nro. 4, pp. 271 – 294, 2015.
- [88] C. Debes, et al., “Monitoring activities of daily living in smart homes: understanding human behavior”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 33, nro.2, pp. 81 – 94, 2016.
- [89] E. Cetin, et al., “Sensors in Assisted Living: a survey of signal and image processing methods”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 33, nro.2, pp. 36 – 44, 2016.
- [90] J. L. Chua, Y. C. Chang, y W. K. Lim, “A simple vision-based fall detection technique for indoor video surveillance”, *Signal, Image and Video Processing*, vol.9, nro.3, pp. 623 – 633, 2015.
- [91] M. Zhu, W. Feng, y R. Liu, “Fall detection for elderly person care in a visionbased home surveillance environment using a monocular camera”, *Signal, Image and Video Processing*, vol.8, nro.6, pp. 1129 – 1138, 2014.
- [92] G. Baldewijns, et al, “Developing a system that can automatically detect health changes using transfer times of older adults”, *BMC medical research methodology*, vol.16, nro.1, pp. 16 – 23, 2016.
- [93] J. M. Keller, et al., “A realtime system for in-home activity monitoring of elders”, *31st Annual International Conference of the IEEE EMBS*, Minneapolis, Minnesota, USA, pp.6115 – 6118, 2009.

- [94] A. Rhuma, et al., “A posture recognitionbased fall detection system for monitoring an elderly person in a smart home environment”, IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, vol.16, nro.6, pp. 1274 – 1286, 2012.
- [95] M. Skubic, S. Wang, y Y. Zhu, “Activity density map visualization and dissimilarity comparison for eldercare monitoring”, IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, vol.16, nro.4, pp.607 – 614, 2012.
- [96] K. Suryadevara, y S. C. Mukhopadhyay, “Determining wellness through an ambient assisted living environment”, IEEE Intelligent Systems, vol.29, nro.3, pp.30 – 37, 2014.
- [97] D. Brown, M. Alwan, y T. Barger, "Health-status monitoring through analysis of behavioral patterns”, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol.35, nro.1, pp. 22 – 27, 2005.
- [98] A. Franco, et al., “Telesurveillance of elderly patients by use of passive infra-red sensors in a 'smart' room”, Journal of Telemedicine and Telecare, vol. 9, nro.1, pp. 23 – 29, 2003.
- [99] D. Droghini, et al., “Acoustic cues from the floor: a new approach for fall classification”, Expert Systems with Applications, vol. 60, pp. 51 – 61, 2016.
- [100] J. Chambers, et al., “An unsupervised acoustic fall detection system using source separation for sound interference suppression”, Signal Processing, vol. 110, pp. 199 – 210, 2015.
- [101] A. Yazar, et al., “Fall detection using single-tree complex wavelet transform”, Pattern Recognition Letters, vol. 34, nro.15, pp. 1945 – 1952, 2013.
- [102] D. Austin, et al., “Unobtrusive and ubiquitous in-home monitoring: a methodology for continuous assessment of gait velocity in elders”, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 57, nro. 4, pp. 813 – 820, 2010.
- [103] E. Cetin, et al., “Wavelet based flickering flame detector using differential PIR sensors”, Fire Safety Journal, vol. 53, pp. 13v–v18, 2012.
- [104] A. Adami, et al., “Unobtrusive assessment of activity patterns associated with mild cognitive impairment”, Alzheimer's y Dementia, vol.4, nro.6, pp. 395 – 405, 2008.
- [105] B. Delhougne, et al., “New concept using Passive Infrared (PIR) technology for a contactless detection of breathing movement: a pilot study involving a cohort of 169 adult patients”, Journal of Clinical Monitoring and Computing, vol. 27, nro. 5, pp. 521 – 529, 2013.
- [106] B. Heinbüchner, et al., “Satisfaction and use of personal emergency response systems”, Zeitschrift für Gerontologie und Geriatrie, vol. 43, nro. 4, pp. 219 – 223, 2010.

- [107] R. Stokke, “The personal emergency response system as a technology innovation in primary health care services: an integrative review”, *Journal of Medical Internet Research*, vol. 18, nro.7, pp. e187, 2016.
- [108] E. Aghayi, et al., “Smart homes for elderly healthcare—recent advances and research challenges”, *Sensors*, vol.17, nro.11, pp. 2496, 2017.
- [109] M. Berge, "Telecare acceptance as sticky entrapment: a realist review", *Gerontechnology*, vol.15, nro.2, pp.98 – 108, 2016.
- [110] J. S. Thilo, et al., “Usability of a wearable fall detection prototype from the perspective of older people: a real field testing approach”, *Journal of Clinical Nursing*, vol. 28, nro. 1 – 2, pp. 310 – 320, 2019.
- [111] E. Lachat, et al., “First experiences with Kinect V2 sensor for close range 3D modelling”, *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, vol.40, nro.5, pp.93 – 100, 2015.
- [112] H. Chen, R.-Y. Wang, y Y.-Y. Liao, “Effects of Kinect-based exergaming on frailty status and physical performance in prefrail and frail elderly: a randomized controlled trial”, *Scientific Reports*, vol.9, nro.1, pp.9353, 2019.
- [113] F. Mentiplay, et al., “Three-dimensional cameras and skeleton pose tracking for physical function assessment: a review of uses, validity,current developments and Kinect alternatives”, *Gait & Posture*, vol.68, pp.193 – 200, 2019
- [114] C.-M. Li, et al., “An investigation of the use of the Kinect system as a measure of dynamic balance and forward reach in the elderly”, *Clinical Rehabilitation*, vol.32, nro.4, pp.473 – 482, 2018.
- [115] C. Kuenze, et al., “Validation of static and dynamic balance assessment using Microsoft Kinect for young and elderly populations”, *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol.22, nro.1, pp.147 – 153, 2018.
- [116] G. F. de Oliveira, et al., “Applicability of the Kinect sensor in the rehabilitation of balance control in the elderly: a pilot study”, *Asian Journal of Sports Medicine*, vol.9, nro.4, pp.e82017, 2018.
- [117] A. Elchouemi, et al., “Elderly people fall detection system using skeleton tracking and recognition”, *American Journal of Applied Sciences*, vol. 15, nro.9, pp. 423 – 431, 2018.
- [118] B. Garcia-Zapirain, y Z. Saenz-de-Urturi, “Kinect-based virtual game for the elderly that detects incorrect body postures in real time”, *Sensors*, vol.16, nro.5, pp. 704, 2016.
- [119] F. Ahmad, et al., “Radar signal processing for elderly fall detection”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol.33, nro.2, pp.71 – 80, 2016.
- [120] A. Singh, et al., “Doppler Radar Physiological Sensing”, John Wiley & Sons, Inc., 2016.

- [121] C. Garripoli, et al., “Embedded DSP-based telehealth radar system for remote in-door fall detection”, *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol.19, nro.1, pp. 92 – 101, 2015.
- [122] M. G. Amin, et al., “Radar-based fall detection based on Doppler time–frequency signatures for assisted living”, *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol.9, nro.2, pp. 164 – 172, 2015.
- [123] Y. Su, et al., “Doppler radar fall activity detection using the wavelet transform”, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol.62, pp.865 – 875, 2015.
- [124] V. Poor, y S. Gezici, “Position estimation via ultra-wide-band signals”, *Proceedings of the IEEE*, vol.97, nro.2, pp.386 – 403, 2009.
- [125] A. Conti, et al., “Sensor radar networks for indoor tracking”, *IEEE Wireless Communications Letters*, vol.3, nro.2, pp.157 – 160, 2014.
- [126] E. Piuze, et al., “Design, realization, and test of a UWB radar sensor for breath activity monitoring”, *IEEE Sensors Journal*, vol.14, nro.2, pp.584 – 596, 2014.
- [127] A. Kumar, et al., “Experimental study of through-wall human detection using ultra wideband radar sensors”, *Measurement*, vol.47, pp.869 – 879, 2014.
- [128] A. Lazaro, D. Girbau, y R. Villarino, “Techniques for clutter suppression in the presence of body movements during the detection of respiratory activity through UWB radars”, *Sensors*, vol.14, pp.2595 – 2618, 2014.
- [129] P. Bernardi, et al., “Comparison between UWB and CW radar sensors for breath activity monitoring”, *Proc. SPIE 9077 Defense + Security: Radar Sensor Technology XVIII*, Baltimore, Maryland, United States, pp. 907711, 2014.
- [130] Davidson, et al., “Ultra-wideband radar-based accurate motion measuring: human body landmark detection and tracking with biomechanical constraints”, *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol.9, nro.2, pp. 154 – 163, 2015.
- [131] C.-M. Li, et al., “An investigation of the use of the Kinect system as a measure of dynamic balance and forward reach in the elderly”, *Clinical Rehabilitation*, vol.32, nro.4, pp.473 – 482, 2018.
- [132] C. Kuenze, et al., "Validation of static and dynamic balance assessment using Microsoft Kinect for young and elderly populations", *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol.22, nro.1, pp. 147 – 153, 2018.
- [133] J. Lopes, et al., “Applicability of the Kinect sensor in the rehabilitation of balance control in the elderly: a pilot study”, *Asian Journal of Sports Medicine*, vol.9, nro.4, pp. e82017, 2018.
- [134] A. Elchouemi, et al., “Elderly people fall detection system using skeleton tracking and recognition”, *American Journal of Applied Sciences*, vol.15, nro.9, pp.423 – 431, 2018.

- [135] B. Garcia-Zapirain, y Z. Saenz-de-Urturi, “Kinect-based virtual game for the elderly that detects incorrect body postures in real time”, *Sensors*, vol.16, nro.5, pp. 704, 2016.
- [136] F. Ahmad, et al., “Radar signal processing for elderly fall detection”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. March, pp.71 – 80, 2016.
- [137] D. Droitcour, et al., “Doppler Radar Physiological Sensing”, John Wiley & Sons, Inc., 2016.
- [138] C. Garripoli, et al., "Embedded DSP-based telehealth radar system for remote in-door fall detection", *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol.19, nro.1, pp. 92 – 101, 2015.
- [139] M. G. Amin, et al., “Radar-based fall detection based on Doppler time–frequency signatures for assisted living”, *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol.9, nro.2, pp. 164 – 172, 2015.
- [140] Y. Su, et al., “Doppler radar fall activity detection using the wavelet transform”, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 62, pp. 865 – 875, 2015.
- [141] V. Poor, y S. Gezici, “Position estimation via ultra-wide-band signals”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 97, nro.2, pp. 386 – 403, 2009.
- [142] A. Giorgetti, et al., “Sensor radar networks for indoor tracking”, *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 3, nro.2, pp. 157 – 160, 2014.
- [143] E. PiuZZi, et al., “Design, realization, and test of a UWB radar sensor for breath activity monitoring”, *IEEE Sensors Journal*, vol. 14, nro.2, pp. 584 – 596, 2014.
- [144] A. Kumar, et al., “Experimental study of through-wall human detection using ultra wideband radar sensors”, *Measurement*, vol.47, pp. 869 – 879, 2014.
- [145] A. Lazaro, D. Girbau, y R. Villarino, “Techniques for clutter suppression in the presence of body movements during the detection of respiratory activity through UWB radars”, *Sensors*, vol.14, pp.2595 – 2618, 2014.
- [146] E. PiuZZi, et al., “Comparison between UWB and CW radar sensors for breath activity monitoring”, *SPIE 9077 Defense + Security: Radar Sensor Technology XVIII*, Baltimore, Maryland, United States, pp. 907711, 2014.
- [147] B. Davidson, et al., “Ultra-wideband radar-based accurate motion measuring: human body landmark detection and tracking with biomechanical constraints”, *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 9, nro.2, pp. 154 – 163, 2015.
- [148] H. Hua-lin, et al., “Preliminary exploration of the measurement of walking speed for the apoplectic people based on UHF RFID”, *37th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, Milan, Italy, pp. 8038 – 8041, 2015.

- [149] Y. Cheng, J. Hu, y K. C. Sun, “A kinematic human-walking model for the normal-gait-speed estimation using tri-axial acceleration signals at waist location”, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 60, nro.8, pp.2271 – 2279, 2013.
- [150] J. Wagner, P. Mazurek, y R. Z. Morawski, “Regularized numerical differentiation of depth-sensor data in a fall detection system”, IEEE International Conference on Computational Intelligence and Virtual Environments for Measurement Systems and Applications, pp. 234 – 236, 2017.

## VIII. ANEXOS

### Operacionalización de variable

VARIABLE	TIPO DE VARIABLE	OPERACIONALIZACION	CATEGORIZACION O DIMENSIONES	DEFINICION	INDICADOR	NIVEL DE MEDICION	UNIDAD DE MEDIDA	INDICE	VALOR
Método de diferenciación	Cuantitativa Independiente	Estima la posición de una persona en movimiento y proporciona estimaciones de la velocidad de esa persona simultáneamente o con un retraso insignificante.	Método escalar Método vectorial	Permite el cálculo de una aproximación a la derivada de una función.	Polinomial escalar. No Polinomial escalar. Polinomial vectorial. No Polinomial vectorial.	Intervalo	Tasa de falsas alarmas (FAR)	S	Se pueden tomar los valores con igual nivel de $[10^{-2}, 10^2]$
Método de regularización	Cuantitativa Independiente	Forma de restricción al proceso de estimación para evitar la posibilidad de sobre ajuste del modelo.	Velocidad estimada	Reduce la varianza del modelo penalizando los coeficientes estimados.	Rendimiento	Intervalo	Precisión (P)	S	Se pueden tomar los valores con igual nivel de $[0,1]$
Sistema de seguimiento orientado a la salud del adulto mayor	Cuantitativa Dependiente	Implica la aproximación de una función desconocida que modela la trayectoria de la posición de la persona monitoreada a partir de los datos de medición.	Datos de medición Datos sintéticos	Permite una detección remota de las trayectorias.	Sensor de profundidad. Sensor radar de impulso.	Intervalo	Distancia. Tiempo.	S	[m/s] [T]