



Universidad Nacional
SAN LUIS GONZAGA



Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional

Esta licencia permite a otras combinar, retocar, y crear a partir de su obra de forma no comercial, siempre y cuando den crédito y licencia a nuevas creaciones bajo los mismos términos.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>



UNIVERSIDAD NACIONAL SAN LUIS GONZAGA
EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

CONSTANCIA

El que suscribe, deja constancia que se ha realizado el análisis con el software de verificación de similitud al documento cuyo título es:

“TOPOLOGÍA Y TEORÍA DE GRAFOS EN LA VIDA COTIDIANA”

Presentado por:

Dr. CARLOS APARCANA AQUIJE

Dra. MERLY LILIANA YATACO BERNAOLA

Mag. HANS CIOVANNI QUISPE ARCOS


Dra. DIANA MERCEDES CASTRO CÁRDENAS

El resultado obtenido es el **16% de Similitud**, por el cual se otorga el calificativo de:

APROBADO, según Reglamento de Evaluación de la Originalidad

Se adjunta al presente el reporte de evaluación con el software de verificación de originalidad.

Ica, 27 de Diciembre del 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"
FACULTAD DE CIENCIAS

DR. CARLOS APARCANA AQUIJE
Director (e) de la Unidad de Investigación

UNIVERSIDAD NACIONAL “SAN LUIS GONZAGA”

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

Facultad de Ciencias



“TOPOLOGÍA Y TEORÍA DE GRAFOS EN LA VIDA COTIDIANA”

Línea de Investigación

Ciencias Naturales, Ingeniería y Tecnologías Sostenibles

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN

AUTORES

Dr. CARLOS APARCANA AQUIJE (Investigador Principal)

Código ORCID: 0000-0003-4531-2510

Dra. MERLY LILIANA YATACO BERNAOLA (Investigador Asociado)

Código ORCID: 0000-0002-9874-4758

Mag. HANS GIOVANNI QUISPE ARCOS (Investigador Asociado)

Código ORCID: 0000-0002-7002-5479

Dra. DIANA MERCEDES CASTRO CÁRDENAS (Investigadora Colaboradora)

Código ORCID: 0000-0001-8489-9671

Ica - Perú

2023

ÍNDICE

	Pág.
Portada	i
Índice	ii
Resumen	iii
Abstract	iv
I. INTRODUCCIÓN	5
II. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS	7
III. RESULTADOS	9
IV. DISCUSIÓN	83
V. CONCLUSIONES	84
VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	86

RESUMEN

Es necesario la matemática para entender lo que ocurre en el comportamiento de un determinado objeto matemático, destacando los conjuntos abiertos, las funciones continuas, espacios topológicos, homeomorfismos estudiados en cálculo, análisis matemático, y muy especial en la teoría de grafos la que, apoyándose en la topología nos sirve para generar ciertos modelos matemáticos y dan origen a múltiples y nuevas aplicaciones en el mundo de las matemáticas, así como de la vida cotidiana, pues sus variadas aplicaciones a problemas de la vida real, constituyen la base de la matemática moderna, con múltiples aplicaciones en las Ciencias e Ingeniería y áreas afines.

La información obtenida es muy útil e importante, pues a partir de ella se tiene presente, cuáles, en donde y como se dan los contextos, significados, representaciones y repercusiones al planificar y presentar el desarrollo del tema “Topología y Teoría de grafos en la vida cotidiana”, dado que todo este contexto se da en la modelación de la matemática que nos brindan la Topología y la Teoría de grafos.

El objetivo del trabajo ha sido desarrollar topología y teoría de grafos en la vida cotidiana temas que, en la actualidad constituyen una temática, interesante, importante y útil aplicación.

Palabras claves: Topología, Grafos, Homeomorfismos, Espacios topológicos.

ABSTRACT

Mathematics is necessary to understand what happens in the behavior of a certain mathematical object, highlighting open sets, continuous functions, topological spaces, homeomorphisms studied in calculus, mathematical analysis, and very special in graph theory, which, based on in topology, it helps us generate certain mathematical models and give rise to multiple new applications in the world of mathematics, as well as in everyday life, since its varied applications to real-life, problems constitute the basis of modern mathematics, with multiple applications in Sciences and Engineering and related areas. The information obtained is very useful and important, because from it is kept in mind which, where and how the contexts, meanings, representations and repercussions occur when planning and presenting the development of the topic “Topology and Graph Theory in everyday life”, given that this entire context occurs in the modeling of mathematics that Topology and Graph Theory provide us with.

The aim of the work has been to develop topology and graph theory in everyday life topics that, at present contain a thematic, interesting, important and useful application

The aim of the work has been to develop topology and graph theory in everyday life topics that, at present contain a thematic, interesting, important and useful application.

The aim of the work has been to develop topology and graph theory in everyday life topics that, at present contain a thematic, interesting, important and useful application.

Keywords: Topology, Graphs, Homeomorphisms, Topological spaces.

I. INTRODUCCIÓN

Se inicia el trabajo seleccionando los medios de evidencias que nos proporciona la topología, disciplina considerada como la más joven de las ramas clásicas, de las matemáticas, cuya aparición fue en el siglo XVII, con el nombre de análisis de la posición o *analysis situs*, bajo este concepto podemos definir a la topología como una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades intrínsecas de los objetos matemáticos o de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes.

[2] En topología se trabajó con los mismos objetos que en geometría y en la teoría de grafos, pero de modo distinto, en teoría de grafos, las distancias o los ángulos no son importantes, ni siquiera la alineación de los puntos. En topología, un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo; y se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible.

Así mismo se ha hecho el estudio de los conjuntos abiertos, cerrados, aplicaciones continuas, espacios topológicos, homeomorfismos, que sirvieron para dar los conceptos básicos de la Teoría de Grafos e incursionar en la modelación matemática de la Teoría de Grafos aplicados a la vida cotidiana, lo que fue muy útil para la preparación del trabajo de investigación que hemos realizando, el cual describe, identificar y analizar algunas aplicaciones de la Teoría de grafos aplicados a la vida cotidiana extrapolando estos conceptos al caso de una función

$$\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / \vec{f}(X) = (\vec{f}_i(X)), \forall i = 1, 2, \dots, m \text{ tal que } n, m \in \mathbb{N},$$

$$X = \vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\vec{f}_1(X), \vec{f}_2(X), \dots, \vec{f}_m(X))$$

Los resultados que se desprenden del presente trabajo los vemos reflejados en las aplicaciones de otras ramas de las matemáticas que sin duda son esenciales y están ligados habitualmente en muchos razonamientos de los cursos como el de geometría diferencial, análisis, álgebra, análisis matemático e investigación operativa, además constituye una herramienta indispensable en física, física química, medicina, biología, la genética, informática, teoría de redes, teoría de juego, teoría de grafos, etc.

Un grafo es un conjunto de puntos, llamados vértices, algunos de los cuales están ligados entre sí por medio de líneas, denominadas las aristas. La naturaleza geométrica de estos arcos no tiene importancia, sólo cuenta la manera en la que los vértices están conectados.

[2] Los grafos no solo interesan a los matemáticos puros, se usan también para representar circuitos eléctricos, para realizar cálculos teóricos relativos a partículas elementales, etc. La teoría de grafos tiene igualmente una importancia económica directa por sus numerosas aplicaciones en investigación operativa. Por ejemplo, para determinar el trayecto óptimo, es decir obtener el trayecto menos costoso y el más rápido, para una empresa de camiones que deben repartir y recoger productos a números clientes esparcidos por un país determinado, la red de carreteras puede modelizarse por un grafo, cuyas aristas son las carreteras de una ciudad a otra, a cada arista se le asocian varios números longitud del camino correspondiente, tiempo de recorrido, coste del peaje, etc. Usando cálculos y algoritmos a veces complejos, se determinan una o varias soluciones y se trata entonces de encontrar la mejor de ellas, se está estudiando la llamada topología de la red.

Es muy importante tener presente, cuáles, en donde y como se dan los contextos, significados, representaciones y repercusiones al planificar, investigar y presentar el desarrollo del tema “Topología y Teoría de grafos en la vida cotidiana”, por lo que debemos decir que todo este contexto se da en la modelación matemática que nos brindan la Topología y la Teoría de grafos, es muy importante también preguntarnos como se deducen, como se desarrollan y se aplican matemáticamente estos modelos una vez que los hallamos obtenido.

II. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

Las estrategias del presente trabajo de investigación que se llevaron a cabo fueron presentando al **espacio vectorial** \mathbb{R}^n , el cual se considera como el conjunto de las n -úplas de números reales, donde n es un número natural arbitrario fijo. Los elementos de \mathbb{R}^n , llamados indistintamente puntos o vectores son los conjuntos ordenados que se denotan por $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde x_1, x_2, \dots, x_n , son números reales arbitrarios.

Mostrando que la cuaterna $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \times)$, con \mathbb{R}^n el conjunto de los vectores, \mathbb{R} el de los números reales, y $+$, \times la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector, definidos en los primeros cursos de análisis, conforman un espacio vectorial.

En el presente trabajo generalizaremos el espacio \mathbb{R}^n a los conceptos topológicos de valor absoluto, intervalo, conjunto abierto, cerrado, punto interior, punto de adherencia, etcétera

La inserción de una topología en un espacio \mathbb{R}^n es de mucha utilidad a la hora de definir las nociones de límite y continuidad de funciones dependientes de varias variables reales. El concepto de norma es la generalización del concepto de valor absoluto. Así, sabemos que la distancia entre dos números reales $x, y \in \mathbb{R}$ viene dado por $d(x, y) = |y - x|$ y definiendo en general que es el Producto escalar o Producto interno en un espacio vectorial real, \mathbb{R}^n .

Existen muchas aplicaciones que cumplen con la definición de producto escalar, pero el producto escalar con el que se trabajó es el siguiente:

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Al espacio vectorial real de dimensión finita, n , en el que esté definido un producto escalar, $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$, se le denomina *espacio vectorial euclídeo n dimensional*

El producto interno que acabamos de definir nos permite considerar la norma euclidiana de un vector $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n que es una aplicación de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R} , es decir

$$\begin{aligned} \|\vec{X}\|: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \vec{X} &\mapsto \|\vec{X}\| \end{aligned}$$

de forma que a \vec{X} se le hace corresponder un escalar que se representa por $\|\vec{X}\|$ norma de \vec{X} , la definimos mediante

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

debiendo cumplir dicha aplicación las siguientes propiedades de positividad, homogeneidad y la desigualdad triangular, continuando con el desarrollo de la existencia de distintas normas en \mathbb{R}^n (con $n \geq 2$) $\|\vec{X}\|_2$, $\|\vec{X}\|_1$ y $\|\vec{X}\|_\infty$, que son muy importantes en el trabajo realizado, motivando la introducción de normas equivalentes.

El concepto análogo al de intervalo en el caso multidimensional es el de bola, este permitirá desarrollar la topología de \mathbb{R}^n . La bola abierta o disco abierto, bola cerrada, bola reducida o bola abierta perforada, con cuyos conceptos podemos construir los conceptos fundamentales que conforman la topología de espacios métricos. El primero de estos conceptos es el de conjunto abierto que básicamente son los bloques de construcción de un espacio topológico.

Así mismo se han recolectado suficientes textos, y materiales de enseñanza, tales como apuntes de clases elaborados por especialistas en Topología y Teoría de Grafos, este material bibliográfico con el que se ha trabajado y desarrollado el presente trabajo de investigación, “Topología y Teoría de Grafos en la vida Cotidiana” ha sido estrictamente seleccionado, [3] especialmente en los temas o puntos o secciones donde se tratan los conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, aplicaciones continuas, espacios topológicos, homeomorfismos, que nos sirvan para poder dar los conceptos básicos de la Teoría de Grafos y poder incursionar en la modelación matemática de la Teoría de Grafos en la vida cotidiana que constituye un tópico de actualidad muy interesante y útil en la preparación del trabajo de investigación que hemos realizado, el cual busca describir, identificar y analizar algunas aplicaciones de la Teoría de grafos a la vida cotidiana.

III. RESULTADOS

CONCEPTOS BÁSICOS Y RESULTADOS PREVIOS

Antes de entrar a la parte central del trabajo de investigación se seleccionaron algunas definiciones previas, así como conceptos básicos con los que mes a mes se trabajó y desarrolló el presente trabajo, de esta manera incursionamos en el tema “Topología y Teoría de Grafos en la Vida Cotidiana”, [4] la cual constituye un trabajo muy interesante, importante y útil en el la vida cotidiana de los seres humanos y demás seres vivientes, donde es necesario la ayuda matemática para entender los sucesos que ocurren en el comportamiento de un determinado objeto matemático destacando los conjuntos abiertos, [5] las funciones continuas los espacios topológicos los homeomorfismos el cálculo diferencial, cálculo integral, el análisis matemático, pero especialmente de la teoría de grafos que, apoyándose en la topología nos generan modelos matemáticos y dan origen a múltiples y nuevas aplicaciones en el mundo de las matemáticas, así como de la vida cotidiana, dado que sus variadas aplicaciones a problemas de la vida real, constituyen la base de la matemática moderna, con múltiples aplicaciones en las Ciencias e Ingeniería y áreas afines.

Por lo que se utilizó como medios de evidencias las referencias matemáticas, como libros y textos de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales en las que se realizó algunas consultas sobre el tema investigado.

Así mismo debemos de indicar que todo este contexto se da en la modelación matemática que nos brindan la topología y la teoría de grafos en la vida cotidiana.

Por lo que utilizamos como medios de evidencias las referencias matemáticas, como libros, textos de topología y teoría de grafos en las que se realizaron algunas consultas sobre el tema a investigar, tales como:

Conjuntos de Índices

Un conjunto de índices Λ , es un conjunto a cuyos puntos o elementos los consideraremos como “nombres”, es decir:

$$\Lambda = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots\}$$

Nota.

1. Dada una colección de subconjuntos de un conjunto X asociamos a cada sub conjunto un nombre tomado del conjunto Λ .
2. La forma de adjudicar estos nombres debe ser tal que cada sub conjunto tenga por lo menos un nombre a un solo subconjunto

3. Si los nombres de Λ son $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ entonces el sub conjunto de X que lleve el nombre α se representara por A_α al subconjunto que lleve el nombre de β se representara por A_β y así sucesivamente.

Ejemplo 1.

En Álgebra. En un problema que intervienen 3 incógnitas.

Sea el conjunto de índices $\Lambda = \{1,2,3\}$ entonces las incógnitas serán x_1, x_2, x_3

En Cálculo. Si se trabaja con una sucesión infinita de números

Sea el conjunto de índices $\Lambda = \mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,\dots\}$ entonces los elementos de la sucesión serán:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Familia de Conjuntos

Una familia o colección de conjuntos, es un conjunto cuyos elementos son conjuntos, los que se denotan como $(A_i)_{i \in I}$

Familia indexada de conjuntos

Una familia indexada (o indizada) de conjuntos es aquella que dado un conjunto discreto de índices $\Lambda = I \neq \phi$, tal que $i \in I$ se define el conjunto A_i , que es la imagen de i por A , entonces decimos que $F = \{A_i / i \in I\}$ es una familia indexada de conjuntos, donde $I = \Lambda$ es el conjunto de índices de la familia y que A_i es el i – *ésimo* elemento (o miembro o nombre) de la familia y cada elemento en el conjunto de índices se le llama un índice. Cuando I es el conjunto de los números naturales sustituimos la palabra familia por una sucesión o secuencia.

Notar que utilizamos el sufijo “ésimo” en i -ésimo incluso cuando i no es un número cardinal, se denota también como:

$$\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda = I\} \quad \text{o} \quad \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda = I} \quad \text{o} \quad (A_i)_{i \in I} \quad \text{o} \quad \{A_\alpha\}$$

Observa que en la notación $(A_i)_{i \in I}$ no aparece el contra dominio de la función. Por esta razón, cuando introducimos una familia, es obligatorio decir qué tipo de objetos constituyen su contra dominio

Ejemplo 2.

Dado el conjunto de índices $\Lambda = I = \mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,\dots\}$, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ sea:

$$D_n = \{x : x \in \mathbb{Z}^+, x \text{ es múltiplo de } n\}.$$

Entonces $D_1 = \{1,2,3,4, \dots\}$

$D_2 = \{2,4,6,8, \dots\}$

$D_3 = \{3,6,9, \dots\}$

$$D_4 = \{4, 8, 12, \dots\}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Por ejemplo, una familia de personas es una función cuyo contra dominio es un conjunto de personas.

Del mismo modo, una familia de monos es una función cuyo contra dominio es un conjunto de monos.

Como se ha mencionado anteriormente, el uso más frecuente del término familia es cuando el contra dominio de la función es una colección de conjuntos. Se trata, pues, de una familia de conjuntos. En este caso existen notaciones especiales para la unión y la intersección de la colección.

Unión de familias indexadas

Si $F = (A_i)_{i \in I} = \{A_i : i \in I = \Lambda\}$ es una familia de conjuntos, entonces la unión de la familia se define, por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}$$

Intersección de familias indexadas

Si $F = (A_i)_{i \in I} = \{A_i : i \in I = \Lambda\}$ es una familia de conjuntos, entonces la unión de la familia se define, por

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}$$

Ejemplo 3.

Sea la familia de conjunto $A_n = \{n, n + 1, 2n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$

Constrúyase dos familias indexadas distintas y halle la unión e intersección de dichas familias.

Resolución

Construyo las familias indexadas

$$A_1 = \{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 4\}$$

$$A_3 = \{3, 4, 6\}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$\mathcal{F} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ donde el índice de \mathcal{F} es \mathbb{N}

otra familia indexada sería $\mathcal{G} = \{A_i : i \in \{2, 3, 20\}\}$, donde el índice de \mathcal{G} es $\{2, 3, 20\}$

1. Ahora hallaremos la unión de la familia

$$\mathcal{F} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x: \exists i \in \mathbb{N}, x \in A_i\} = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

Se probará que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$$

Por lo que se probará mediante la doble inclusión

$$a) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \mathbb{N}$$

$$\text{Si } x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \rightarrow \exists m \in \mathbb{N} / x \in A_m \subset \mathbb{N}$$

$$\rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : x \in \{m, m + 1, 2m\}$$

$$\rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : x = m \vee x = m + 1 \vee x = 2m$$

Por lo tanto $x \in \mathbb{N}$

$$\therefore \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \mathbb{N}$$

$$b) \mathbb{N} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{N} \rightarrow m = x \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow x = m \in \{m, m + 1, 2m\} = A_m$$

$$\rightarrow \{\exists m \in \mathbb{N} / x \in A_m\}$$

$$\rightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$\therefore \mathbb{N} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

De a) y b) se obtiene que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$$

hallaremos la intersección de la familia

$$\mathcal{F} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x: \forall i \in I, x \in A_i\} = \emptyset$$

Asumiendo que

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in \bigcap_{i \in I} A_i \rightarrow \forall i : x \in A_i,$$

En particular

$$x \in A_1 = \{1,2\} \wedge x \in A_2 = \{2,3,4\} \wedge x \in A_3 = \{3,4,6\}$$

$$\rightarrow x = 1 \text{ ó } 2 \wedge x = 2, \text{ ó } 3, \text{ ó } 4 \wedge x = 3 \text{ ó } 4 \text{ ó } 6$$

Lo que es una contradicción

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \phi$$

2. Ahora hallaremos la unión de la familia

$$\mathcal{G} = \{A_i : i \in \{2,3,20\}\}$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in \{2,3,20\}} A_i &= \{x : \exists i \in \{2,3,20\}, x \in A_i\} \\ &= A_2 \cup A_3 \cup A_{20} \\ &= \{2,3,4\} \cup \{3,4,6\} \cup \{20,21,40\} \\ &= \{2,3,4,6,20,21\} \end{aligned}$$

hallaremos la intersección de la familia: Como no existe un elemento común en mis tres conjuntos, entonces la intersección es vacía

$$\bigcap_{i \in \{2,3,20\}} A_i = \{x : \forall i \in \{2,3,20\}, x \in A_i\} = \phi$$

Incursionamos en los conceptos básicos de la topología, por lo que daremos los siguientes conceptos:

Espacio vectorial \mathbb{R}^n

Consideremos el conjunto \mathbb{R}^n de las n-uplas de números reales, donde n es un número natural arbitrario fijo. Los elementos de \mathbb{R}^n , que llamamos indistintamente puntos o vectores son entonces todos los conjuntos ordenados $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde x_1, x_2, \dots, x_n , son números reales arbitrarios.

Dados $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, dos vectores en \mathbb{R}^n , decimos que son iguales y escribimos:

$$X = Y, \text{ cuando } x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

Definimos la suma de X e Y , y el producto de X por un número real α (que en este contexto llamamos escalar), mediante

$$i) X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$ii) \alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Es inmediato verificar las siguientes propiedades, dada en el siguiente

Teorema (Propiedades de la suma y el producto)

Sean X, Y, Z vectores de \mathbb{R}^n y α, β números reales o escalares, todos arbitrarios, que verifican las siguientes propiedades:

1. Conmutativa: $X + Y = Y + X$.
2. Asociativa: $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$.
3. Existencia de vector neutro aditivo
 \exists el vector $0 = \theta = (0, \dots, 0) / X + \theta = \theta + X = X$.
4. Existencia del vector opuesto:
 \exists el vector opuesto $-X = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ tal que verifica

$$X + (-X) = (-X) + X = \theta$$
.
5. Asociativa del producto: $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$
6. Distributivas:
 - i) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$
 - ii) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$
7. Existencia de neutro multiplicativo:

\exists el vector neutro multiplicativo $1 \in \mathbb{R}$, tal que $1X = X1 = X$

Este teorema muestra que la cuaterna $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \times)$, con \mathbb{R}^n el conjunto de los vectores, \mathbb{R} el de los números reales, y $+$, \times la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector, antes definidos, conforman un espacio vectorial.

Nota.

1. El conjunto de n vectores dado por:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), e_n = (0, 0, \dots, 1),$$

se llama base canónica de \mathbb{R}^n , y dado un vector

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ podemos escribir}$$

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

2. El espacio vectorial a considerar es:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}}$$

Los elementos de dicho espacio son vectores columna $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

3. Las nociones topológicas siguientes se van a definir en \mathbb{R}^n , aunque muchas de ellas no requieren que el conjunto que interviene en las definiciones sea un espacio vectorial.
4. En las definiciones de límite y continuidad intervienen la noción de intervalo abierto centrado en un punto, así como el valor absoluto de la diferencia de dos números reales que no es sino la distancia entre ellos. Asimismo, el concepto de límite es común a la

continuidad, derivabilidad e integración. Nuestro objetivo el trabajo de investigación será extrapolar estos conceptos al caso de una función $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde

$$\vec{f}(X) = (\vec{f}_i(X)), \forall i = 1, 2, \dots, m \text{ tal que } n, m \in \mathbb{N}, X = \vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\vec{f}_1(X), \vec{f}_2(X), \dots, \vec{f}_m(X))$$

5. En el presente trabajo generalizaremos el espacio \mathbb{R}^n a los conceptos topológicos de valor absoluto, intervalo, conjunto abierto, cerrado, punto interior, punto de adherencia, etcétera
6. La introducción de una topología en un espacio \mathbb{R}^n es de mucha utilidad a la hora de definir las nociones de límite y continuidad de funciones dependientes de varias variables reales.
7. El concepto de norma es la generalización del concepto de valor absoluto. Así, sabemos que la distancia entre dos números reales $x, y \in \mathbb{R}$ viene dado por

$$d(x, y) = |y - x|$$

Comencemos definiendo en general que es

Producto escalar o Producto interno

En un espacio vectorial real, \mathbb{R}^n , se llama *producto escalar* a una aplicación de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sobre \mathbb{R} , que a cada par de vectores \vec{X}, \vec{Y} de \mathbb{R}^n le hace corresponder un número real que se representa por $\vec{X} \cdot \vec{Y}$ o $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$ mediante

$$\begin{aligned} \vec{X} \cdot \vec{Y} = \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle &= \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \end{aligned}$$

Propiedades

- i) Positividad: $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \geq 0, \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0 \leftrightarrow \vec{X} = 0, \vec{X} \in \mathbb{R}^n$.
- ii) Homogeneidad: $\langle \alpha \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \alpha \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$
- iii) Bilinealidad $\begin{cases} (\alpha \vec{X} + \beta \vec{Y}) \cdot \vec{Z} = \alpha (\vec{X} \cdot \vec{Z}) + \beta (\vec{Y} \cdot \vec{Z}) \\ \vec{X} \cdot (\alpha \vec{Y} + \beta \vec{Z}) = \alpha (\vec{X} \cdot \vec{Y}) + \beta (\vec{X} \cdot \vec{Z}) \end{cases}, \forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- iv) Conmutativo: $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \langle \vec{Y}, \vec{X} \rangle, \forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$.

Nota

1. El producto escalar no es una ley de composición interna, pues el resultado del producto escalar de dos vectores no es un vector, sino un escalar.
2. Hay muchas aplicaciones que pueden ser producto escalar, pero el producto escalar con el que se trabajará es el siguiente:

$$\begin{aligned}\vec{X} \cdot \vec{Y} &= \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n\end{aligned}$$

3. Al espacio vectorial real de dimensión finita, n , en el que esté definido un producto escalar, $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$, se le denomina *espacio vectorial euclídeo n dimensional*
4. El producto interno que acabamos de definir nos permite considerar la norma euclidiana de un vector $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n .

Norma euclídea

Se llama norma de un vector $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ a una aplicación de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R} , es decir

$$\begin{aligned}\|\vec{X}\|: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \vec{X} &\mapsto \|\vec{X}\|\end{aligned}$$

de forma que a \vec{X} se le hace corresponder un escalar que se representa por $\|\vec{X}\|$ norma de \vec{X} , la definimos mediante

$$\begin{aligned}\|\vec{X}\| &= \sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\end{aligned}$$

debiendo cumplir dicha aplicación las siguientes propiedades que la enunciamos en el siguiente teorema

Teorema

Sean \vec{X} un vector de \mathbb{R}^n y α un número real o escalar, ambos arbitrarios. Se verifican las siguientes propiedades:

(N1) **Positividad:** $\|\vec{X}\| \geq 0$, $\|\vec{X}\| = 0$ si y sólo si $\vec{X} = \theta$.

(N2) **Homogeneidad:** $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\|\alpha \vec{X}\| = |\alpha| \|\vec{X}\|, \forall \vec{X} \in \mathbb{R}^n / \vec{X} \neq \theta$$

(N3) **Desigualdad triangular**

$$\|\vec{X} + \vec{Y}\| \leq \|\vec{X}\| + \|\vec{Y}\|, \forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n.$$

Nota.

1. El par $(\mathbb{R}^n, \|\vec{X}\|)$ se llama Espacio vectorial normado

2. De la desigualdad triangular obtenemos

$$|\|\vec{X}\| - \|\vec{Y}\|| \leq \|\vec{X} - \vec{Y}\|$$

3. Hay aplicaciones que son norma al cumplir estas propiedades, pero la que se va a utilizar es la norma euclídea definida a partir del producto escalar mencionado antes.

La norma euclídea es una aplicación definida de un espacio euclídeo sobre \mathbb{R}^n , de tal forma que a un vector cualquiera de dicho espacio, $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$, se le hace corresponder un escalar igual a la raíz cuadrada con signo positivo del producto escalar del vector \vec{X} por sí mismo, es decir

$$\|\vec{X}\| = +\sqrt{\vec{X} \cdot \vec{X}} = +\sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle}$$

Además de cumplir las tres propiedades anteriores, la norma euclídea cumple una cuarta propiedad:

(N4) **Desigualdad de Cauchy Schwarz:**

$$|\vec{X} \cdot \vec{Y}| \leq \|\vec{X}\| \|\vec{Y}\|, \forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$$

Esta última propiedad se determina mediante el siguiente teorema

Teorema: (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Dados dos vectores $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$, se verifica

$$|\vec{X} \cdot \vec{Y}| \leq \|\vec{X}\| \|\vec{Y}\|, \forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$$

Además, se verifica que $|\vec{X} \cdot \vec{Y}| = \|\vec{X}\| \|\vec{Y}\|$ si, y sólo si los vectores \vec{X}, \vec{Y} son linealmente dependientes, es decir, existen escalares α, β , no simultáneamente nulos, tales que:

$$\alpha \vec{X} + \beta \vec{Y} = 0$$

Demostración.

Supongamos que \vec{X} e \vec{Y} son dos vectores no nulos (si alguno es nulo, se verifica la igualdad del teorema).

Para un escalar α , aplicando la positividad (N1), tenemos

$$0 \leq \langle \alpha \vec{X} + \vec{Y}, \alpha \vec{X} + \vec{Y} \rangle = \alpha^2 \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle + 2\alpha \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle + \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle$$

Luego, el discriminante del polinomio de segundo grado en α debe ser no positivo, es decir

$$\Delta = 4 \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle^2 - 4 \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle \leq 0$$

$$4 \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle^2 \leq 4 \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle$$

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle^2 \leq \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle$$

$$\therefore |\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle| \leq \|\vec{X}\| \|\vec{Y}\|$$

Además, $\exists \alpha$ tal que $\alpha \vec{X} + \vec{Y} = 0$, es decir

$$\begin{aligned} \langle \alpha \vec{X} + \vec{Y}, \alpha \vec{X} + \vec{Y} \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta &= 4\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle^2 - 4\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow |\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle| &= \|\vec{X}\| \|\vec{Y}\| \end{aligned}$$

Esto completa la demostración.

Demostración de la propiedad triangular (N3).

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle| \leq \|\vec{X}\| \|\vec{Y}\|$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \|\vec{X} + \vec{Y}\|^2 &= \langle \vec{X} + \vec{Y}, \vec{X} + \vec{Y} \rangle = \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle + 2\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle + \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle \\ &\leq \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle + 2\|\vec{X}\| \|\vec{Y}\| + \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle \\ &= \|\vec{X}\|^2 + 2\|\vec{X}\| \|\vec{Y}\| + \|\vec{Y}\|^2 \\ &= [\|\vec{X}\|^2 + \|\vec{Y}\|^2]^2 \end{aligned}$$

$$\|\vec{X} + \vec{Y}\| \leq \|\vec{X}\| + \|\vec{Y}\|$$

Definición (Norma usual).

Una norma en \mathbb{R}^n es una función $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que verifica las propiedades (N1), (N2) y (N3) del teorema de norma euclídea.

La norma euclídea definida como:

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

es la norma usual, y escribimos también:

$$\|\vec{X}\| = \|\vec{X}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

(el 2 recuerda los cuadrados de la cantidad sub radical), cuando escribimos norma nos referimos a la norma usual

Ejemplos de normas en \mathbb{R}^n

1. La norma del máximo, o norma infinito, que es el número real $\|\vec{X}\|_\infty$ definido como

$$\begin{aligned} \|\vec{X}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \\ &= \sup_{i=1, \dots, n} |x_i| \end{aligned}$$

2. La norma de la suma, o norma-uno, que es el número real $\|\vec{X}\|_1$ definido como

$$\begin{aligned}\|\vec{X}\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i|\end{aligned}$$

Por lo que podemos afirmar que los pares $(\mathbb{R}^n, \|\vec{X}\|_2)$,

$(\mathbb{R}^n, \|\vec{X}\|_\infty)$, $(\mathbb{R}^n, \|\vec{X}\|_1)$ son espacios vectoriales normados.

4. La norma p que es el número real $\|\vec{X}\|_p$ definido como

$$\begin{aligned}\|\vec{X}\|_p &= \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p} \\ &= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}\end{aligned}$$

$\forall \vec{X} \in \mathbb{R}^n$, p número natural, $p \geq 1$

continuamos con el desarrollo de la existencia de distintas normas

En \mathbb{R}^n (con $n \geq 2$) existen 3 distancias especialmente muy importantes, asociadas a las normas:

$\|\vec{X}\|_2$, $\|\vec{X}\|_1$ y $\|\vec{X}\|_\infty$, respectivamente:

a) $d_2(\vec{X}, \vec{Y}) = d_2((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} = \|\vec{X}\|_2$$

conocida también como distancia usual o distancia euclídea.

b) $d_1(\vec{X}, \vec{Y}) = d_1((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \|\vec{X}\|_1$$

c) $d_\infty(\vec{X}, \vec{Y}) = d_\infty((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = \|\vec{X}\|_\infty,$$

La existencia de diversas normas en \mathbb{R}^n motiva la introducción de la siguiente noción

Definición. (Normas equivalentes).

Sean $N_1 = \|\cdot\|$ y $N_2 = \|\cdot\|^*$ dos normas definidas en \mathbb{R}^n . Decimos que N_1 es equivalente a N_2 , si es que existen dos reales positivos α y β , tales que:

$$\alpha \|\cdot\| \leq \|\cdot\|^* \quad \text{y} \quad \|\cdot\|^* \leq \beta \|\cdot\|$$

Nota.

De la definición podemos demostrar que dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|^*$ del espacio vectorial \mathbb{R}^n son equivalentes si y sólo si existen constantes reales positivas α y β , tales que

$$\alpha\|\cdot\| \leq \|\cdot\|^* \leq \beta\|\cdot\|, \forall \vec{X} \text{ en } \mathbb{R}^n$$

o

$$\alpha N_1(\vec{X}) \leq N_2(\vec{X}) \leq \beta N_1(\vec{X}), \forall \vec{X} \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración

Recordemos que por definición de dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|^*$ del espacio vectorial \mathbb{R}^n son equivalentes si y solo si las correspondientes distancias inducidas determinan la misma topología, es decir si denotamos con $d(\vec{X}, \vec{Y})$ y $d^*(\vec{X}, \vec{Y})$ a las distancias asociadas a estas normas, entonces

$$\alpha d(\vec{X}, \vec{Y}) \leq d^*(\vec{X}, \vec{Y}) \text{ y } d^*(\vec{X}, \vec{Y}) \leq \beta d(\vec{X}, \vec{Y}), \forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$$

Ahora bien si denotamos con $B_r(\vec{Z})$ y $B_r^*(\vec{Z})$ a las bolas abiertas de centro \vec{Z} y radio r con respecto a las métricas $d(\vec{X}, \vec{Y})$ y $d^*(\vec{X}, \vec{Y})$ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} B_{\frac{r}{\alpha}}(\vec{Z}) &= \{\vec{X} \in \mathbb{R}^n: d(\vec{X}, \vec{Z}) < \frac{r}{\alpha}\} \subseteq \{\vec{X} \in \mathbb{R}^n: d^*(\vec{X}, \vec{Z}) < r\} \\ &= B_r^*(\vec{Z}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B_{\frac{r}{\beta}}^*(\vec{Z}) &= \{\vec{X} \in \mathbb{R}^n: d^*(\vec{X}, \vec{Z}) < \frac{r}{\beta}\} \subseteq \{\vec{X} \in \mathbb{R}^n: d(\vec{X}, \vec{Z}) < r\} \\ &= B_r(\vec{Z}) \end{aligned}$$

constituyen dos bases de una misma topología en \mathbb{R}^n , puesto que un subconjunto A de \mathbb{R}^n es acotado con respecto a $d(\vec{X}, \vec{Y})$ si y sólo si lo es con respecto a $d^*(\vec{X}, \vec{Y})$, los entonos definidos por $d(\vec{X}, \vec{Y})$ y $d^*(\vec{X}, \vec{Y})$ son los mismos y por el teorema de caracterización de distancias equivalentes por bolas, concluimos que las dos normas generan la misma topología en \mathbb{R}^n , luego son equivalentes.

Aplicando la definición, normas equivalentes es posible verificar la relación

$$\|\vec{X}\|_{\infty} \leq \|\vec{X}\|_2 \leq \|\vec{X}\|_1 \leq n\|\vec{X}\|_{\infty}, \forall \vec{X} \text{ en } \mathbb{R}^n$$

En efecto, empezaremos verificando la segunda desigualdad, es decir $\|\vec{X}\|_2 \leq \|\vec{X}\|_1$. para lo cual utilizaremos la desigualdad triangular.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \|\vec{X}\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1|^2} + \sqrt{|x_2|^2} + \dots + \sqrt{|x_n|^2} \\ &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_j| + \dots + |x_n| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| = \|\vec{X}\|_1 \end{aligned}$$

$$\|\vec{X}\|_2 \leq \|\vec{X}\|_1$$

Verificaremos ahora que: $\|\vec{X}\|_\infty \leq \|\vec{X}\|_1$

Sabemos que:

$$\|\vec{X}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_j| + \dots + |x_n|$$

Entonces $|x_j| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_j| + \dots + |x_n|$

$$\begin{aligned} \|\vec{X}\|_1 &\geq |x_j| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_j|, \dots, |x_n|\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \\ &= \|\vec{X}\|_\infty \end{aligned}$$

$$\|\vec{X}\|_1 \geq \|\vec{X}\|_\infty$$

$$\|\vec{X}\|_\infty \leq \|\vec{X}\|_1$$

Ahora se probará que: $\|\vec{X}\|_1 \leq n\|\vec{X}\|_\infty$

Tenemos que

$$n - \text{elementos}, n - \text{veces} \quad \begin{cases} |x_j| \geq |x_1| \\ |x_j| \geq |x_2| \\ \vdots \\ |x_j| \geq |x_n| \end{cases}$$

$$\underbrace{|x_j| + |x_j| + \dots + |x_j|}_{n\text{-elementos}} \geq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$n|x_j| \geq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|\vec{X}\|_1$$

$$\|\vec{X}\|_1 \leq n|x_j|$$

$$\|\vec{X}\|_1 \leq n\|\vec{X}\|_\infty$$

Lo que nos permite concluir que las tres normas son equivalentes, es decir

$$\|\vec{X}\|_\infty \leq \|\vec{X}\|_2 \leq \|\vec{X}\|_1 \leq n\|\vec{X}\|_\infty, \quad \forall \vec{X} \text{ en } \mathbb{R}^n$$

También podemos demostrar que

$$\|\vec{X}\|_\infty \leq \|\vec{X}\|_1 \leq n\|\vec{X}\|_\infty, \quad \forall \vec{X} \text{ en } \mathbb{R}^n$$

En efecto

Tenemos que $\|\vec{X}\|_i = \|(|x_1|, \dots, |x_n|)\|_i$ para $i = 1, 2, \dots, \infty$

Pero vemos que

$$\|\vec{X}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_j| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|\vec{X}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$\|\vec{X}\|_\infty = \max \{|x_i| / i = 1, 2, \dots, n\}$$

Notar que para $n = 1$ las tres normas coinciden con el valor absoluto

Por lo que son normas

$$\begin{aligned} \|\vec{X}\|_\infty &= \sqrt{\|\vec{X}\|_\infty^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2} = \|\vec{X}\|_2 \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i < j} \|x_i\| \|x_j\|} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|\right)^2} = \|\vec{X}\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|\vec{X}\|_\infty = n \|\vec{X}\|_\infty \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad se puede demostrar que

$$\|\vec{X}\|_\infty \leq \|\vec{X}\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|\vec{X}\|_\infty, \quad \forall \vec{X} \text{ en } \mathbb{R}^n, (p = 1, 2)$$

y concluir que las tres normas son equivalentes

Hemos obtenido distintas formas de medir en \mathbb{R}^n . Sin embargo, ¿dependen los resultados de la norma escogida? La respuesta es No. De hecho en \mathbb{R}^n todas las normas son equivalentes, es decir, dadas $\|\vec{X}\|_1$ y $\|\vec{X}\|_2$ normas en \mathbb{R}^n , existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\|\vec{X}\|_1 \leq \alpha \|\vec{X}\|_2 \quad \text{y} \quad \|\vec{X}\|_2 \leq \beta \|\vec{X}\|_1$$

La definición de límite será independiente de la norma elegida. Por ello, a partir de ahora utilizaremos la norma euclídea $\|\vec{X}\|_2$. También es de señalar que la distancia euclídea entre dos vectores $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ viene dada por la fórmula

$$\begin{aligned} d(\vec{X}, \vec{Y}) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \\ &= \|\vec{Y} - \vec{X}\|_2 \end{aligned}$$

El concepto análogo al de intervalo en el caso multidimensional es el de bola, este permitirá desarrollar la topología de \mathbb{R}^n .

Bola abierta o disco abierto

Fijada una norma $\|\vec{X}\|$ de \mathbb{R}^n , dado un punto $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, se define la bola abierta o disco abierto de centro \vec{X} y radio r como el conjunto

$$B(\vec{X}, r) = \{\vec{Y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{X} - \vec{Y}\| < r\}$$

Análogamente

Bola cerrada

Fijada una norma $\|\vec{X}\|$ de \mathbb{R}^n , dado un punto $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, se define la bola cerrada de centro \vec{X} y radio r como el conjunto

$$B[\vec{X}, r] = \overline{B}(\vec{X}, r) = \{\vec{Y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{X} - \vec{Y}\| \leq r\}$$

Bola reducida o bola abierta perforada

Fijada una norma $\|\vec{X}\|$ de \mathbb{R}^n , dado un punto $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, se define la bola abierta o disco abierto de centro \vec{X} y radio r como el conjunto

$$\begin{aligned} B^*(\vec{X}, r) &= \{\vec{Y} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\vec{X} - \vec{Y}\| < r\} \\ &= B(\vec{X}, r) - \{\vec{X}\} \end{aligned}$$

El aspecto grafico que tienen $\|\vec{X}\|_1$, $\|\vec{X}\|_2$, $\|\vec{X}\|_\infty$ para las normas cuando $n = 1, 2$, no son más que el concepto de intervalo cuando la norma elegida es el valor absoluto sobre \mathbb{R}

Para $n = 1$, es decir en \mathbb{R}

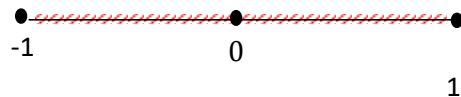
Bola abierta de centro cero y radio 1

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\} \\ &= \langle -1, 1 \rangle \end{aligned}$$



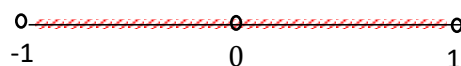
Bola cerrada de centro 0 y radio 1

$$\begin{aligned} B[0,1] &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\} \\ &= [-1, 1] \end{aligned}$$



Bola abierta reducida de centro 0 y radio 1

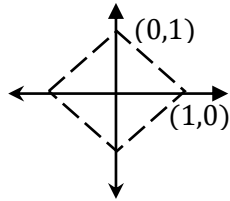
$$\begin{aligned} B^*(0,1) &= \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1 - \{0\}\} \\ &= \langle -1, 1 \rangle - \{0\} \end{aligned}$$



Para $n = 2$, es decir en \mathbb{R}^2

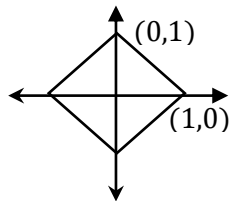
Bola abierta de centro cero y radio 1 en $\|\vec{X}\|_1$

$$B(0,1) = \{\vec{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$



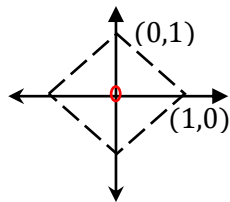
Bola cerrada de centro cero y radio 1 en $\|\vec{X}\|_1$

$$B[0,1] = \{\vec{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$



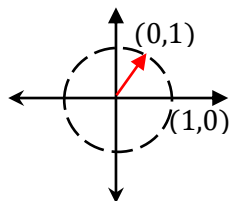
Bola abierta perforada centro cero y radio 1 en $\|\vec{X}\|_1$

$$B^*(0,1) = \{\vec{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\} - \{(0,0)\}$$



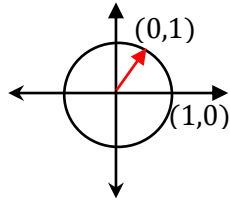
Bola abierta de centro cero y radio 1 en $\|\vec{X}\|_2$

$$B(0,1) = \{\vec{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d(\vec{X}, \vec{0}) = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$$



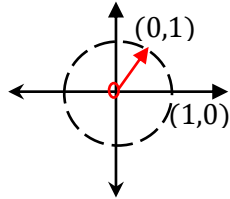
Bola cerrada de centro cero y radio 1 en $\|\vec{X}\|_2$

$$B[0,1] = \{\vec{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d(\vec{X}, \vec{0}) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$



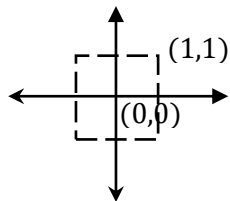
Bola abierta perforada de centro cero y radio 1 en $\|\vec{X}\|_2$

$$B^*(0,1) = \{\vec{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d(\vec{X}, \vec{0}) = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} - \{\vec{0}\}$$



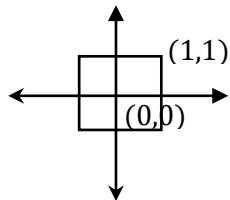
Bola abierta de centro cero y radio 1 en $\|\vec{X}\|_\infty$

$$B(0,1) = \{\vec{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\}$$



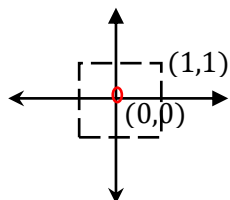
Bola cerrada de centro cero y radio 1 en $\|\vec{X}\|_\infty$

$$B[0,1] = \{\vec{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$$



Bola abierta perforada de centro cero y radio 1 en $\|\vec{X}\|_\infty$

$$B^*(0,1) = \{\vec{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\} - \{\vec{0}\}$$



sabiendo lo que es una bola abierta en \mathbb{R}^n , podemos construir los conceptos fundamentales que conforman la topología de espacios métricos.

El primero de estos conceptos es el de conjunto abierto que básicamente son los bloques de construcción de un espacio topológico.

Definición.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice que es abierto si y sólo si o bien $A = \emptyset$, o bien, para cada $\vec{p} \in A$, $\exists B(\vec{p}, r) \subset A$.

Es decir si para cada $\vec{p} \in A$ existe $r > 0$ tal que la bola de centro \vec{p} y radio r esta íntegramente contenida en A .

Definición.

Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$, se dice que es cerrado, si su complemento es un conjunto abierto, es decir

$$F \text{ es cerrado si } F^c = \mathbb{R}^n - F = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^n : \vec{X} \notin F\}$$

es abierto

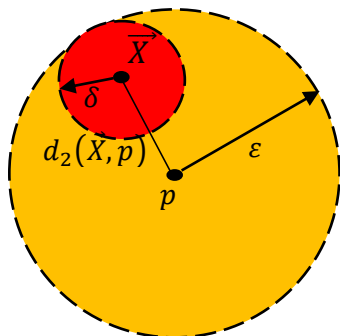
Veamos quienes son los abiertos en la topología de \mathbb{R}^n generada por la norma $\|\vec{X}\|_2$

Ejemplo.

El espacio \mathbb{R}^n y el conjunto vacío son conjunto abierto.

En efecto pues debemos demostrar que cualquier $\vec{X} \in B_2(p, \varepsilon)$, existe $\delta > 0$, tal que $B_2(\vec{X}, \delta) \subset B_2(p, \varepsilon)$

Haremos un gráfico el cual nos ayudara a proponer algún $\varepsilon > 0$



Elijamos $\delta = \varepsilon - \|\vec{X} - p\|_2$.

Podemos ver que el δ cumple para $B_2(\vec{X}, \delta) \subset B_2(p, \varepsilon)$

Sea $\vec{Y} \in B_2(\vec{X}, \delta)$. Se quiere probar que $\|\vec{Y} - p\|_2 < \varepsilon$ para lo cual usaremos la desigualdad triangular

$$\|\vec{Y} - p\|_2 = \|(\vec{Y} - \vec{X}) + (\vec{X} - p)\|_2$$

$$\leq \|\vec{Y} - \vec{X}\|_2 + \|\vec{X} - p\|_2$$

de donde se tiene que:

$$\|\vec{Y} - \vec{X}\|_2 < \delta, \text{ puesto que } \vec{Y} \in B_2(\vec{X}, \delta)$$

$$\text{Luego } \|\vec{Y} - p\|_2 \leq \|\vec{Y} - \vec{X}\|_2 + \|\vec{X} - p\|_2$$

$$< \delta + \|\vec{X} - p\|_2 = (\varepsilon - \|\vec{X} - p\|_2) + \|\vec{X} - p\|_2 = \varepsilon$$

es decir $\vec{Y} \in B_2(p, \varepsilon)$

Demostraremos que el conjunto ϕ es un conjunto abierto

Lo haremos por reducción al absurdo

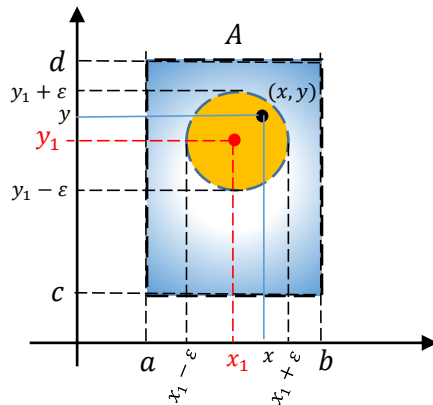
Asumamos que ϕ no es un conjunto abierto, por lo tanto existe un elemento $\vec{X} \in \phi$ para el cual no es posible hallar una bola abierta $B(\vec{X}, r)$ contenida en ϕ , pero esto no es posible ya que ϕ no posee elementos, por lo tanto vacío es abierto.

Ejemplo.

Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$. Demostrar que A es un conjunto abierto

Demostración.

Sea $\vec{X} = (x_1, y_1) \in A$ entonces $a < x_1 < b, c < y_1 < d$



Definimos $\varepsilon = \min \{x_1 - a, b - x_1, y_1 - c, d - y_1\}$. Por tanto si $(x, y) \in B(\vec{X}, \varepsilon)$ debe de ocurrir que

$$a < x_1 - \varepsilon < x < x_1 + \varepsilon < b$$

y

$$c < y_1 - \varepsilon < y < y_1 + \varepsilon < d$$

lo que indica que $(x, y) \in A$, por lo tanto $B(\vec{X}, \varepsilon) \in A$

y en consecuencia A es un conjunto abierto

Proposición

Toda bola abierta en \mathbb{R}^n es un conjunto abierto

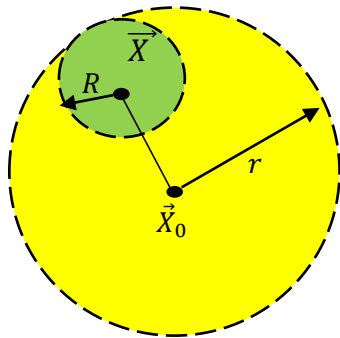
Demostración

Sea $\vec{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Demostraremos que $B(\vec{X}_0, r)$ es un conjunto abierto, es decir se probará que para cada $\vec{X} \in B(\vec{X}_0, r)$ existe una bola abierta $B(\vec{X}, r)$ contenida a su vez en la bola abierta $B(\vec{X}_0, r)$.

Sea pues $\vec{X} \in B(\vec{X}_0, r)$ y consideraremos $R = r - \|\vec{X} - \vec{X}_0\|$

Como $\vec{X} \in B(\vec{X}_0, r)$ se tiene entonces que $\|\vec{X} - \vec{X}_0\| < r$. Por lo tanto $R > 0$

Mostraremos ahora que la bola $B(\vec{X}, R) \subset B(\vec{X}_0, r)$



Sea $\vec{Y} \in B(\vec{X}, r)$ Por definición se tiene que $\|\vec{Y} - \vec{X}\| < R$

Por lo tanto $\|\vec{Y} - \vec{X}_0\| = \|\vec{Y} - \vec{X} + \vec{X} - \vec{X}_0\|$

$\leq \|\vec{Y} - \vec{X}\| + \|\vec{X} - \vec{X}_0\|$

$< R + \|\vec{X} - \vec{X}_0\|$

Lo que prueba que $\vec{Y} \in B(\vec{X}_0, r)$

Teorema.

Si A_1, A_2, \dots, A_n es una familia finita de conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n entonces se cumple que

$$\bigcap_{i=1}^n A_i$$

es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n .

Demostración

Por inducción

i) Para $n = 2$

Si A_1 y A_2 son abiertos de \mathbb{R}^n entonces $A_1 \cap A_2$ es abierto en \mathbb{R}^n si y sólo si

$\forall \vec{X} \in (A_1 \cap A_2)$ existe $B(\vec{X}, r) \subset (A_1 \cap A_2)$.

En efecto: $\vec{X} \in (A_1 \cap A_2) \rightarrow \vec{X} \in A_1 \wedge \vec{X} \in A_2$

Si $\vec{X} \in A_1$ y A_1 es abierto $\rightarrow \exists B(\vec{X}, r_1): B(\vec{X}, r_1) \subset A_1$

Si $\vec{X} \in A_2$ y A_2 es abierto $\rightarrow \exists B(\vec{X}, r_2): B(\vec{X}, r_2) \subset A_2$

Como $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$, entonces tenemos que existe $r = \min\{r_1, r_2\}$, es decir $r \leq r_1, r \leq r_2$.

Como:

$$\begin{cases} r \leq r_1 \rightarrow \exists B(\vec{X}, r_1) \\ r \leq r_2 \rightarrow \exists B(\vec{X}, r_2) \end{cases} \rightarrow \exists B(\vec{X}, r) \subset (A_1 \cap A_2)$$

Luego $(A_1 \cap A_2)$ es un conjunto abierto

ii) Para $n = h$

Supongamos que se cumple para $n = h$, es decir si

A_1, A_2, \dots, A_h es abierto, entonces

$$\bigcap_{i=1}^h A_i$$

es abierto

iii) En base al paso ii) debemos demostrar que se cumple para $n = h + 1$

Es decir, si $A_1, A_2, \dots, A_h, A_{h+1}$ es abierto entonces

$$\bigcap_{i=1}^{h+1} A_i$$

es abierto.

Sabemos que

$$\bigcap_{i=1}^{h+1} A_i = \bigcap_{i=1}^h A_i \bigcap A_{h+1}$$

abierto abierto

Como se cumple para $n = h + 1$, entonces se cumple $\forall n$.

Proposición

Toda bola cerrada en \mathbb{R}^n es un conjunto cerrado

Demostración

Sea $\vec{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$. Demostraremos que $\overline{B}(\vec{X}_0, r)$ que es un conjunto cerrado, es decir $\mathbb{R}^n - \overline{B}(\vec{X}_0, r)$ su complemento es un conjunto abierto.

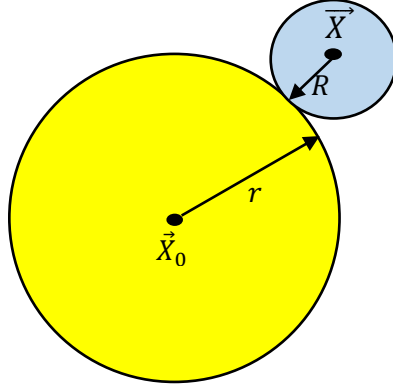
Sea pues $\vec{X} \in \mathbb{R}^n - \overline{B}(\vec{X}_0, r)$, se mostrará que: $\exists B(\vec{X}, R) \subset \mathbb{R}^n - \overline{B}(\vec{X}_0, r)$

Como $\vec{X} \notin \overline{B}(\vec{X}_0, r)$ se tiene entonces que $\|\vec{X} - \vec{X}_0\| > r$

Definamos $R = \|\vec{X} - \vec{X}_0\| - r > 0$ esto equivale a

$$r = \|\vec{X} - \vec{X}_0\| - R.$$

Veamos que $B(\vec{X}, R) \subset \mathbb{R}^n - \overline{B}(\vec{X}_0, r)$



En efecto sea $\vec{Y} \in B(\vec{X}, R)$ se tiene entonces que $\|\vec{Y} - \vec{X}\| < R$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto } \|\vec{X} - \vec{X}_0\| &= \|\vec{X} - \vec{Y} + \vec{Y} - \vec{X}_0\| \\ &\leq \|\vec{X} - \vec{Y}\| + \|\vec{Y} - \vec{X}_0\| \\ &< R + \|\vec{Y} - \vec{X}_0\| \\ \|\vec{X} - \vec{X}_0\| &< R + \|\vec{Y} - \vec{X}_0\| \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\vec{X} - \vec{X}_0\| - R < \|\vec{Y} - \vec{X}_0\|$ es decir

$$r < \|\vec{Y} - \vec{X}_0\|$$

Lo que significa $\vec{Y} \notin \overline{B}(\vec{X}_0, r)$, es decir $\vec{Y} \in \mathbb{R}^n - \overline{B}(\vec{X}_0, R)$

Proposición

Toda esfera en \mathbb{R}^n es un conjunto cerrado

Demostración

Sea $\vec{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$. Demostraremos que la esfera $S(\vec{X}_0, r)$ que es un conjunto cerrado, mostrando que su complemento $\mathbb{R}^n - S(\vec{X}_0, r)$ es un conjunto abierto.

Sea pues $\vec{X} \in \mathbb{R}^n - S(\vec{X}_0, r)$, se mostrará que: $\exists B(\vec{X}, R) \subset \mathbb{R}^n - S(\vec{X}_0, r)$

Como $\vec{X} \notin S(\vec{X}_0, r)$ se tiene entonces que $\|\vec{X} - \vec{X}_0\| \neq r$, por lo que tendremos que analizar dos casos

i) $\|\vec{X} - \vec{X}_0\| < r$

ii) $\|\vec{X} - \vec{X}_0\| > r$

Demostración de i).

Como $\vec{X} \in B(\vec{X}_0, r)$ y esta bola es un conjunto abierto, entonces existe una bola abierta $B(\vec{X}, R) \subset B(\vec{X}, r)$

Así que $\forall \vec{Z} \in B(\vec{X}_0, R)$ se cumple $\|\vec{Z} - \vec{X}\| < r$

Luego \vec{Z} no puede ser elemento de la esfera $S(\vec{X}_0, r)$, es decir $\vec{Z} \in \mathbb{R}^n - S(\vec{X}_0, r)$

Demostración de ii).

La desigualdad $\|\vec{X} - \vec{X}_0\| > r$ significa que \vec{X} está en el complemento de la bola cerrada $\overline{B}(\vec{X}_0, r)$ y como esta bola es un conjunto cerrado, entonces su complemento es abierto.

Por lo tanto $\exists B(\vec{X}_0, R) \subset \mathbb{R}^n - \overline{B}(\vec{X}_0, r)$

Los elementos $\vec{Z} \in B(\vec{X}_0, R)$ no están en la bola cerrada $\overline{B}(\vec{X}_0, r)$, es decir elemento $\vec{Z} \in B(\vec{X}_0, R)$ satisface $\|\vec{Z} - \vec{X}\| > r$

Lo que significa $B(\vec{X}, R) \subset \mathbb{R}^n - S(\vec{X}_0, r)$

Definición.

Un elemento $\vec{X} \in A$ se dice que es un punto interior de A , si existe una bola abierta con centro en \vec{X} contenida en A , es decir $\exists r > 0 : B(\vec{X}, r) \subset A$.

Al conjunto de puntos interiores de A se le denomina interior del conjunto A y se le denota con el símbolo $\overset{\circ}{A}$, A° , $int(A)$

Definición

Dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se define el interior de D , y se denota como $Int(D)$, al mayor conjunto abierto contenido en D .

Definición.

Un elemento $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto exterior de A , si existe una bola abierta con centro en \vec{X} contenida en A^c , es decir si $\exists r > 0 : B(\vec{X}, r) \subset A^c$

Al conjunto de puntos exteriores de A se le denomina exterior del conjunto A y se le denota con $ext(A)$.

Definición.

Un elemento $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto frontera de A , si para toda bola abierta con centro en \vec{X} se tiene $\forall r > 0, B(\vec{X}, r) \cap A^c \neq \emptyset$ y $B(\vec{X}, r) \cap A \neq \emptyset$

Al conjunto de puntos frontera de A se le denomina frontera del conjunto A y se le denota con $Fr(A)$.

Definición

Dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se define la frontera de D , y se denota como $Fr(D)$, y se define como $Fr(D) = Cl(D) - Int(D)$

Definición.

Un elemento $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto adherente de A , si toda bola abierta con centro en \vec{X} tiene puntos de A

Al conjunto de puntos adherentes de A se le denomina adherencia o cerradura o clausura del conjunto A y se le denota con cualquiera de los símbolos \bar{A} , A^- , $adh(A)$.

Definición

Dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se define la clausura de D , y se denota como $Cl(D)$, y es el menor conjunto cerrado que contiene a D .

Proposición.

Para todo subconjunto A de \mathbb{R}^n , el \mathring{A} es un conjunto abierto

Demostración

Sea $\vec{X} \in \mathring{A}$. Por definición $\exists B(\vec{X}, r) \subset A$. Como la bola es un conjunto abierto entonces $B(\vec{X}, r) \subset \mathring{A}$

$\therefore \mathring{A}$ es un conjunto abierto

Proposición

Para todo subconjunto A de \mathbb{R}^n , \bar{A} es un conjunto cerrado

Demostración

Se mostrará que $(\bar{A})^c$ es un conjunto abierto

Sea $\vec{X} \in (\bar{A})^c$, como \vec{X} no es un punto adherente de A , existe un $r > 0$ tal que:

$$B(\vec{X}, r) \cap A = \emptyset$$

es decir $A \subset [B(\vec{X}, r)]^c$

Como $[B(\vec{X}, r)]^c$ es un conjunto cerrado, entonces $\bar{A} \subset [B(\vec{X}, r)]^c$

$\therefore \bar{A}$ es un conjunto cerrado

Proposición

Para todo subconjunto A de \mathbb{R}^n , $Fr(A)$ es un conjunto cerrado

Demostración

Se mostrará que $[Fr(A)]^c$ es un conjunto abierto

Si $\vec{X} \notin Fr(A)$ entonces $\vec{X} \in \mathring{A}$ o $\vec{X} \in Ext(A)$, en ambos casos existe un $r > 0$ tal que:

$$B(\vec{X}, r) \subset \text{int}(A) \quad \text{o} \quad B(\vec{X}, r) \subset \text{ext}(A)$$

Lo que implica que $[\text{Fr}(A)]^c$ es un conjunto abierto

$\therefore \text{Fr}(A)$ es un conjunto cerrado

Definición

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice acotado si y sólo si existe un número real positivo k tal que

$$\|\vec{X}\| \leq k, \forall \vec{X} \in A$$

A la clausura del conjunto D , se denota como $Cl(D)$, y es el menor conjunto cerrado que contiene a D .

Definición

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice compacto si y sólo si además de ser acotado es cerrado.

Definición

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$, se dice que \vec{X} es un punto de acumulación de A , si para todo número $r > 0$ se tiene que

$$B(\vec{X}, r) \cap A - \{\vec{X}\} \neq \emptyset. \quad \text{o} \quad B^*(\vec{X}, r) \cap A \neq \emptyset$$

Nota.

El conjunto de los puntos de acumulación se denota con A'

Se dirá que \vec{X} es un punto aislado de A si y sólo si es un punto $Cl(A)$ que no es de acumulación.

Funciones reales de varias variables

Sea $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$. Una función real en varias variables es una aplicación

$$F: \vec{X} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / F(\vec{X}) = (f_1(\vec{X}), \dots, f_m(\vec{X}))$$

donde $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $f_i(\vec{X}) = y_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$

son funciones reales en varias variables llamadas funciones coordenadas, es decir:

$$f_i: \vec{X} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / f_i(\vec{X}) = y_i$$

Por lo tanto: $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

Definición

Se llama dominio de la función F al conjunto

$$\begin{aligned} D(F) &= \{\vec{X} \in \mathbb{R}^n: \exists F(\vec{X}) \in \mathbb{R}^m\} \\ &= D(f_1(\vec{X})) \cap D(f_2(\vec{X})) \cap \dots \cap D(f_m(\vec{X})) \\ &= Df_1(\vec{X}) \cap Df_2(\vec{X}) \cap \dots \cap Df_m(\vec{X}) \end{aligned}$$

donde $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definición.

Dada una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : f(\vec{X}) = \omega$, se llama grafo de F al conjunto de puntos

$$\text{Graf}(F) = G(F) = \{(x_1, \dots, x_n, \omega) \in \mathbb{R}^{n+m} : \omega = f(\vec{X})\}$$

Definición.

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f(\vec{X}) = \omega$, se llama grafo de f al conjunto de puntos

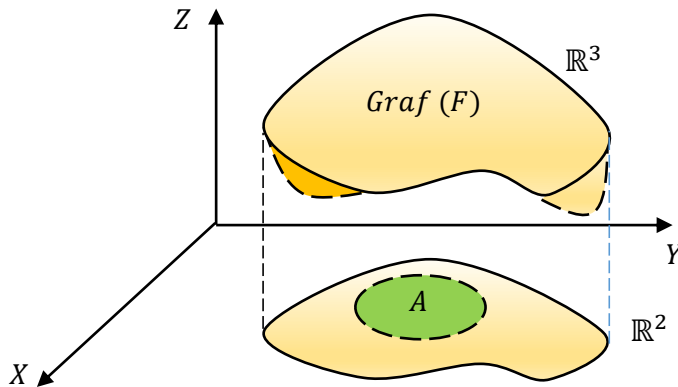
$$\text{Graf}(f) = G(f) = \{(x_1, \dots, x_n, \omega) \in \mathbb{R}^{n+1} : \omega = f(\vec{X})\}$$

Ejemplo.

En \mathbb{R}^2

Dada una función $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(\vec{X}) = z$, se llama grafo de f al conjunto de puntos

$$\text{Graf}(f) = G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

**Definición**

Dada una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(\vec{X}) = f(x, y) = z$, y dada una constante c se define la curva de nivel c de la superficie $z = f(x, y)$ como el conjunto de puntos

$$\mathcal{C}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(\vec{X}) = f(x, y) = c\}$$

Análogamente

Definición

Dada una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f(\vec{X}) = f(x, y, z) = \omega$, y dada una constante c se define la superficie de nivel c como el conjunto de puntos

$$\mathcal{S}_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{X}) = f(x, y, z) = c\}$$

Definición

Una sucesión en \mathbb{R}^n es cualquier lista infinita de vectores en \mathbb{R}^n . Es decir $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n, \dots$ algunos de los cuales o todos ellos pueden coincidir entre si. Por lo que

Llamamos sucesión en \mathbb{R}^n a una aplicación $\vec{X}: \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es decir, a una función con dominio en los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ y recorrido en \mathbb{R}^n , la que se puede escribir como

$$\vec{X} = (\vec{X}_k) = \{\vec{X}_k\} = (\vec{X}_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\vec{X}_k)_{k=1}^{\infty} = (x_1, x_2, \dots)$$

Donde $\vec{X}_k = \vec{X}(k)$ es el valor de la sucesión en el k -ésimo natural y se escribe

$$\vec{X}_k = (\vec{X}_{1k}, \vec{X}_{2k}, \dots, \vec{X}_{nk}) = (\vec{X}_{k1}, \vec{X}_{k2}, \dots, \vec{X}_{kn})$$

cuando indicamos las coordenadas de x_k

Dada una sucesión \vec{X} en \mathbb{R}^n , tenemos n sucesiones en \mathbb{R} que llaman sucesiones coordenadas o sucesiones componentes o sucesiones proyección que son

$$(\vec{X}_{1k})_{k \in \mathbb{N}}, (\vec{X}_{2k})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (\vec{X}_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$$

obtenidas al tomar las coordenadas del vector x_k . Recíprocamente, dadas n sucesiones de números reales podemos construir una sucesión en \mathbb{R}^n tomando como k -ésimo elemento de la sucesión el vector cuyas coordenadas son los k -ésimos elementos de las sucesiones reales.

Ejemplo

Considerando el espacio \mathbb{R}^3 , sea la sucesión $(\vec{X}_k)_{k=1}^{\infty}$ dada por

$$\vec{X}_k = \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \sqrt[k]{k}, \sqrt[k]{\frac{1}{k}} \right)$$

cuyos elementos son

$$\left\{ (2, 1, 1), \left(\frac{9}{4}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[2]{\frac{1}{2}} \right), \left(\frac{64}{27}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \right), \dots \right\}$$

Sus sucesiones componentes o sucesiones proyección son:

$$\vec{X}_{1k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \vec{X}_{2k} = \sqrt[k]{k}, \vec{X}_{3k} = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$$

Definición

Dada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : f(\vec{X}) = (f_1(\vec{X}), \dots, f_m(\vec{X}))$, y sean $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{L} \in \mathbb{R}^m$, entonces se dice que

$$\lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} f(\vec{X}) = \vec{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que si } 0 < d(\vec{X}, \vec{A}) < \delta \Rightarrow d(f(\vec{X}), \vec{L}) < \varepsilon$$

o

$$\lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} f(\vec{X}) = \vec{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que si } 0 < \|\vec{X} - \vec{A}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{X}) - \vec{L}\| < \varepsilon$$

Definición

Dada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : f(\vec{X}) = (f_1(\vec{X}), \dots, f_m(\vec{X}))$, y sea $\{\vec{X}_k\}_1^\infty$ una sucesión en \mathbb{R}^n , se dice que la sucesión converge a un vector $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$0 < \|\vec{X}_k - \vec{X}\| < \varepsilon, \forall k > N_0$$

En este caso diremos que la sucesión es convergente y que \vec{L} es el límite de la sucesión y se escribe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{X}_k = \vec{L}$$

Teorema de Sándwich para funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Sean $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

$$f(\vec{X}) \leq g(\vec{X}) \leq h(\vec{X}), \forall \vec{X} \in B(\vec{A}, r) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$$

Siendo $B(\vec{A}, r) = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^n: d(\vec{X}, \vec{A}) < r\}$

$$\lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} f(\vec{X}) = \lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} h(\vec{X}) = \ell \Rightarrow \lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} g(\vec{X}) = \ell$$

Límite por sucesiones para funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Sean $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$\lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} f(\vec{X}) = \ell \Leftrightarrow \forall$ sucesión $\{\vec{X}_n\}$ tal que

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{X}_n) = \ell$$

Nota.

1. Asumamos que existen sucesiones $\{\vec{X}_n\}, \{\vec{Y}_n\}$ que converjan a \vec{A} es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{X}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{Y}_n = \vec{A} \text{ y que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{X}_n) = \ell \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{Y}_n) = \ell'$$

siendo $\ell \neq \ell'$. Entonces $\nexists \lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} f(\vec{X})$

2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{X}_n = \vec{A}$ y $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{X}_n) \Rightarrow \nexists \lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} f(\vec{X})$

3. Si encontramos dos caminos $x_2 = \varphi_1(x_1)$ y $x_2 = \varphi_2(x_1)$ que pasa por \vec{A} y tales que

$$\lim_{\substack{\vec{X} \rightarrow \vec{A} \\ x_2 = \varphi_1(x_1)}} f(\vec{X}) = \ell_1 \text{ y } \lim_{\substack{\vec{X} \rightarrow \vec{A} \\ x_2 = \varphi_2(x_1)}} f(\vec{X}) = \ell_2$$

con $\ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow \nexists \lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} f(\vec{X})$

Funciones continuas en un punto

Sea un punto del dominio de definición de una función. La idea intuitiva de función continua en este punto, es la de una función que a pequeñas variaciones de la variable corresponden variaciones arbitrariamente pequeñas de la función. Si la función está definida en D y el punto considerado es aislado en D no existe de hecho pequeñas variaciones de la variable y la función siempre se considera continua en estos puntos. El concepto es significativo cuando el punto es de acumulación de D . En este caso equivale a decir que el límite coincide con el valor de la función en el punto.

Definición

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se dice que f es continua en \vec{A}

$$\text{si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que si } 0 < d(\vec{X}, \vec{A}) < \delta \Rightarrow |f(\vec{X}) - f(\vec{A})| < \varepsilon$$

Nota.

1. f es continua en $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ si $\lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} f(\vec{X}) = f(\vec{A})$. Esto supone que:

a) $\exists f(\vec{A})$ es decir $\vec{A} \in D(f)$

b) $\exists \lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{A}} f(\vec{X}) = f(\vec{A})$

Definición

Sea $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : F(\vec{X}) = (f_1(\vec{X}), \dots, f_m(\vec{X}))$, se dice que F es continua en $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ si f_i es continua en $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, m$

Definición

Sea $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : F(\vec{X}) = (f_1(\vec{X}), \dots, f_m(\vec{X}))$, se dice que F es continua en $\vec{A} \in A \subset \mathbb{R}^n$ si $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall \vec{X} \in A$ que cumple $\|\vec{X} - \vec{A}\| < \delta$ entonces $\|F(\vec{X}) - F(\vec{A})\| < \varepsilon$

Enunciaremos y demostraremos un teorema que sirva para caracterizar a los conjuntos abiertos y cerrados.

Teorema.

Sea $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : F(\vec{X}) = (f_1(\vec{X}), \dots, f_m(\vec{X}))$, Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes

1. F es continua

2. \forall abierto $V \subset \mathbb{R}^m, F^{-1}(V) = A \cap U$ donde U es un abierto de \mathbb{R}^n

3. \forall cerrado $T \subset \mathbb{R}^m, F^{-1}(T) = A \cap S$ donde S es un cerrado de \mathbb{R}^n

Demostración

Analizamos que (1 \Rightarrow 2)

Sea V es abierto de \mathbb{R}^m y a un punto de $F^{-1}(V)$.

Sea $F(a) = b$, como V es abierto existe $B(b, \varepsilon) \subset V$.

Por ser F continua en A , $\exists / F(B(a, \delta_a) \cap A) \subset B(b, \varepsilon)$ de lo cual se deduce que

$$B(a, \delta_a) \cap A \subset F^{-1}(F(B(a, \delta_a) \cap A)) \subset F^{-1}(B(b, \varepsilon)) \subset F^{-1}(V)$$

y esto implica que

$$F^{-1}(V) = \bigcup_{a \in F^{-1}(V)} [B(a, \delta_a) \cap A] = \left[\bigcup_{a \in F^{-1}(V)} B(a, \delta_a) \right] \cap A = U \cap A$$

donde U es un abierto de \mathbb{R}^n , donde se ha tenido en cuenta que la unión de abiertos es un abierto

Analizamos que (2 \Rightarrow 1)

Sea a un punto de $F^{-1}(V)$ y $F(a) = b$, veamos que F es continua en a .

Sean $\varepsilon > 0$ y $B(b, \varepsilon)$ la bola abierta en \mathbb{R}^m . Por hipótesis $F^{-1}(B(b, \varepsilon)) = U \cap A$ con U abierto en \mathbb{R}^n .

Como $a \in U \cap A$ y U es abierto $\exists \delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap A \subset U \cap A = F^{-1}(B(b, \varepsilon))$

Luego $F(B(a, \delta_a) \cap A) \subset B(b, \varepsilon)$

Lo que implica de F es continua en a

Analizamos que (2 \Rightarrow 3)

T cerrado implica que $\mathbb{R}^m - T$ es abierto. Luego por 2 se tiene $F^{-1}(\mathbb{R}^m - T) = U \cap A$ donde U es un abierto en \mathbb{R}^n . Por tanto

$$F^{-1}(T) = (\mathbb{R}^n - U) \cap A \text{ y } \mathbb{R}^n - U \text{ es un cerrado de } \mathbb{R}^n$$

Analizamos que (3 \Rightarrow 2)

V abierto implica que $\mathbb{R}^m - V$ es cerrado. Luego por 3 se tiene $F^{-1}(\mathbb{R}^m - V) = S \cap A$ donde S es un cerrado en \mathbb{R}^n . Por tanto

$$F^{-1}(V) = (\mathbb{R}^n - S) \cap A \text{ y } \mathbb{R}^n - S \text{ es un cerrado de } \mathbb{R}^n$$

Nota

1. Se dice que f es continua en una región $A \subset \mathbb{R}^n$ si lo es en todo punto $\vec{A} \in A$.

Teorema

Sea $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: F(\vec{X}) = (f_1(\vec{X}), \dots, f_m(\vec{X}))$ continua en $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ y sea $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k:$

$G(\vec{X}) = (g_1(\vec{X}), \dots, g_k(\vec{X}))$ continua en $f(\vec{A})$, entonces $(GoF): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ es continua en \vec{A} .

Teorema

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / f(\vec{X}) = \omega$ y $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es continua en $\vec{A} \Leftrightarrow \forall$ sucesión $\{\vec{X}_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{X}_n = \vec{A}$

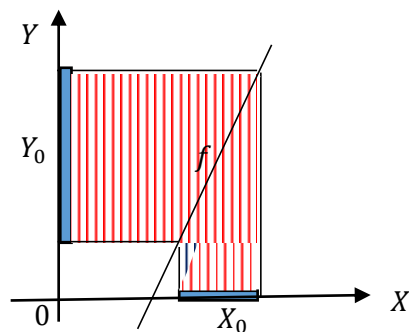
se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{X}_n) = f(\vec{A})$.

Ahora vamos a investigar las propiedades intrínsecas cualitativas de ciertos tipos de conjuntos que en lo sucesivo le llamaremos espacio, por lo que es necesario estudiar el tipo de estructura que tienen estos conjuntos para que, matemáticamente hacer rigurosa la idea de estirar sin romper.

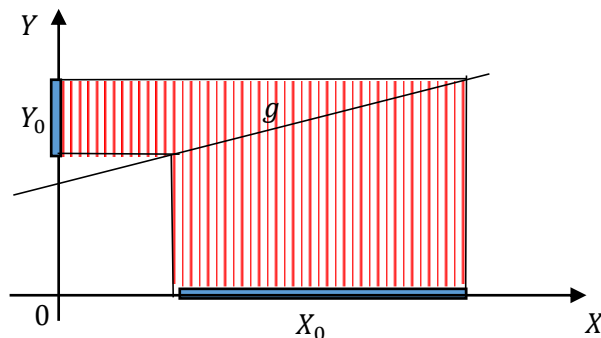
El estudio de la continuidad de las funciones en \mathbb{R} y \mathbb{R}^n , hacen que surja la noción de espacio topológico, en este sentido, la idea de espacio topológico se introduce para rescatar la esencia de la definición de continuidad y de esta manera considerar objetos donde la definición tiene sentido, notar también que la definición de continuidad se puede extender fácilmente a \mathbb{R}^n asumiendo que tenemos una definición de abierto.

Veamos esto para funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} , para considerar el proceso de estirar o comprimir segmentos de líneas mediante fuerzas que sean colineales con estos segmentos.

Esta dilatación o comprensión la podemos visualizar en la siguiente función real de variable real



La figura se puede considerar como una dilatación del segmento X_0 en el segmento Y_0

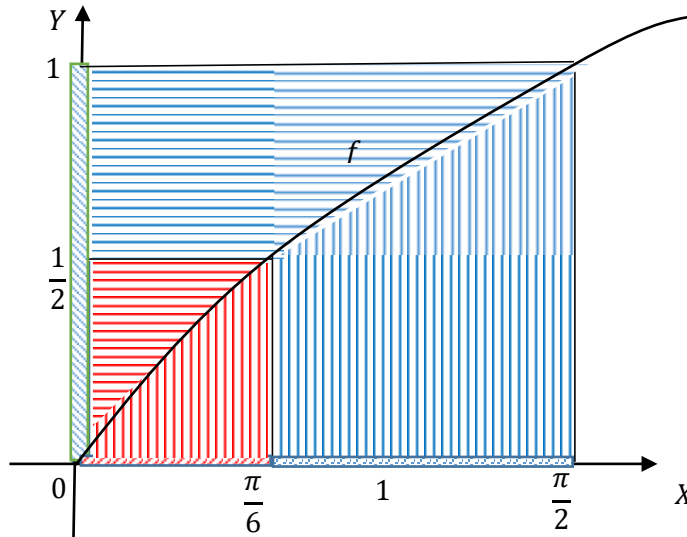


Análogamente la función g comprime el segmento X_0 en el conjunto Y_0 .

La dilatación o comprensión no tiene por qué producirse necesariamente de forma

lineal, así por ejemplo tenemos $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = f(x) = \text{sen } x$

comprime el conjunto $\{p \in \mathbb{R} : 0 \leq p \leq 1\}$ de forma no lineal



Así mismo el conjunto $\{p \in \mathbb{R} : 0 \leq p \leq \frac{\pi}{6}\}$ se transforma en el conjunto

$$\left\{p \in \mathbb{R} : 0 \leq p \leq \frac{1}{2}\right\},$$

mientras que el conjunto $\{p \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{6} \leq p \leq \frac{\pi}{2}\}$, se transforma en el conjunto

$$\left\{p \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq p \leq 1\right\}$$

Como podemos apreciar el concepto fundamental que interviene en el estudio de continuidad es el de conjunto abierto.

Definición

Un conjunto $G \subset \mathbb{R}$ se llama \mathcal{U} – abierto si y sólo si

- a) Si $G = \phi$ o
- b) Si $G \neq \phi, \forall p \in G, \exists I = \langle a, b \rangle$ tal que $p \in I \subset G$

Nota

Si $\exists p \in G, \forall I = \langle a, b \rangle$ tal que $p \in I \not\subset G$ entonces G no es \mathcal{U} – abierto

Ejemplo

1. Todo intervalo abierto es \mathcal{U} – abierto

Resolución

Sea $G = \langle a, b \rangle \neq \phi, \forall p \in G, \exists I = \langle a, b \rangle$ tal que $p \in I = \langle a, b \rangle \subset G$

2. Analizar si $G = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 1\} = [0, 1 >$ es un conjunto \mathcal{U} -abierto.

Resolución

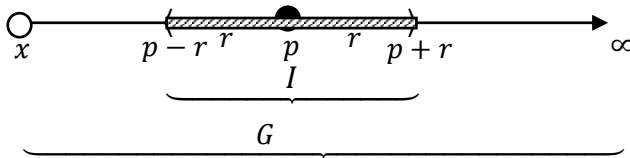
$$\exists p = 0 \in G, \forall I = \langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle \text{ tal que } 0 \in I \not\subset G$$

Por lo tanto G no es un conjunto \mathcal{U} -abierto

3. Analizar si $G = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \langle x, \infty \rangle$, con x fijo, es un conjunto \mathcal{U} -abierto.

Resolución

$$\begin{aligned} \forall p \in G = \langle x, \infty \rangle &\rightarrow p > x \rightarrow p - x > 0 \\ &\rightarrow r = p - x > 0 \rightarrow r > 0 \end{aligned}$$



Entonces $\exists I = \langle p - r, p + r \rangle \subset G \rightarrow I \subset G$

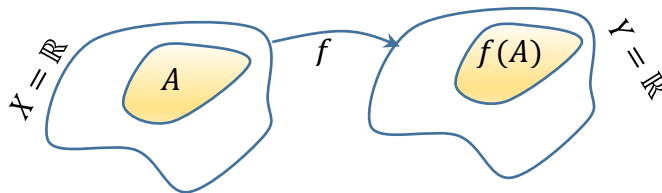
Comprobemos que $I \subset G$. En efecto

$$\left[\begin{aligned} \forall z \in I &\rightarrow p - r < z < p + r \rightarrow x = p - r < z \\ &\rightarrow x < z \rightarrow z > x \rightarrow z \in \langle x, \infty \rangle \\ &\therefore I \subset G \end{aligned} \right]$$

Luego $\forall p \in G, \exists I$ tal que $p \in I \subset G$, lo que concluye que el conjunto $\langle x, \infty \rangle$ es \mathcal{U} -abierto.

Definición

Sea $f: A \subset X = \mathbb{R} \rightarrow B \subset Y = \mathbb{R} / y = f(x)$, la imagen directa de A según f se representa por $f(A)$ y se define como el conjunto: $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$



Propiedades

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} / y = f(x)$, donde los conjuntos C y D son subconjuntos del conjunto $A \subset \mathbb{R}$ entonces se cumple que:

1. Si $C \subset D$ entonces $f(C) \subset f(D)$
2. $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$
3. $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$

Demostración de 1.

Sea $z \in f(C) \Rightarrow \exists x \in C$ tal que $f(x) = z$ como $C \subset D$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists x \in D \text{ tal que } f(x) = z \\ &\Rightarrow z \in f(D) \\ &\therefore f(C) \subset f(D) \end{aligned}$$

Demostración de 2.

$$\begin{aligned} \text{Sea } z \in f(C \cup D) &\Rightarrow \exists x \in (C \cup D) \text{ tal que } f(x) = z \\ &\Rightarrow \exists x \in C \text{ ó } x \in D \text{ tal que } f(x) = z \\ &\Rightarrow \exists x \in D \text{ y } f(x) = z \text{ ó } x \in C \text{ y } f(x) = z \\ &\therefore z \in f(D) \text{ ó } z \in f(C) \\ &\Rightarrow z \in (f(D) \cup f(C)) \\ &\therefore f(C \cup D) \subset f(C) \cup f(D) \end{aligned}$$

Así mismo

$$\begin{aligned} C \subset (C \cup D) &\Rightarrow f(C) \subset f(C \cup D) \\ D \subset (C \cup D) &\Rightarrow f(D) \subset f(C \cup D) \\ &\Rightarrow f(C) \cup f(D) \subset f(C \cup D) \end{aligned}$$

Luego $f(C \cup D) \subset f(C) \cup f(D)$

Demostración de 3.

$$\begin{aligned} \text{Sea } z \in f(C \cap D) &\Rightarrow \exists x \in (C \cap D) \text{ tal que } f(x) = z \\ &\Rightarrow \exists x \in D \text{ y } x \in C \text{ tal que } f(x) = z \\ &\Rightarrow \exists x \in D \text{ y tal que } f(x) = z \text{ y } x \in C \text{ y tal que } f(x) = z \\ &\therefore z \in f(D) \text{ y } z \in f(C) \\ &\Rightarrow z \in (f(C) \cap f(D)) \\ &\therefore f(C \cap D) = f(C) \cap f(D) \end{aligned}$$

Definición

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} / y = f(x)$, la imagen inversa de B según f se representa por $f^{-1}(B)$ y se define como el conjunto:

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}$$

o

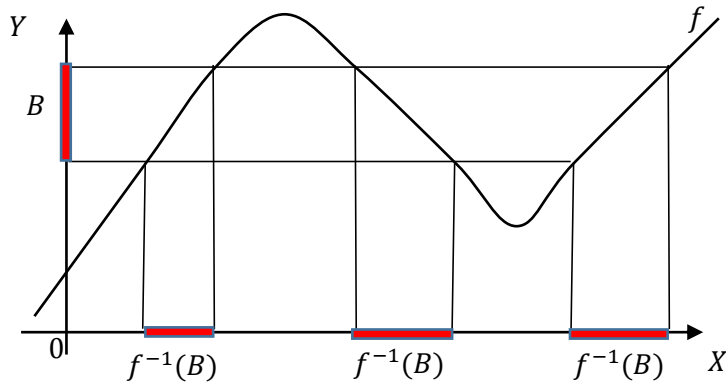
$$f^{-1}(B) = \{x \in A \subset \mathbb{R} : \exists y \in B \subset \mathbb{R}, f(x) = y\}$$

Las siguientes afirmaciones son claras

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B) &\rightarrow f(x) \in B \\ f(x) \in B &\rightarrow x \in f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Gráficamente

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} / y = f(x)$,



Ejemplo

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow [4,9] \subset \mathbb{R} / y = f(x) = x^2$, hallar las pre imágenes de los subconjuntos del codominio $[4,9]$

Resolución

Para el conjunto $[4,9]$ se tiene que

$$f^{-1}([4,9]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [4,9]\}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} f(x) \in [4,9] &\Leftrightarrow x^2 \in [4,9] \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{4} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{9} \\ &\Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3 \text{ ó } 2 \leq -x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \in [2,3] \text{ ó } x \in [-3,-2] \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1}([4,9]) = [-3,-2] \cup [2,3]$

2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = f(x) = x^2$, hallar las pre imágenes de los subconjuntos del codominio $< -\infty, -1], < -1,1]$ y $< -1,1)$

Resolución

Para el conjunto $< -\infty, -1]$ se tiene que

$$f^{-1}(< -\infty, -1]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in < -\infty, -1]\}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} f(x) \in < -\infty, -1] &\Leftrightarrow x^2 \in < -\infty, -1], \Leftrightarrow x^2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1}(< -\infty, -1]) = \emptyset$

Para el conjunto $< -1,1]$ se tiene que

$$f^{-1}(< -1,1]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in < -1,1]\}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
f(x) \in \langle -1, 1 \rangle &\Leftrightarrow x^2 \in \langle -1, 1 \rangle \Leftrightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \\
&\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \\
&\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1}(\langle -1, 1 \rangle) = [-1, 1]$

Para el conjunto $\langle -1, 1 \rangle$ se tiene que

$$f^{-1}(\langle -1, 1 \rangle) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \langle -1, 1 \rangle\}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
f(x) \in \langle -1, 1 \rangle &\Leftrightarrow x^2 \in \langle -1, 1 \rangle \Leftrightarrow -1 < x^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow 0 < x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \\
&\Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in \langle -1, 1 \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1}(\langle -1, 1 \rangle) = \langle -1, 1 \rangle$

Propiedades

Sea $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow Y \subset \mathbb{R} / y = f(x)$, donde $A \subset Y, B \subset Y$ entonces se cumple que:

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

Demostración de 1.

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \in f^{-1}(A \cup B) &\Leftrightarrow f(x) \in (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow f(x) \in A \cup f(x) \in B \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup x \in f^{-1}(B) \\
&\Leftrightarrow x \in [f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)] \\
&\therefore f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)
\end{aligned}$$

Demostración de 2.

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in (A \cap B) \\
&\Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \in B \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) \\
&\Leftrightarrow x \in [f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)] \\
&\therefore f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)
\end{aligned}$$

Demostración de 3.

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \in f^{-1}(A^c) &\Leftrightarrow f(x) \in (A^c) \Leftrightarrow f(x) \notin A \\
&\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(A))^c \\
&\therefore f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c
\end{aligned}$$

Definición.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = f(x)$, la función f es continua si la imagen inversa según f de todo conjunto \mathcal{U} –abierto es un conjunto \mathcal{U} –abierto, es decir

$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow \forall \text{ conjunto } G, \mathcal{U} \text{ –abierto} \\ \Rightarrow f^{-1}(G) \text{ es } \mathcal{U} \text{ –abierto}$$

Definición.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = f(x)$, la función f no es continua si existe por lo menos un conjunto \mathcal{U} –abierto cuya imagen inversa según f no es un conjunto \mathcal{U} –abierto, es decir

$$f \text{ no es continua} \Leftrightarrow \exists \text{ un conjunto } G, \mathcal{U} \text{ –abierto} \\ \Rightarrow f^{-1}(G) \text{ no es } \mathcal{U} \text{ –abierto}$$

Ejemplo

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = f(x) = x$ determinar si la función f es continua.

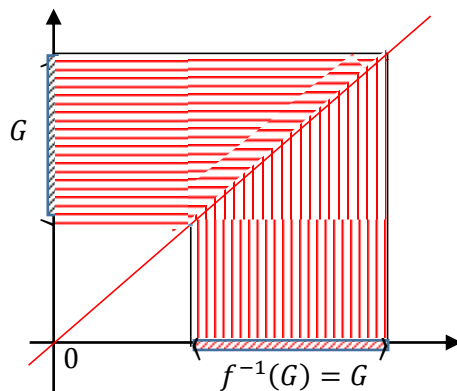
Resolución

$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow \forall \text{ conjunto } G, \mathcal{U} \text{ –abierto} \\ \Rightarrow f^{-1}(G) \text{ es } \mathcal{U} \text{ –abierto}$$

$$\forall \text{ conjunto } G, \mathcal{U} \text{ –abierto} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(G) \\ \Leftrightarrow f(x) = G \Leftrightarrow x = G \\ \therefore f^{-1}(G) = G \text{ es } \mathcal{U} \text{ –abierto}$$

Luego f es continua.

Geoméricamente



2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = f(x) = x^2$ determinar si la función f es continua.

Resolución

$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow \forall \text{ conjunto } G, \mathcal{U} \text{ –abierto} \\ \Rightarrow f^{-1}(G) \text{ es } \mathcal{U} \text{ –abierto}$$

En efecto

i) \forall conjunto $G = \langle a, b \rangle, a \geq 0$

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(G) &\Leftrightarrow f(x) \in G \\&\Leftrightarrow x^2 \in G \Leftrightarrow x^2 \in \langle a, b \rangle \\&\Leftrightarrow a < x^2 < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{x^2} < \sqrt{b} \\&\Leftrightarrow \sqrt{a} < |x| < \sqrt{b} \\&\Leftrightarrow (x < -\sqrt{a} \vee x > \sqrt{a}) \wedge (-\sqrt{b} < x < \sqrt{b}) \\&\Leftrightarrow [(x < -\sqrt{a}) \wedge (-\sqrt{b} < x < \sqrt{b})] \\&\quad \vee [(x > \sqrt{a}) \wedge (-\sqrt{b} < x < \sqrt{b})] \\&\Leftrightarrow (-\sqrt{b} < x < -\sqrt{a}) \vee (\sqrt{a} < x < \sqrt{b}) \\&\Leftrightarrow x \in \langle -\sqrt{b}, -\sqrt{a} \rangle \vee x \in \langle \sqrt{a}, \sqrt{b} \rangle \\&\Leftrightarrow x \in \langle -\sqrt{b}, -\sqrt{a} \rangle \cup \langle \sqrt{a}, \sqrt{b} \rangle \\&\therefore f^{-1}(G) = \underbrace{\langle -\sqrt{b}, -\sqrt{a} \rangle}_{\mathcal{U}\text{-abierto}} \cup \underbrace{\langle \sqrt{a}, \sqrt{b} \rangle}_{\mathcal{U}\text{-abierto}}\end{aligned}$$

$$f^{-1}(G) = \mathcal{U}\text{-abierto}$$

$\therefore f$ es continua

ii) Si $G = \langle 0, c \rangle$

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(G) &\Leftrightarrow f(x) \in G \\&\Leftrightarrow x^2 \in G \Leftrightarrow x^2 \in \langle 0, c \rangle \\&\Leftrightarrow 0 < x^2 < c \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x^2} < \sqrt{c} \\&\Leftrightarrow 0 < |x| < \sqrt{c} \Leftrightarrow 0 < |x| \wedge |x| < \sqrt{c} \\&\Leftrightarrow (x < 0 \vee x > 0) \wedge (-\sqrt{c} < x < \sqrt{c}) \\&\Leftrightarrow [(x < 0) \wedge (-\sqrt{c} < x < \sqrt{c})] \\&\quad \vee [(x > 0) \wedge (-\sqrt{c} < x < \sqrt{c})] \\&\Leftrightarrow (-\sqrt{c} < x < 0) \vee (0 < x < \sqrt{c}) \\&\Leftrightarrow x \in \langle -\sqrt{c}, 0 \rangle \vee x \in \langle 0, \sqrt{c} \rangle \\&\Leftrightarrow x \in \langle -\sqrt{c}, 0 \rangle \cup \langle 0, \sqrt{c} \rangle \\&\therefore f^{-1}(G) = \underbrace{\langle -\sqrt{c}, 0 \rangle}_{\mathcal{U}\text{-abierto}} \cup \underbrace{\langle 0, \sqrt{c} \rangle}_{\mathcal{U}\text{-abierto}}\end{aligned}$$

$$f^{-1}(G) = \mathcal{U}\text{-abierto}$$

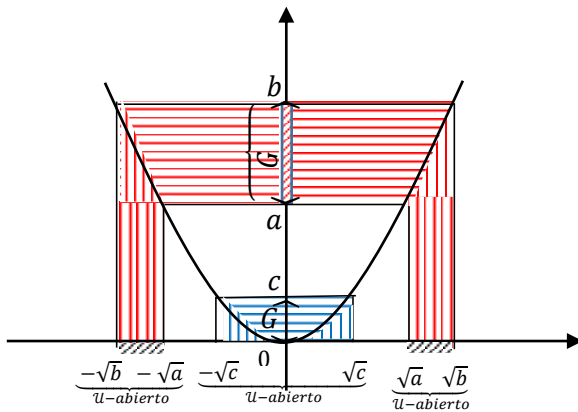
$\therefore f$ es continua

iii) Si $G = \langle c, d \rangle$ donde $c < 0 < d$

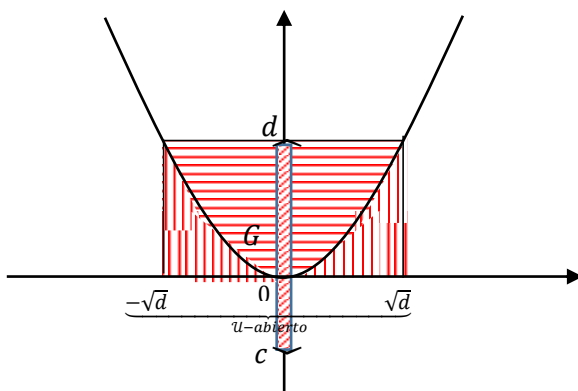
$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(G) &\Leftrightarrow f(x) \in G \\
&\Leftrightarrow x^2 \in G \Leftrightarrow x^2 \in \langle c, d \rangle \text{ con } c < 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 < d \text{ con } c < 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{d} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{d} \\
&\Leftrightarrow (-\sqrt{d} < x < \sqrt{d}) \Leftrightarrow x \in \langle -\sqrt{d}, \sqrt{d} \rangle \\
\therefore f^{-1}(G) &= \underbrace{\langle -\sqrt{d}, \sqrt{d} \rangle}_{\mathcal{U}\text{-abierto}} \\
f^{-1}(G) &= \mathcal{U}\text{-abierto} \\
\therefore f &\text{ es continua}
\end{aligned}$$

Geoméricamente

Cundo $G = \langle a, b \rangle, a \geq 0$ y si $G = \langle 0, c \rangle$



Cuando $G = \langle c, d \rangle$ donde $c < 0 < d$



vemos ahora que el concepto de continuidad se ha extendido más allá de los espacios métricos creando de esta manera los espacios topológicos, a pesar de que pueden aparecer espacios topológicos que no sean métricos.

Pero como se ha visto, para hablar de continuidad basta definir cuáles son los abiertos, ¿pero ¿cómo hacerlo si no podemos determinar los puntos cercanos a uno dado, puesto

que no tenemos una distancia con que medir? Para responder a esta interrogante recordemos dos propiedades que satisfacen los abiertos en los espacios métricos

- i) La unión arbitraria de abiertos es un abierto
- ii) La intersección finita de abiertos es un abierto

y al matemático Johann Benedict Listin, alumno de Gauss, quien en 1847 introdujo por primera vez palabra topología dado que los abiertos especifican la continuidad y por lo tanto la forma, por lo que podemos definir a la topología como la ciencia de la forma.

Así también, la definición de espacios topológicos en el sentido moderno se debe a Félix Hausdorff (1914), quien axiomatizaba las ideas de David Hilbert y Hermann Weyl, que estaba basado en el concepto de entorno, si bien es cierto que Hausdorff llamó espacio topológico, en la actualidad se conoce como espacio de Hausdorff.

En esta parte del trabajo estudiaremos el concepto de topología y de espacio topológico, así como las operaciones más importantes que permitan construir unos espacios topológicos a partir de otros e incursionar en la teoría de grafos, dado que la teoría de grafos está ligada a la topología; históricamente en la evolución de la topología se estudian de manera muy intuitiva a través de tres teorías topológicas:

- 1) La teoría de grafos.
- 2) La teoría de nudos
- 3) La teoría de superficies

La noción de topología es una generalización de alguna de las propiedades que poseen los intervalos abiertos en la recta \mathbb{R} , o los conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n , propiedades independientes de otras presentes en \mathbb{R} , o en \mathbb{R}^n , como la suma, el orden o la distancia. Por lo que expondremos algunas de esas propiedades cualitativas que, haciendo abstracción de toda medida y magnitud, son fundamento de la topología, por lo que estamos en condiciones de definir el objetivo de estudio en topología que son los espacios topológicos

Definición

Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, decimos que \mathcal{T} es una topología definida sobre X si \mathcal{T} es una colección o familia de subconjuntos de X , (es decir $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$) tales que:

- i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- ii) Si $G_\alpha \in \mathcal{T}, \forall \alpha \in \lambda \Rightarrow \bigcup \{G_\alpha : \alpha \in \lambda\} \in \mathcal{T}$

lo que podemos escribirlo como

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in \lambda} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \lambda} G_\alpha \in \mathcal{T}$$

Que literalmente se entiende como:

Si G_α es una familia arbitraria de elementos de \mathcal{T} la unión de cualquier número de conjuntos de \mathcal{T} también pertenecen a \mathcal{T} .

iii) Si $G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{T}, \forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow \cap \{G_i: i = 1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{T}$$

o también podemos escribirlo como

$$\{G_i\}_{i=1}^n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{T}$$

Que literalmente se entiende como:

Si G_i es una familia o colección finita de elementos de \mathcal{T} la intersección de cualquier número de conjuntos de \mathcal{T} también es finita y pertenecen a \mathcal{T}

Nota

- 1) A los elementos de la colección \mathcal{T} se les llama abiertos de (X, \mathcal{T}) o simplemente \mathcal{T} – *abiertos*
- 2) Al par formado por el conjunto total X y la topología \mathcal{T} se llama Espacio Topológico. Por lo tanto (X, \mathcal{T}) es un Espacio topológico.
- 3) Como en los espacios métricos, muchas veces al par (X, \mathcal{T}) se le abrevia por X si \mathcal{T} se sobreentiende, teniendo en cuenta que \mathcal{T} es una topología distinta en cada caso.
- 4) Si $G_\alpha \in \mathcal{T}, \forall \alpha \in \lambda \Rightarrow G_\alpha \in \mathcal{T}$ – *abierto*

Vamos a demostrar que una distancia d sobre un conjunto $X \neq \emptyset$ siempre define una topología sobre el conjunto X , de tal modo que todo espacio métrico es un espacio topológico. Para ello se debe definir en un espacio métrico (X, d) el concepto de entorno de un punto y de subconjunto abierto.

Definición

Un subconjunto $V \subseteq X$ es un entorno de $x \in X$, si $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq V$

Definición

Un subconjunto $G \subseteq X$ es un abierto de (X, d) , si es entono de todos sus puntos, es decir si $\forall x \in G \exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq G$ o equivalentemente si G se puede escribir como unión arbitraria de bolas abiertas

Propiedades de los conjuntos abiertos en un espacio métrico

Si llamamos \mathcal{T}_d al conjunto de todos los abiertos de un espacio métrico (X, d) , entonces se verifica las siguientes

Propiedades

i) $\phi \in \mathcal{T}_d$, $X \in \mathcal{T}_d$

Demostración.

$\phi \in \mathcal{T}_d$ porque ϕ es abierto en (X, d) por lo tanto ϕ es d -abierto

$X \in \mathcal{T}_d$ porque X es abierto en (X, d) por lo tanto X es d -abierto

ii) $\{G_i\}_{i \in I} \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_d$

Demostración.

Si $x \in \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists \alpha \in I : x \in G_\alpha$

Como todos los G_i son abiertos en (X, d) , incluido el propio G_α entonces $\exists r > 0$ tal que

$$B(X, r) \subseteq G_\alpha \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_d$$

iii) $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_d$

Demostración

Si $x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow x \in G_1 \wedge x \in G_2$

Como ambos son abiertos en (X, d) , entonces existen dos radios $r_1 > 0, r_2 > 0$ tales que

$$B(X, r_1) \subseteq G_1 \text{ y } B(X, r_2) \subseteq G_2$$

Tomando $r = \min\{r_1, r_2\}$ para obtener

$$B(X, r) \subseteq G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_d$$

Estas propiedades expuestas describen a los subconjuntos d -abierto, de un espacio métrico (X, d) , por lo que toda métrica induce de modo natural una topología, es decir, si (X, d) es un espacio métrico, también podemos considerarlo como un espacio topológico (X, \mathcal{T}_d) donde todas las métrica asociadas a normas en \mathbb{R}^n inducen la misma topología que recibe el nombre de topología usual o normal, sin embargo, esta afirmación no es extensible a cualquier métrica sobre \mathbb{R}^n , sino exclusivamente a aquellas asociadas a normas

Concretamente, la topología usual sobre \mathbb{R} es la topología inducida por la distancia usual

$$\mathcal{T}_{usual} = \mathcal{T}_{d_{usual}}$$

$$\mathcal{T}_U = \mathcal{T}_d = \mathcal{U} = \{G \subseteq \mathbb{R} : G \text{ es } \mathcal{U}\text{-abierto}\}$$

$$= \{\text{unión arbitraria de bolas abiertas}\}$$

En \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$, podemos considerar la topología usual como la inducida por d_1, d_2 o d_∞ y en general por cualquier otra distancia asociada a una norma, es decir, los abiertos son uniones arbitrarias de bolas abiertas con cada una de esas métricas

Siempre que hablemos de un subconjunto de \mathbb{R}^n sin especificar su topología supondremos que se trata de la topología usual.

Ejemplo Definición

1. Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{U} = \{G \subseteq \mathbb{R}: G \text{ es } \mathcal{U} - \text{abierto}\}$

Se verificar que \mathcal{U} es una topología para \mathbb{R}

Resolución

Para que \mathcal{U} sea una topología para \mathbb{R} debe cumplir

i) $\phi \in \mathcal{U}$ y $X \in \mathcal{U}$.

En efecto

$\phi \in \mathcal{U}$ porque ϕ es $\mathcal{U} -$ abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ por lo tanto ϕ es $\mathcal{U} -$ abierto

$X \in \mathcal{U}$ porque X es abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ por lo tanto X es $\mathcal{U} -$ abierto

ii) $\{G_i\}_{i \in I} \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{U}$

En efecto

Como $\{G_i\}_{i \in I} \in \mathcal{U} \Rightarrow G_i$ son $\mathcal{U} -$ abiertos

$$\Rightarrow G_i \in \mathcal{U}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \text{ son } \mathcal{U} - \text{abiertos} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{U}$$

iii) $\forall G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{U} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \in \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{U}$$

En efecto

Como $G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{U} \Rightarrow G_1, G_2, \dots, G_n$ cada uno de los G_i son $\mathcal{U} -$ abiertos

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \text{ son } \mathcal{U} - \text{abiertos} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{U}$$

Por lo tanto \mathcal{U} es una topología en \mathbb{R} y a esta topología se le llama topología usual o normal, así mismo $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ es un espacio topológico sobre \mathbb{R} y los elementos de \mathcal{U} se llama abiertos de $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ o simplemente $\mathcal{U} -$ abiertos

Nota

Todo conjunto $X \neq \phi$, tiene dos topologías llamadas triviales:

i) Una topología Indiscreta o grosera, se representa por \mathcal{J} cuyos únicos elementos son los abiertos X y ϕ .

Es decir $\mathcal{J} = \{X, \phi\}$ es la menor topología posible, pues tiene únicamente los abiertos exigidos por la definición.

El par (X, \mathcal{J}) es un espacio topológico indiscreto o grosero sobre X y sus elementos se les llama \mathcal{J} – *abiertos*

ii) Otra topología trivial es la topología Discreta que se representa por \mathcal{D} la cual está formada por todos los subconjuntos de X . Es decir $\mathcal{D} = \mathcal{P}(X)$ y es la mayor topología que puede definirse en un conjunto, en que todos sus subconjuntos son abiertos.

El par $(X, \mathcal{D}) = (X, \mathcal{P}(X))$ es un espacio topológico discreto

Nota.

La topología Indiscreta está contenida en la topología Discreta, es decir $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$,

Ejemplo

1. Asumamos que $X = \{1,2\}$, entonces

$$\mathcal{J} = \{\phi, X\} \text{ y } \mathcal{D} = \{\phi, X, \{1\}, \{2\}\}$$

$$\therefore \mathcal{J} \subset \mathcal{D}$$

2. Sea $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{G \subset \mathbb{R} : G \text{ es } \mathcal{U} - \text{abierto}\}$

$$\text{Entonces } \mathcal{J} = \{\phi, \mathbb{R}\}; \mathcal{D} = \mathcal{P}(X) = \{G : G \subset \mathbb{R}\}$$

En esta topología todos los subconjuntos de \mathbb{R} son abiertos

$$\therefore \mathcal{J} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{D}$$

Ejemplo Definición.

2. Sea X un conjunto finito (es decir $X \neq \phi$) y sea el conjunto

$\mathcal{T} = \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

$$\mathcal{T} = \mathcal{C} = \{A \subset X : A^c \text{ es finito o } A = \phi\}$$

Podemos afirmar que si

$$A \in \mathcal{T} = \mathcal{C} \Leftrightarrow A \text{ es } \mathcal{T} = \mathcal{C} - \text{abierto}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \phi \\ A \neq \phi, \text{ es finito} \end{cases}$$

entonces demostraremos que $\mathcal{T} = \mathcal{C}$ es una topología para X , que se llama topología cofinita para X , por lo tanto el par (X, \mathcal{C}) es un espacio topológico.

Demostremos que

$$\mathcal{T} = \mathcal{C} = \{A \subset X : A^c \text{ es finito o } A = \phi\}$$

es una topología para X .

Demostración

Vemos que es necesario chequear que $\mathcal{T} = \mathcal{C}$ cumple las tres condiciones de la definición de topología

i) $\phi \in \mathcal{T} = \mathcal{C}$, por definición de $\mathcal{T} = \mathcal{C}$

$X \in \mathcal{T} = \mathcal{C}$ si es que X^c es finito, pero el $X^c = \phi$

entonces $X^c = \phi$ es finito

ii) $A_i \in \mathcal{T} = \mathcal{C}, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} = \mathcal{C}$

En efecto

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} = \mathcal{C} \Leftrightarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c \text{ es finito}$$

Probaremos que $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c$ es finito

Por la Ley de Morgan se cumple que

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} (A_i)^c$$

Como $A_i \in \mathcal{T} = \mathcal{C}, \forall i \in I \Rightarrow (A_i)^c$ es finito $\forall i \in I$. Además

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} (A_i)^c &\subset \underbrace{(A_i)^c}_{\text{finito}}, \forall i \in I \\ &\Rightarrow \bigcap_{i \in I} (A_i)^c \text{ es finito} \\ &\Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c \text{ es finito} \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} = \mathcal{C} \end{aligned}$$

iii) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{T} = \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T} = \mathcal{C}$

En efecto

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T} = \mathcal{C} \Leftrightarrow \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c \text{ es finito}$$

Probaremos que $\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c$ es finito

Por la Ley de Morgan se cumple que

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n (A_i)^c$$

Como: $A_i \in \mathcal{T} = \mathcal{C}, \forall i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow (A_i)^c$ es finito, $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n (A_i)^c$ es finito

Puesto que la unión de una familia finita de conjuntos finitos es finita

$$\therefore \left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c \text{ es finito} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T} = \mathcal{C}$$

$\therefore \mathcal{T} = \mathcal{C}$ es una topología para X

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

Daremos algunas definiciones que también usaremos en el presente trabajo

Definición

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico

1. Un sub conjunto $B \subset X$ se dice cerrado si su complemento es abierto. Por lo tanto, se tiene que la unión de una cantidad finita de conjunto cerrados es cerrada y la intersección de una cantidad arbitraria de cerrados es cerrada.
2. Diremos que V es entorno de un punto $x \in X$ si se cumple que $x \in A \subset V$ para algún abierto A .
3. Un punto $x \in X$ es de acumulación de un subconjunto A de X si todo entorno V de x contiene algún punto de A diferente de x .
4. Un punto $x \in X$ es interior de un subconjunto A de X si existe un entorno V de x que está contenido en A .
5. Un punto $x \in X$ es frontera o borde de un subconjunto A de X si todo entorno V de x intersecciona a A y A^c diferente de x
6. Una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a un punto $x \in X$
Si dado cualquier entorno V de x existe un n_0 tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$

Nota

En las definiciones anteriores puede sustituirse los entornos por entono abierto

Propiedades

Sea X un espacio topológico entonces se cumple

1. Un sub conjunto A de X es abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores.
2. Un sub conjunto A de X es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.
3. Un sub conjunto A de X es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos frontera.

Definición

Sea A un sub conjunto de X . Se define la clausura de A como la intersección de todos los cerrados que contienen a A . Se denota como $Cl(A) = \bar{A}$.

Definición

Sea A un sub conjunto de X . Se define el interior de A como la unión de todos los abiertos contenidos en A . Se denota como $Int(A) = \overset{\circ}{A}$, también como A°

Definición

El conjunto de puntos frontera de A se llama frontera de A y se denota como $fr(A) = \partial A$.

Nota

1. \bar{A} es un conjunto cerrado, puesto que la intersección de cerrados es cerrada, por lo tanto es el mínimo cerrado que contiene a A .
2. A° es un conjunto abierto, por lo tanto es el máximo abierto contenido en A
3. \bar{A} es la unión de A con el conjunto de puntos de acumulación de A . Se dice que A es cerrado si y sólo si coincide con su clausura
4. A° es el conjunto de todos los puntos interiores de A . Se deduce que A es abierto si y sólo si coincide con su interior.
5. La clausura de la unión de finitos conjuntos es igual a la unión de las clausuras. Si son infinitos conjuntos solo vale una contención.
6. Se tiene que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ donde la contención es estricta
7. Se cumplen: $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ y $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$

Nota.

1. Una manera de crear artificialmente una topología es dividir el conjunto en unos cuantos trozos y hacer todas las uniones e intersecciones necesarias para que se satisfaga la definición de topología.
2. La propiedad de ser abierto o cerrado es independiente la una de la otra. Un conjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado, abierto y no cerrado, cerrado y no abierto o ninguna de las dos propiedades

3. En una topología la intersección infinita de abiertos o la unión infinita de cerrados no tiene por qué ser un abierto o un cerrado respectivamente.
4. Si X es un conjunto finito, todos sus subconjuntos son abiertos con la topología Cofinita, por tanto está pierde interés ya que coincide con la discreta.
5. Cuando Félix Hausdorff introdujo el concepto de Espacio Topológico en términos de entornos, exigió una propiedad completamente natural, pero que en la definición general moderna se ha eliminado porque existen algunas topologías de interés que no la satisfacen

Definición

Se dice que un espacio topológico (X, \mathcal{F}) cumple la propiedad

T_0 si cuando x, y son dos puntos distintos en X , existe un abierto que contiene sólo a uno de ellos.

T_1 si cuando x, y son dos puntos distintos en X , existe un abierto U tal que $x \in U, y \notin U$

T_2 si cuando $u, v \in X$ son dos puntos distintos, existe abiertos disjuntos U, V en X tal que $u \in U, v \in V$

Nota.

La propiedad T_2 se llama también propiedad de Hausdorff y los espacios que la cumplen se llaman espacios de Hausdorff

Definición.

Un espacio topológico (X, \mathcal{F}) es de Hausdorff, o llamado también espacio T_2 si se cumple que para todo par de puntos distintos x e y , de X existen \mathcal{F} - entornos V de x y W de y tales que $V \cap W = \emptyset$

Nota.

1. Si (X, \mathcal{F}) es un espacio de Hausdorff entonces \mathcal{F} se llama una topología de Hausdorff en X .
2. Si X es un espacio topológico de Hausdorff, entonces una sucesión converge a lo más a un punto.
3. Si (X, \mathcal{F}) es un espacio de Hausdorff y $p \in X$ entonces el conjunto $\{p\}$ es \mathcal{F} - cerrado.
4. Cuando Hausdorff introdujo el concepto de Espacio Topológico en términos de entornos, exigió una propiedad completamente natural, pero que en la definición general moderna se ha eliminado porque existen algunas topologías de interés que no la satisfacen

Enseguida veremos cómo generar topologías a partir de otras conocidas, lo que motiva a la siguiente

Definición

Decimos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base de una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ de un conjunto X si cumplen:

i) La unión de todos los elementos de \mathcal{B} es X , es decir

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

ii) Dados B_1 y B_2 elementos de \mathcal{B} y un punto $x \in B_1 \cap B_2$

existe B de \mathcal{B} tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$

Nota

1. Los $B \in \mathcal{B}$ se llaman abiertos básicos
2. Si \mathcal{B} es una base de una topología de X y se define \mathcal{T} como el conjunto de todas las uniones de elementos de \mathcal{B} más el vacío, entonces \mathcal{T} es una topología de X , que se llama topología generada por \mathcal{B} , se denota

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{ \mathcal{U} \subset X, \forall x \in \mathcal{U}, \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B_x \subseteq \mathcal{U} \}$$

3. \mathcal{T} es la mínima topología de X que contiene a todos los elementos de \mathcal{B} , también se dice en este caso que \mathcal{B} es base de \mathcal{T}

Definición

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ una familia de subconjuntos abiertos de X , entonces \mathcal{S} es una subbase de la topología \mathcal{T} de X si y sólo si las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} determinan una base de \mathcal{T} .

Definición

Una función $f: X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos (X, \mathcal{T}_X) e (Y, \mathcal{T}_Y) es continua si $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$ para cada $A \in \mathcal{T}_Y$.

Nota

Obviamente la continuidad depende de las topologías en X e Y .

Ejemplo

Si \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 son topologías en un conjunto X , entonces la función identidad $id: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$, en este caso diremos que la topología \mathcal{T}_1 es más fina que \mathcal{T}_2 . Por eso cuando, cuando hay riesgo de confusión, escribimos $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, para dar a entender con qué topologías estamos considerando dominio y codominio.

Definición

Sean $(X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ es continua en x si para todo entorno V de $f(x)$ existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$

Veamos algunas equivalencias

Sea $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, son equivalentes

1. f es continua.
2. f es continua en x para todo $x \in X$
3. $f^{-1}(C)$ es cerrado en \mathcal{T}_X para cada C cerrado en \mathcal{T}_Y
4. Para todo subconjunto $A \subset X$, se cumple que $\overline{f(A)} \supset f(\overline{A})$

Nota

Si X es un espacio métrico, la condición que para todo subconjunto $A \subset X$, se cumple que $\overline{f(A)} \supset f(\overline{A})$ es equivalente a la noción de continuidad por sucesiones.

Homeomorfismos

[6] La palabra homeomorfismo proviene del griego homonios = misma y morphé = forma. En topología es una función de un espacio topológico a otro que cumple con ser una función biyectiva y continua y cuya inversa es continua. En este caso, los dos espacios topológicos se dicen homeomorfos

Este concepto tiene mucha importancia en topología, ya que dos espacios topológicos que sean homeomorfos se pueden considerar iguales topológicamente.

En esta parte del trabajo investigaremos, la equivalencia topológica; cuando se define una estructura matemática sobre ciertos conjuntos, la igualdad de estas estructuras debe de obligar a que los conjuntos subyacentes sean equivalentes. Así las igualdades entre las estructuras dadas deben realizarse a través de una función biyectiva, además de esta condición se debe de imponer que esta función y su inversa conserven la estructura. Así la igualdad topológica vendrá dada por lo que se llama un homeomorfismo. En algunas estructuras matemáticas, como en los espacios vectoriales, si una función biyectiva f conserva la estructura, automáticamente se deduce que su inversa f^{-1} también lo hace, sin embargo, esto no ocurre en los espacios topológicos.

[7] En matemática resulta esencial reconocer cuando dos estructuras son equivalentes, por ejemplo, en la teoría de conjuntos, dos conjuntos son equivalentes si existe una función biyectiva que transforma un conjunto en el otro. En el álgebra dos grupos son equivalentes o isomorfos, si existe un homomorfismo de uno al otro que es inyectivo y sobreyectivo.

[8] En topología dos espacios topológicos son equivalentes o homeomorfos Si existe un homeomorfismo de uno sobre el otro.

En esta parte del trabajo investigaremos la equivalencia topológica; cuando se define una estructura matemática sobre ciertos conjuntos, la igualdad de estas estructuras debe de obligar a que los conjuntos subyacentes sean equivalentes. [9] Así las igualdades entre las estructuras dadas deben realizarse a través de una función biyectiva, además de esta condición se debe de imponer que esta función y su inversa conserven la estructura. Así la igualdad topológica vendrá dada por lo que se llama un homeomorfismo. En algunas estructuras matemáticas, como en los espacios vectoriales, si una función biyectiva f conserva la estructura, automáticamente se deduce que su inversa f^{-1} también lo hace, sin embargo esto no ocurre en los espacios topológicos. [10] En matemática resulta esencial reconocer cuando dos estructuras son equivalentes, por ejemplo, en la teoría de conjuntos, dos conjuntos son equivalentes si existe una función biyectiva que transforma un conjunto en el otro. En el álgebra dos grupos son equivalentes o isomorfos, si existe un homomorfismo de uno al otro que es inyectivo y sobreyectivo. En topología dos espacios topológicos son equivalentes o homeomorfos Si existe un homeomorfismo de uno sobre el otro.

Definición.

Sean X e Y espacios topológicos y f una función de X a Y ; entonces, f es un homeomorfismo si se cumple que:

- i) f es una biyección
- ii) f es continua.
- iii) f^{-1} es continua

También la podemos definir de la siguiente manera

Definición.

Una función biyectiva entre espacios topológicos se dice homeomorfismo si tanto f como f^{-1} son continuas. En este caso decimos que los espacios son homeomorfos.

Definición

Dos espacios topológicos X , Y se dicen que son homeomorfos si existe un homeomorfismo $f: X \rightarrow Y$, lo que denotaremos como:

$$X \cong Y \text{ o por } X \stackrel{f}{\cong} Y \text{ o } (X, \mathcal{T}_X) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$$

Nota

1. Llamaremos propiedad topológica a aquellas propiedades de un espacio topológico que se preserva por homeomorfismos.

Es decir, la propiedad es cierta para todos los espacios homeomorfos $f: (X, \mathcal{T}_X) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$, al sustituir cada subconjunto y cada abierto por su imagen.

2. Es claro que cuando f es un homeomorfismo, entonces un conjunto A es abierto en X si y sólo si su imagen es un abierto en Y .
3. Dos espacios homeomorfos son exactamente el mismo objeto a los ojos de un topólogo.

Ejemplo.

1. Si consideramos en todos los casos la topología usual de \mathbb{R} o \mathbb{R}^2 , una recta es homeomorfa a una parábola, una elipse homeomorfa a una circunferencia. La composición de homeomorfismos es también un homeomorfismo, por lo que se tiene que la relación "X e Y" son homeomorfos es de equivalencia.
2. Sean (X, \mathcal{T}_X) , (Y, \mathcal{T}_Y) espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una biyección, entonces probar que f es un homeomorfismo si y sólo si \mathcal{T}_X es la topología inicial de f en X .

Resolución

Definiremos que es topología inicial:

Si, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, llamamos topología inicial = $\mathcal{T}_{inicial}$ a la topología menos fina que garantiza la continuidad de nuestra aplicación $f: (X, \mathcal{T}_{inicial}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$.

Ahora si la prueba la realizaremos mediante la doble implicación

(\Rightarrow)

Partiremos del hecho que f es un homeomorfismo, se debe probar que \mathcal{T}_X es la topología inicial de f en X .

Sea primero $A \in \mathcal{T}_X$ se quiere ver que $A \in \mathcal{T}_{inicial}$. Para ellos tenemos que:

$$A \in \mathcal{T}_X \text{ entonces } f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{T}_Y$$

pues f es abierto

$$\text{Luego } A = f^{-1}(\underbrace{f(A)}_{\mathcal{T}_Y}) \in \mathcal{T}_{inicial}$$

Falta probar que si $A \in \mathcal{T}_{inicial}$ entonces $A \in \mathcal{T}_X$ sin embargo sabemos que $\mathcal{T}_{inicial}$ es la topología menos fina de X que hace continua a la aplicación f luego por construcción

$$\mathcal{T}_{inicial} \subset \mathcal{T}_X$$

(\Leftarrow)

Ahora partiremos de que $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{inicial}$

Falta ver que tanto f como f^{-1} son continuas

Tomemos primero que si $B \in \mathcal{T}_Y$. Queremos ver que si $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.

Pero resulta que:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{inicial} = \mathcal{T}_X \text{ entonces } f \text{ es continua.}$$

Para ver si f^{-1} es continua elegimos $A \in \mathcal{T}_X$ luego

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) = f(f^{-1}(B)) = B \in \mathcal{T}_Y$$

$$\downarrow \Rightarrow f^{-1} \text{ continua}$$

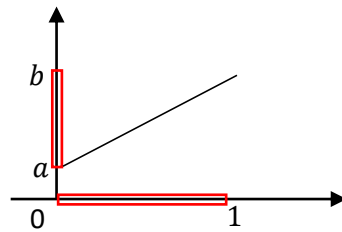
$$A \in \mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{inicial} \Leftrightarrow A = f^{-1}(B)$$

con $B \in \mathcal{T}_Y$

que es lo que se quería probar.

Ejemplo

1. Sea el conjunto $X = (0,1)$, con la topología usual y el conjunto $Y = (a,b)$ con la topología usual, y consideremos el siguiente grafico



Analizar si los espacios (X, \mathcal{T}_{usual}) , (Y, \mathcal{T}_{usual}) son homeomorfos.

Resolución

Se debe definir una función que relacione a los dos conjuntos, tal como

$$f(x) = y = (b - a)x + a$$

Se trata de una función lineal, como se sabe esta función

f es continua, por ser lineal

f es biyectiva, por ser lineal

f^{-1} es continua, por ser lineal

Por lo tanto se ha probado que $(0,1)$ y (a,b) son homeomorfos.

2. Es el intervalo conjunto $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ homeomorfo al conjunto \mathbb{R} .

Resolución

Se debe buscar una función que relacione a los dos conjuntos, en este caso la función será la tangente es decir $f = \text{tag}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ que es una función continua y biyectiva, ahora hay que ver la inversa de la tangente que es el $\text{tag}^{-1} = \text{arctag}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pero el arctag es continua, por lo que se puede afirmar que $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \approx \mathbb{R}$

3. Dados los siguientes espacios topológicos $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{usual})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{usual})$, serán homeomorfos

Resolución

Debemos de encontrar una función que relacione a los dos conjuntos, y establecer una función que relacione a ellos es muy complicado, entonces aprovechamos el hecho de dos espacios son homeomorfos si se comportan de la misma manera es decir son espacios equivalentes, por lo que deben tener la misma cantidad de elementos, pero sabemos que ambos conjuntos no tienen el mismo cardinal, por lo que podemos afirmar que $\mathbb{Q} \not\approx \mathbb{R}$, por no tener el mismo cardinal

Entonces es acá donde empiezan a jugar la importancia de los invariantes topológicos. Así mismo recuerden que

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 = \text{Alef sub cero}$$

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{I}| = \aleph_1 = \text{Alef sub uno}$$

4. Tomemos el siguiente conjunto $X = \{1,2,3,4\}$ y construyamos en el dos topologías $\mathcal{T} = \{X, \phi, \{1,2\}\}$ y $\mu = \{X, \phi, \{1,2\}, \{3,4\}\}$, analizar si estos espacios (X, μ) y (X, \mathcal{T}) son homeomorfos.

Resolución

Debemos de establecer una función que relacione a ambos conjuntos, para lo cual tomemos la función identidad $i_X: (X, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ entonces sabemos que

i_X : es biyectiva, la identidad siempre biyectiva

i_X : es continua, recordemos para que sea continua debemos tomar un abierto en la imagen y debo de encontrar un abierto en la pre imagen, entonces lo que tenemos que hacer es tomar la imagen reciproca es decir i_X^{-1}

$$i_X^{-1}(X) = X \varepsilon \mu$$

$$i_X^{-1}(\phi) = \phi \varepsilon \mu$$

$$i_X^{-1}(\{1,2\}) = \{1,2\} \varepsilon \mu$$

entonces tenemos que i_X : es continua.

Tenemos que ver ahora, si su inversa i_X^{-1} es continua

Recuerden que su inversa actúa de la siguiente manera tomar abiertos de la pre imagen y obtener abiertos en la imagen. Es decir, calcular la imagen reciproca de la inversa, es decir si tomamos $A \in \mu$ entonces $(i_X^{-1})^{-1}(A) = i_X(A) = A \in \mathcal{T}$

En nuestro caso $\{3,4\} \in \mu \rightarrow (i_X^{-1})^{-1}(\{3,4\}) = i_X(\{3,4\}) = \{3,4\} \notin \mathcal{T}$

Por lo tanto i_X^{-1} no es continua, por lo que los espacios (X, μ) y (X, \mathcal{T}) no son homeomorfos.

Teoría de Grafos y Aplicaciones

Estudiaremos lo concerniente a la Teoría de Grafos, empezaremos comentando que en matemática y en ciencias de la computación, la teoría de grafos llamada también teoría de las gráficas, estudia las propiedades de los grafos o gráficas.

Definición

[11] Un grafo es un conjunto no vacío, de objetos llamados vértices o nodos y una selección de pares de vértices, llamados aristas o edges (en inglés) que puede ser orientados o no. Usualmente un grafo se representa mediante una serie de puntos que son los vértices conectados por líneas llamada aristas.

Algo de Historia

[12] En 1736, el trabajo de Leonhatd Euler, sobre el problema de los puentes de Konigsberg es considerado el primer resultado de la teoría de grafos, también se considera uno de los primeros resultados topológicos en geometría, que no depende de ninguna medida. Este ejemplo ilustra la profunda relación entre la teoría de grafos y la topología. En 1845 Gustav Kirchhoff publico sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos.

En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores que plantea si es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema, que no fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, puede ser considerado como el nacimiento de la teoría de grafos. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de los grafos.

Grafo

Un grafo es una estructura formada por una pareja de conjuntos y una función de incidencia tal como $G = (V, A, \varphi)$,, donde V es el conjunto de vértices diferentes el vacío,

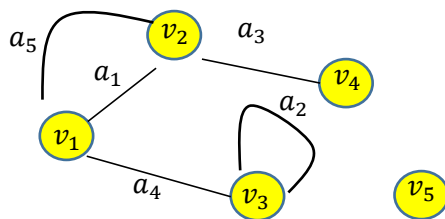
A es el conjunto de aristas, este último es un conjunto de pares de la forma (u, v) tal que $u, v \in V$, y $\varphi : A \rightarrow V^{(2)}$, donde $V^{(2)}$ es el conjunto formado por subconjuntos de 1 o 2 elementos de V que son los extremos de la arista, para simplificar, notaremos la arista (a, b) como ab . En teoría de grafos, sólo queda lo esencial del dibujo: las formas de las aristas no son relevantes, solo importa a qué vértices están unidas. La posición de los vértices tampoco importa, y se puede variar para obtener un dibujo más claro.

Muchas redes de uso cotidiano pueden ser modeladas con un grafo, una red de carreteras que conecta ciudades, una red eléctrica o la red de drenaje de una ciudad.

Ejemplo

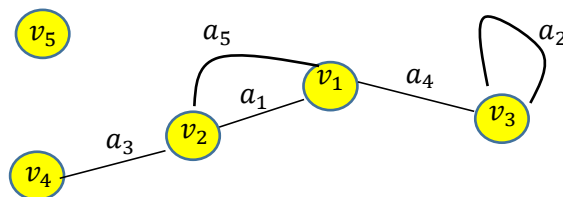
Sea el grafo $G = (V, A, \varphi)$ donde: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ y la función de incidencia

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= \{v_1, v_2\}, \\ \varphi(a_2) &= \{v_3\}, \\ \varphi(a_3) &= \{v_4, v_2\}, \\ \varphi(a_4) &= \{v_1, v_3\}, \\ \varphi(a_5) &= \{v_1, v_2\} \end{aligned}$$



Nota.

En la definición de grafo, no especifica la longitud, la forma ni la posición de la de la arista, ni especifica el orden o ubicación de los vértices, es decir no existe un único diagrama, lo importantes es como se vinculan los vértices a través de las aristas



Definición de:

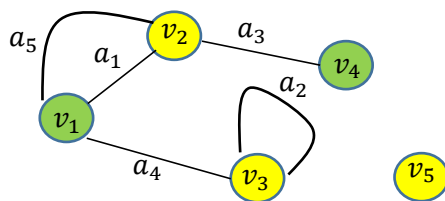
Vértice.

Los vértices constituyen uno de los dos elementos que forman un grafo. Como ocurre con el resto de las ramas de las matemáticas, a la teoría grafos no le interesa saber que son los vértices. Diferentes situaciones en las que pueden identificarse objetos y relaciones que satisfagan la definición de grafo pueden verse como grafo y así aplicar la teoría de grafos en ellos.

Vértices adyacentes

El vértice v_i es adyacente al vértice v_j si y sólo si existe una arista $a_k \in A$ tal que $\varphi(a_k) = (v_i, v_j)$, esto significa que dos vértices son adyacentes si están unidos por al menos alguna arista.

Ejemplo

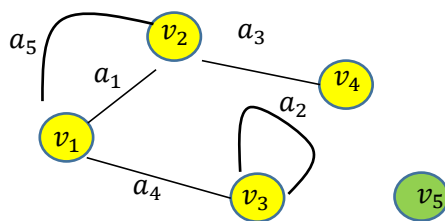


v_2 es adyacentes a v_1 y v_4 , pero no a v_3

Vértice aislado.

El vértice v_i es aislado si y solo si $\forall v_k \in V$, si $v_i \neq v_k$: v_i no es adyacente a v_k .

Ejemplo

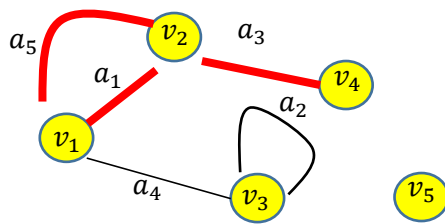


v_5 es aislado

Aristas incidentes a un vértice.

a_i es incidente a v_k si y sólo si $v_k \in \varphi(a_i)$, esto significa que son aristas que tienen a dicho vértice por extremo

Ejemplo



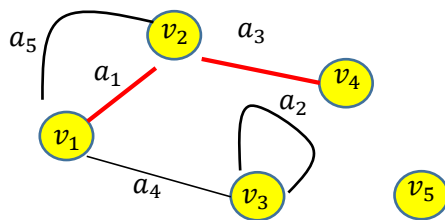
Las aristas a_1 , a_2 y a_5 son incidentes en el vértice v_2

Aristas adyacentes

La arista a_i es adyacente a a_k si y sólo si $|\varphi(a_i) \cap \varphi(a_k)| = 1$

Esto significa que son aristas que tienen un único vértice en común

Ejemplo.

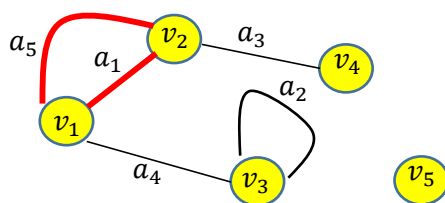


Las aristas a_1 , a_3 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_2 .

Aristas paralelas

La arista a_i es paralela a a_k si y sólo si $\varphi(a_i) = \varphi(a_k)$, es decir tiene la misma función de incidencia, es decir son aristas que ahora comparten los mismos vértices.

Ejemplo

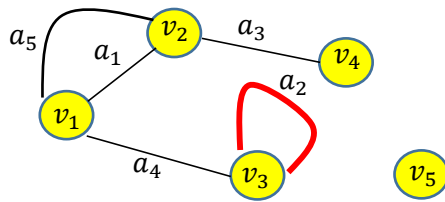


Las aristas a_1 , a_5 son paralelas ya que ambas están comprendidas en los vértices v_1 y v_2 .

Bucles o Lazos

La arista a_i es bucle o Lazo si y sólo si $|\varphi(a_i)| = 1$. Esto significa que son las aristas con ambos extremos en el mismo vértice

Ejemplo



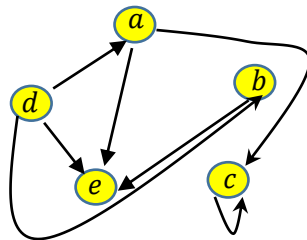
La arista a_2 es Bucle, pues sus dos extremos son el vértice v_3

Aristas Dirigidas.

En algunos casos es necesario asignar un sentido a las aristas

Ejemplo

Si se quiere representar la red de las calles de una ciudad con sus direcciones únicas. El conjunto de aristas será ahora un subconjunto de todos los pares ordenados de vértices con $(a, b) \neq (b, a)$. Los grafos que contienen aristas dirigidas se denominan grafos orientados, como el siguiente



Aristas no Orientadas

Las aristas no orientadas se consideran bidireccionales para efectos prácticos, esto equivale a decir que existen dos aristas orientadas entre los nodos, cada una en un sentido. En el gráfico anterior se ha utilizado una arista que tiene sus dos extremos idénticos: es un lazo o bucle, y aparece también una arista bidireccional y corresponde a dos aristas orientadas. Aquí $V = \{a, b, c, d, e\}$

$$A = \{(a, c), (d, a), (d, e), (a, e), (b, e), (c, a), (c, c), (d, b)\}$$

Se considera la característica de grado (positivo o negativo) de un vértice v y se indica como (v) , como la cantidad de aristas que llega o salen de él; para el caso de grafos no orientados, el grado de un vértice es simplemente la cantidad de aristas incidentes a este vértice.

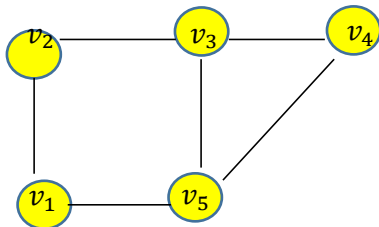
Por ejemplo, el grado positivo (salida) de d es 3, mientras que el grado negativo (llegada) de d es 0. Según la terminología seguida en algunos problemas clásicos de Investigación Operativa, como por ejemplo en el problema del flujo máximo, a un vértice del que solo salen aristas se le denominan fuente, en el ejemplo anterior, el vértice d , tiene grado

negativo 0. Contrariamente aquellos en los que sólo entran aristas se les denomina pozo o sumidero, en el ejemplo anterior, el vértice e , tiene grado positivo 0.

Grafo simple

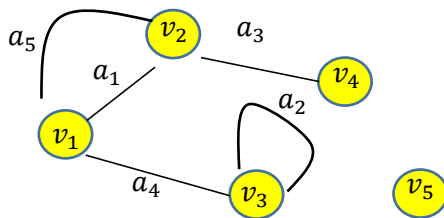
G es un grafo simple si y sólo si no tiene aristas paralelas ni bucles. Esto equivale a decir un grafo es simple si lo mas existe una arista uniendo dos vértices o que una arista cualquiera es la única que une dos vértices específicos.

Un grafo que no es simple se denomina multígrafo.



Es un grafo simple

Contra ejemplo



No es simple pues tiene aristas paralelas y Bucle

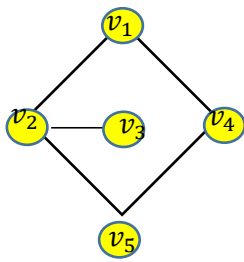
Relación de Conexión

Dado un grafo $G = (V, A, \varphi)$ se llama relación de conexión a la relación que se define en el conjunto de vértices donde un vértice se relaciona con otro $(v_i \mathcal{R} v_j)$ si y sólo si existe un camino de v_i a v_j o $v_i = v_j$

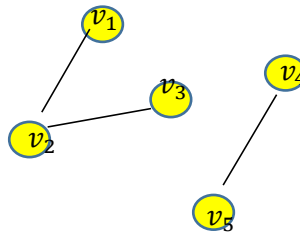
Esta relación es reflexiva, cumple la simetría y transitiva, es de equivalencia, por lo tanto, podemos obtener el conjunto cociente, y se pueden hallar las clases de equivalencia que se llaman en este caso componentes conexas.

Grafos Conexas

Un grafo es conexo si cada par de vértices está conectado por un camino; es decir, si para cualquier par de vértices (v_i, v_j) , existe al menos un camino posible desde v_i hacia v_j .



1° Grafo Conexo



2°. Grafo No Conexo

El 1° Grafo es conexo ya que desde cualquier vértice se puede llegar a cualquier otro vértice a través de un camino

El 2° Grafo no es conexo, pues por ejemplo no existe ningún camino entre los vértices v_1 y v_5

Grafo doblemente conexo

Un grafo es doblemente conexo, si cada par de vértices está conectado por al menos dos caminos disjuntos, es decir; es conexo y no existe un vértice tal que al sacarlo el grafo resultante sea desconexo. Es posible determinar si un grafo es conexo usando un algoritmo Búsqueda en anchura (BFS) o Búsqueda en profundidad (DFS).

En términos matemáticos la propiedad de un grafo de ser fuertemente conexo permite establecer con base en él una relación de equivalencia para los vértices, la cual lleva a una partición de éstos en “componentes fuertemente conexas” cuando se consideran como grafos aislados. Esta propiedad es importante para muchas demostraciones en teoría de grafos.

propiedad es importante para muchas demostraciones en teoría de grafos.

Grafos Regulares

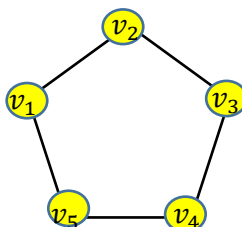
Un grafo es regular son aquellos en donde cada vértice tiene el mismo grado k que un número natural o cero

Grafo k Regular

Un grafo es k Regular si y sólo si $\forall v \in V: g(v) = k$, con $k = \mathbb{N}_0$

Ejemplo

Sea el grafo



Este grafo es 2 - regular pues todos sus vértices son de grado 2

Grafos Completos

Un grafo es completo si existen aristas uniendo todos los pares posibles de vértices. Es decir todo par de vértices (a, b) debe tener una arista e que los une. El conjunto de los grafos completos es denominado usualmente \mathbb{K} , siendo \mathbb{K}_n el grafo completo de n vertices.

Un \mathbb{K}_n es decir, grafo completo de n vertices tiene exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas

La representación gráfica de los \mathbb{K}_n como los vértices de un polígono regular da cuenta de su peculiar estructura.

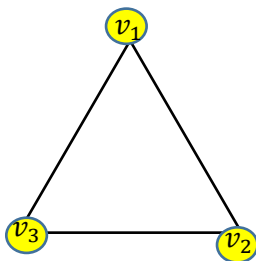
Grafos Completos \mathbb{K}_n

Sea $n \in \mathbb{N}$:

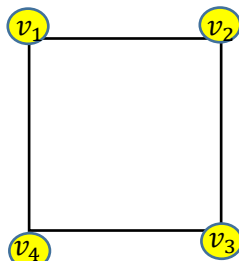
$$\mathbb{K}_n = (V, A, \varphi), \forall v, w \in V, v \neq w, \Leftrightarrow \exists a \in A : \varphi(a) = \{v, w\}$$

Es decir los \mathbb{K}_n son grafos simples de n vértices en los cuales cada vértice es adyacente a todos los demás.

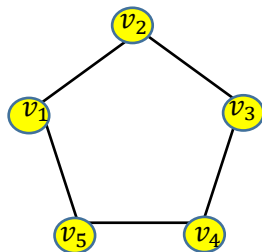
Ejemplos



Grafo \mathbb{K}_3



Grafo \mathbb{K}_4



Grafo \mathbb{K}_5

Grafos Bipartitos

Un grafo $G = (V, A, \varphi)$ donde sus vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ es bipartito si puede expresarse como

$$G = \{V = V_1 \cup V_2, A\}, \text{ con } V_1 \neq \phi, V_2 \neq \phi$$

Es decir, sus vértices son la unión de dos grupos de vértices, bajo las siguientes condiciones

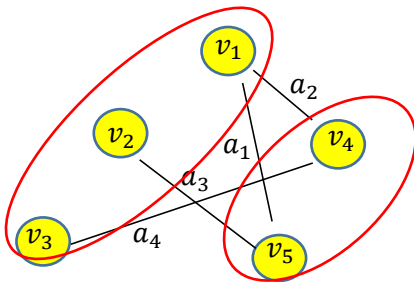
1. $V_1 \cap V_2 = \phi$ (son disjuntos y no vacíos)
2. Cada arista de A une un vértice de V_1 con uno de V_2 ,
3. No existen aristas uniendo dos elementos de V_1 ; análogamente para V_2 . Es decir

$$\forall a_i \in A : \varphi(a_i) = \{v_i, v_k\} \text{ con } v_i \in V_1, v_k \in V_2$$

Bajo estas condiciones, el grafo se considera bipartito y puede describirse informalmente como el grafo que une o relaciona dos conjuntos de elementos diferentes como aquellos resultantes de los ejercicios y puzzles en los que debe unirse un elemento de la columna A con un elemento de la columna B

Ejemplo

Consideremos el siguiente grafo, cuyo conjunto de vértices es: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Las celdas las podemos elegir de la siguiente manera

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, V_2 = \{v_4, v_5\}$$

El grafo es bipartito.

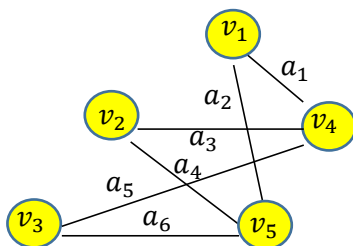
Grafos Bipartitos Completos

Los que se denotaran como $\mathbb{K}_{n,m}$

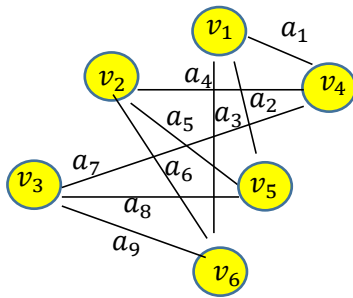
Son los grafos bipartitos de $n + m$ vértices, con todas las aristas posibles.

Ejemplos

$$\mathbb{K}_{n,m} = \mathbb{K}_{3,2} = 9$$



$$\mathbb{K}_{n,m} = \mathbb{K}_{3,3} = 3 \times 3 = 9$$



La cantidad de aristas de un grafo es el producto de $n \times m$

$$\mathbb{K}_{n,m} = 3.3 = 9$$

Representación Matricial de Grafos

Los grafos se van a representar en forma matricial, para ello sea $G = (V, A, \varphi)$ un grafo donde los vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, y las aristas $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, con esto definiremos dos matrices

Matriz de Adyacencia y Matriz de Incidencia.

Matriz de Adyacencia

Sea $G = (V, A, \varphi)$ un grafo con vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, y las aristas $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, la matriz de adyacencia pide que sea una matriz Booleana de orden $n \times n$ (cuadrada) y cada elemento

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0, & \text{si } v_i \text{ no es adyacente a } v_j \end{cases}$$

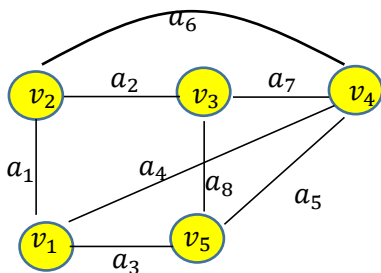
es decir

$$\text{Ma}(G) \text{ cuyos elemtos } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0, & \text{si } v_i \text{ no es adyacente a } v_j \end{cases}$$

Esto significa que la matriz de adyacencia es una matriz cuadrada, las filas y las columnas representan los vértices y los valores de los elementos son 1 si ambos vértices son adyacentes y 0 en caso de no serlo

Ejemplo

Dado el grafo



En este grafo tenemos 5 vértices significa que la matriz de adyacencia será de orden 5×5 , la vamos a ubicar en forma creciente v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . Entonces la matriz de adyacencia la formamos por ejemplo con

El vértice v_1 es adyacente con v_2, v_4, v_5

El vértice v_2 es adyacente con v_1, v_3, v_4

El vértice v_3 es adyacente con v_2, v_4, v_5

El vértice v_4 es adyacente con v_1, v_2, v_3, v_5

El vértice v_5 es adyacente con v_1, v_3, v_4

Entonces la matriz adyacente G es

$$\text{Ma}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Incidencia

Sea $G = (V, A, \varphi)$ un grafo con vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, y las aristas $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, la matriz de incidencia es una matriz Booleana de orden $n \times m$ (no necesariamente cuadrada) donde las filas representan a los vértices y las columnas a las aristas, cuyos elementos también pueden ser 1 o 0, por lo que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ es extremo de } a_j \\ 0, & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } a_j \end{cases}$$

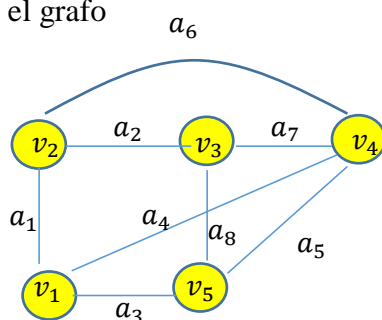
Es decir

$$\text{Ma}(G) \text{ cuyos elementos } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ es extremo de } a_j \\ 0, & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } a_j \end{cases}$$

Esto significa que la matriz de Incidencia es una matriz rectangular, las filas representan los vértices y las columnas representan las aristas y valores de los elementos son 1 si v_i es extremo de la arista a_j y 0 en caso de no serlo

Ejemplo

Dado el grafo



En este caso los vértices son 5 y las aristas son 8, es decir la matriz de Incidencia es de orden 5×8 , lo que nos conviene llenarla en forma vertical. Entonces la matriz de adyacencia la formamos por ejemplo con

La arista a_1 esta entre los vértices v_1, v_2

La arista a_2 esta entre los vértices $v_1 v_5$

La arista a_3 esta entre los vértices $v_2 v_3$

La arista a_4 esta entre los vértices $v_1 v_4$

La arista a_5 esta entre los vértices $v_4 v_5$

La arista a_6 esta entre los vértices $v_2 v_4$

La arista a_7 esta entre los vértices $v_3 v_4$

La arista a_8 esta entre los vértices $v_3 v_5$

Entonces la matriz de Incidencia G es $Mi(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Grado o Valencia de cada Vértice

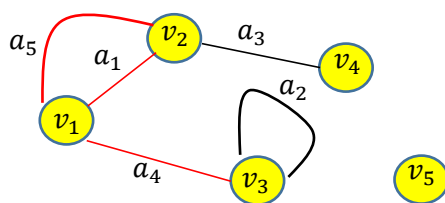
Sea el grafico $G = (V, A, \varphi)$. El grado o valencia de cada vértices es una función grado $g: V \rightarrow N_o$ que se aplica a los vértices y nos devuelve la cantidad de vértices que inciden, si fuera un bucle, se cuenta dobles, es decir

$$g: V \rightarrow N_o / g(v_i) = \text{cantidad de aristas incidentes en } v_i$$

Nota.

Los bucles se cuentan doblemente

Ejemplo



Los grados de los vértices son

Grado del vértice v_1 : $g(v_1) = 3$

Grado del vértice v_2 : $g(v_2) = 3$

Grado del vértice v_3 : $g(v_3) = 3$

Grado del vértice v_4 : $g(v_4) = 1$

Grado del vértice v_5 : $g(v_5) = 0$

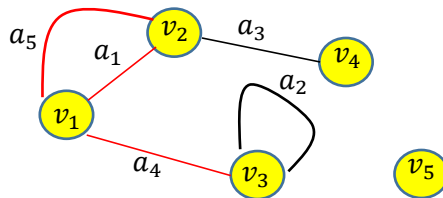
Propiedad

En todo grafo se cumple que la suma de los grados de los vértices es igual al doble de la cantidad de aristas

Simbólicamente

$$\sum g(v_i) = 2|A|$$

Ejemplo



$$\left. \begin{array}{l} g(v_1) = 3 \\ g(v_2) = 3 \\ g(v_3) = 3 \\ g(v_4) = 1 \\ g(v_5) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\sum_{i=1}^5 g(v_i) = 3 + 3 + 3 + 1 + 0 = 10 = 2|A| = 2(5) = 10$$

Ejemplo

¿Cuál es la cantidad total de vértices de un grafo que tiene 2 vértices de grado 4, uno de grado 3, 5 de grado 2, y el resto colgantes (de grado 1) sabiendo que en total hay 12 aristas?

Resolución

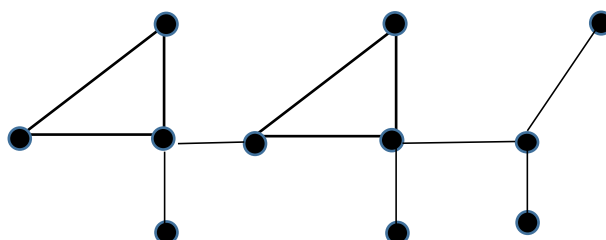
Para resolver este ejemplo usaremos la propiedad anterior es decir sumemos todos los grados de vértices

Propiedad anterior: $2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + x \cdot 1 = 2 \cdot 12$ resolviendo

$$21 + x = 24 \rightarrow x = 3 \text{ (cantidad de vértices colgantes)}$$

Por lo tanto la cantidad total de vértices es $= 2 + 1 + 5 + 3 = 11$

Una forma posible de dibujar este grafica sería



Caminos y Ciclos en grafo

Un Camino: Es una sucesión de aristas adyacentes

Un Ciclo o Circuito:

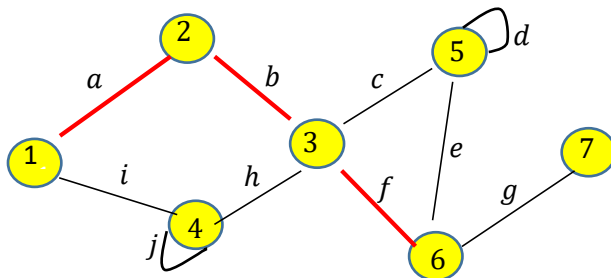
Un ciclo es una sucesión de aristas adyacentes, donde no se recorre dos veces la misma arista y donde se regresa al punto inicial. Es decir, es un camino cerrado (vértice inicial = vértice final).

Longitud de un Camino: Es la cantidad de aristas que lo componen

Camino Simple. Si todos los vértices son distintos

Ejemplo

En el siguiente grafo $G = (V, A, \varphi)$, con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, busquemos caminos entre los vértices 1 y 6 e indiquemos la longitud de cada uno de ellos



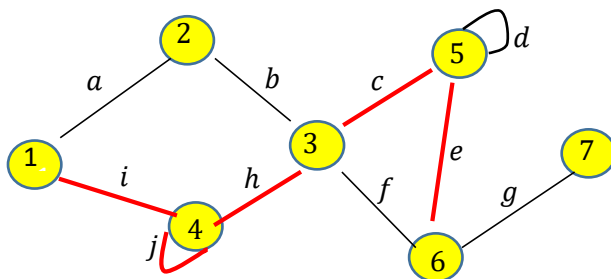
Nombraremos algunos caminos posibles y su longitud

Un posible camino de 1 a 6 sería $C_1 = \{1; a, 2; b, 3; f, 6\}$

Longitud de C_1 : $lon [C_1] = 3$

Este es un camino simple (no repite ningún vértice)

Otro posible camino de 1 a 6 sería

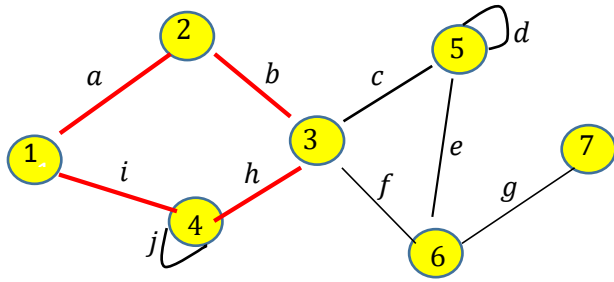


$C_2 = \{1; i, 4; j, 4; h, 3; c, 5; e, 6\}$

Longitud de C_2 : $lon [C_2] = 5$

Este no es un camino simple (se repite el vértice 4)

Otro posible camino de 1 a 6 sería

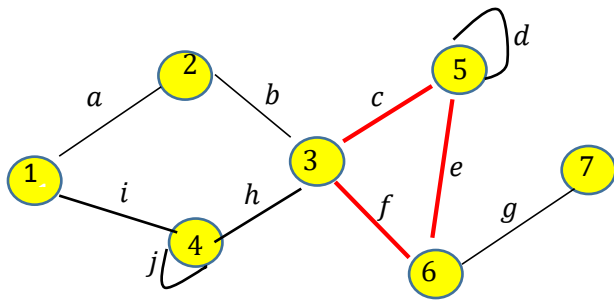


$$C_3 = \{1; a, 2; b, 3; h, 4; i, 1\}$$

Longitud de C_3 : $lon [C_3] = 4$

Es un camino cerrado, así mismo es un ciclo simple (no repite ningún vértice)

Veamos otro ciclo

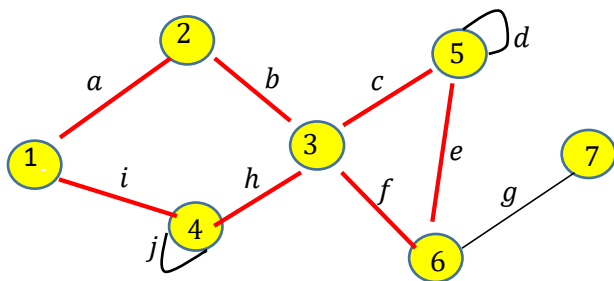


$$C_4 = \{3; c, 5; e, 6; f, 3\}$$

Longitud de C_4 : $lon [C_4] = 3$

Es un camino cerrado, así mismo es un ciclo simple (no repite ningún vértice)

Otro posible camino de 1 a 6 sería



$$C_5 = \{1; a, 2; b, 3; c, 5; e, 6; f, 3; h, 4; i, 1\}$$

Longitud de C_5 : $lon [C_5] = 7$

Es un camino cerrado, así mismo es un ciclo no simple (no repite ningún vértice 3)

Caminos y Ciclos Eulerianos

Existen algunos caminos y ciclos especiales, se llaman Eulerianos

Caminos de Euler

Se llama camino de Euler a los caminos que pasan por todas las aristas sólo una vez.

Ciclo de Euler

Se llama ciclo de Euler a los ciclos que pasan por todas las aristas sólo una vez.

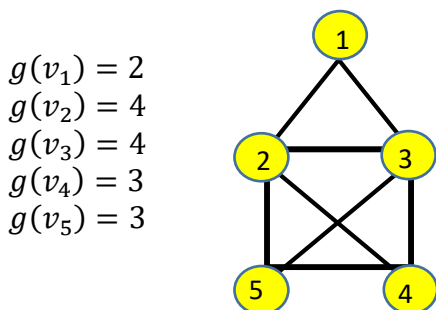
Nota

[13] Un grafo tiene un camino Euleriano si y solo si es conexo y todos los vértices tienen grado par, o a lo sumo dos tienen grado impar. Esto es una condición necesaria y suficiente

Un grafo tiene ciclo Euleriano si y sólo si es conexo y todos los vértices tienen grado par. A qué se debe esto, a que cada vez que pasamos por un vértice estamos entrando con un grado y saliendo con otro ya estamos utilizando dos grados y si lo volvemos a pasar tendríamos 4 y así sucesivamente tenemos 6, por eso todos los grados deben ser pares.

Ejemplo

Veamos el siguiente grafo, analicemos cual es el grado de cada vértice

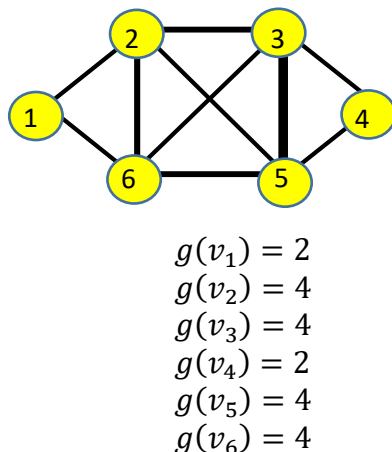


Este grafo no tiene ciclo Euleriano, pues hay dos vértices de grado impar 3. Tiene sólo camino Euleriano.

Ejemplo

Veamos el siguiente grafo, analizar cuales el grado de cada vértice

Resolución



Este grafo tiene ciclo Euleriano, pues todos sus vértices tienen grado par

Caminos y Ciclos Hamiltonianos

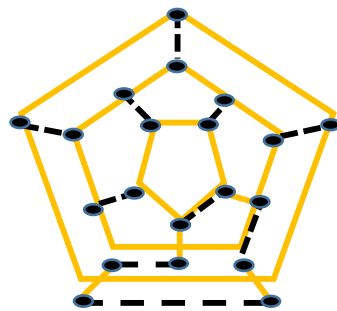
Camino Hamiltoniano. Es el camino que pasa por todos los vértices una sola vez, y no se impone regresar al punto de partida

Por ejemplo, en el juego de Ajedrez, un caballo puede recorrer todas las casillas de un tablero de ajedrez sin pasar dos veces por la misma

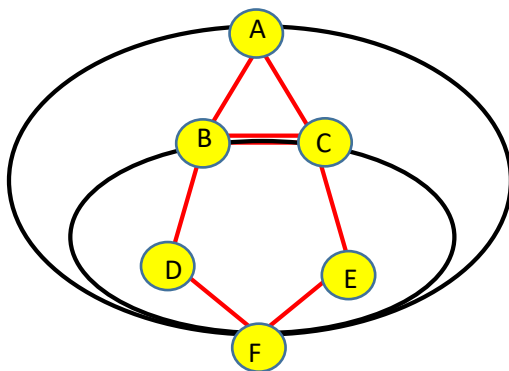
Ciclo Hamiltoniano. Es un ciclo simple que pasa por todos los vértices una sola vez, excepto el vértice que parte y al cual llega.

Por ejemplo, en un museo grande, al estilo del Louvre, lo idóneo sería recorrer todas las salas una sola vez, esto es buscar un ciclo hamiltoniano en el grafo que representa el museo donde los vértices son las salas y las aristas los corredores o puertas entre ellas.

Ejemplo de un ciclo hamiltoniano en el grafo del dodecaedro



Ejemplo. El siguiente grafo, tendrá camino de Hamilton



Un posible ciclo hamiltoniano es: {A, B, D, F, E, C, A}

Nota

Hoy en día, no se conocen métodos generales para hallar un ciclo hamiltoniano en tiempo polinómico, siendo la búsqueda por fuerza bruta de todos los posibles caminos u otros métodos excesivamente costosos. Existen, sin embargo, métodos para descartar la existencia de ciclos hamiltonianos en grafos pequeños

Estructuras de datos en la representación de grafos.

Existen diferentes formas de almacenar grafos en una computadora. La estructura de datos usada depende de las características del grafo y el algoritmo usado para manipularlo.

Entre las estructuras más sencillas y usadas se encuentra las listas y las matrices, aunque frecuentemente se usa una combinación de ambas. Las listas son preferidas en grafos dispersos porque tienen un eficiente uso de la memoria. Por otro lado, las matrices proveen acceso rápido, pero pueden consumir grandes cantidades de memoria.

Estructuras de listas

Señalaremos dos

1. Lista de incidencia.

Las aristas son representadas con un vector de pares ordenados, si el grafo es dirigido, donde cada par representa una de las aristas

2. Lista de adyacencia.

Cada vértice tiene una lista de vértices los cuales son adyacentes a él. Esto causa redundancia

en un grafo no dirigido, dado que A existe en la lista de adyacencia de B y viceversa., pero

las búsquedas son más rápidas, al costo de almacenamiento extra.

En esta estructura de datos la idea es asociar a cada vértice i del grafo una lista que contenga todos aquellos vértices j que sean adyacentes a él. De esta forma solo reservara memoria para los arcos adyacentes a i y no para todos los posibles arcos que pudieran tener como origen i . El grafo, por tanto, se representa por medio de un vector de n componentes, si $|V| = n$ donde cada componente va a ser una lista adyacente correspondiente a cada uno de los vértices del grafo. Cada elemento de la lista consta de un campo indicando el vértice adyacente. En caso de que el grafo sea etiquetado, habrá que añadir un segundo campo para mostrar el valor de la etiqueta.

Estructuras matriciales

Consideremos dos

1. Matriz de incidencia.

El grafo está representado por una matriz de A aristas por V vértices, donde (arista, vértices) contiene la información de la arista (1- conectado, 0 - no conectado).

2. Matriz de adyacencia.

El grafo está representado por una matriz cuadrada M de tamaño $n \times n$, donde n es el número de vértices. Si hay una arista entre un vértice x y un vértice y , entonces el elemento M_{xy} es 1, de lo contrario, es 0.

Subgrafo

Un subgrafo de un grafo G es un grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas son subconjuntos de los de G . Se dice que un grafo G contiene a otro grafo H si algún subgrafo de G es H o es isomorfo a H (dependiendo de las necesidades de la situación). El subgrafo inducido de G es un subgrafo G' de G tal que contiene todas las aristas adyacentes al subconjunto de vértices de G .

Definición

Sea $G = (V, A)$. $G' = (V', A')$ se dice subgrafo de G si

1. $V' \subseteq V$
2. $A' \subseteq A$
3. (V', A') es un grafo

Nota

Si $G' = (V', A')$ es subgrafo de G , para todo $v \in G$ se cumple

$$gr(G', v) \leq gr(G, v)$$

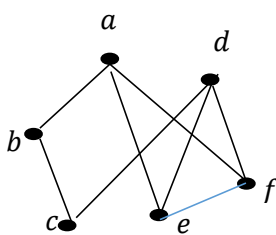


Grafico G_1

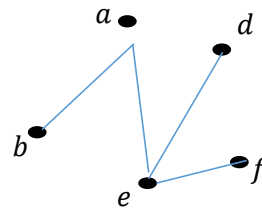


Grafico G_2

Grafico G_2 es subgrupo de G_1

Aplicaciones

[14] Gracias a la Teoría de grafos se pueden resolver diversos problemas como por ejemplo la síntesis de circuitos secuenciales, contadores o sistemas de apertura. Se utiliza para diferentes áreas, por ejemplo, Dibujo Computacional, en todas las áreas de Ingeniería.

Los grafos se utilizan también para modelar trayectorias como el de una línea de autobús a través de las calles de una ciudad, en el que podemos obtener caminos óptimos para el trayecto aplicando diversos algoritmos como puede ser el algoritmo de Floyd.

Para la administración de proyectos, utilizando técnicas como PERT (Técnicas de evaluación, y revisión de programas) en la que se modelan los mismos utilizando grafos y optimizando los tiempos para concretar los mismos.

La teoría de grafos también ha servido de inspiración para las ciencias sociales, en especial para desarrollar un concepto no metafórico de red social que sustituye los nodos por los actores sociales y verifica la posición centralidad, e importancia de cada actor dentro de la red. Esta medida permite cuantificar y abstraer relaciones complejas, de manera que la estructura social puede representarse gráficamente. Por ejemplo, una red social puede representar la estructura de poder dentro de una sociedad al identificar los vínculos (aristas), su dirección e intensidad y da idea de la manera en que el poder se transmite y a quienes

Los grafos son importantes en el estudio de la biología y hábitat.

El vértice representa un hábitat y las aristas o edges, representan los senderos de los animales o las migraciones. Con esta información, los científicos pueden entender cómo esto puede cambiar o afectar a las especies en su hábitat.

IV. DISCUSIÓN

Los resultados que se desprenden del presente trabajo se ven reflejados en las aplicaciones de otras ramas matemáticas que son esenciales y están ligados en los razonamientos de la geometría diferencial, análisis, álgebra, análisis matemático e investigación operativa. Pero es además una herramienta indispensable en física, física química, medicina, biología, la genética, informática, teoría de redes, teoría de juego, teoría de grafos, etc. Un grafo es un conjunto de puntos, llamados vértices, algunos de los cuales están ligados entre sí por medio de líneas, denominadas las aristas. Los grafos no solo son útiles a los matemáticos puros, sino también a ingenieros, en la representación de circuitos eléctricos, para los cálculos teóricos de partículas elementales, en economía, por sus aplicaciones en investigación operativa, cuyo estudio nos conduce a la llamada topología de la red.

En topología se trabajó con los mismos objetos que en la teoría de grafos, pero de modo distinto, en topología, un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo; se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible.

La teoría de grafos es parte de la matemática discreta y la topología tiene que ver más con lo “continuo”, por lo que se propuso revisar la relación entre topología y la teoría de árboles, considerando a un árbol como un conjunto parcialmente ordenado con la propiedad de que todo segmento inicial está bien ordenado, pero analizando un poco más, se puede ver que muchos grafos son árboles.

En un grafo, la distancia entre dos vértices es el menor número de aristas de un recorrido entre ellos.

V. CONCLUSIONES

Los estudiosos de la ciencia y de las matemáticas establecen el inicio de la Teoría de Grafos con el trabajo de Euler (1736). En 1852, Francis Guthrie formuló el problema de los cuatro colores para colorear un mapa cartográfico, que hizo que un gran número de matemáticos, tales como Cayley, Hamilton, De Morgan, Kemple, Tait o Ramsey, se preocupasen por estudiar y desarrollar la Teoría de Grafos, sin embargo, se tardó mas de un siglo en demostrar su resultado (Appel y Haken 1977a, b), lo requirió del uso de ordenadores potentes para su consecución.

Por otra parte, Hierholzer (1873) proporcionó una caracterización de los grafos denominados eulerianos como aquellos que son conexos y todos sus nodos tienen valencia par.

El término grafo es introducido por primera vez en el trabajo de Sylvester (1878)

Con la Teoría de Grafos se puede optimizar la ruta inicial a través de cambios de secuencias visitadas planteadas de una ruta inicial, demostrando que pueden mejorarse dicha ruta mediante el algoritmo del problema del viajante y utilizando tres factores como kilómetro, tiempo y coste, con lo que la gestión de rutas es una de las áreas de gestión de una empresa que permite reducir costos si se optimizan eficientemente.

Buscamos representar de forma visual conjuntos de datos abstractos en forma de nodos o vértices y la unión o relaciones que estas pueden tener con otros nodos a través de aristas, gracias a la teoría de grafos se pueden lograr grandes avances en el análisis de amplios volúmenes de data

En la actualidad, la Teoría de Grafos permite esquematizar y resolver muchos problemas en diferentes campos de la ciencia y la tecnología, en particular, también se viene utilizando dicha teoría para modelar y resolver diferentes problemas referidos a la eficiencia del transporte.

En las ciencias de la computación hay una serie enorme de fenómenos que se pueden modelar como grafos, por lo que se pueden aprovechar las propiedades matemáticas de los grafos para estudiarlos desde un punto de vista teórico preciso y luego, aplicar mecanismos de optimización sobre estos fenómenos.

Así mismo del trabajo realizado podemos concluir que dentro de las aplicaciones de la topología, tenemos la topología algebraica, particularmente a través de la denominada topología digital, que posee numerosas aplicaciones en informática gráfica, robótica o procesamiento de imágenes digitales (utilizado a su vez en control automático de calidad,

lectura automática de documentos, radiología, meteorología, geología, etc.). En teoría de sistemas dinámicos, el estudio de las propiedades cualitativas (topológicas) de los modelos permite hacer predicciones certeras sobre el comportamiento de los sistemas observados. La teoría de homotopía se ha descubierto con una herramienta indispensable en física

1. para clasificar formas de objetos como solitones, vórtices, etc.;
2. en estudio de cristales líquidos, sustancias que exhiben la dualidad solido-líquido, es decir que, simultáneamente, poseen propiedades de los líquidos (fluidez y viscosidad) y propiedades ópticas que se parecen de modo asombroso a las de los cristales;
3. para la clasificación de defectos y texturas en medios ordenados, como los cristales. Además, físicos y químicos se centran en la teoría de casi-cristales, aleaciones metálicas, donde la disposición de los átomos es regular, como en un cristal, pero aperiódica. Las teorías de grafos y de mosaicos proporcionan modelos de difracción para los sólidos casi-cristalinos. La teoría cuántica de campos emplea las teorías de homotopía y homología como herramientas básicas, la teoría de librados es esencial en estudios electromagnéticos, etc. Sin duda, se descubrirán en el futuro otras muchas maneras de aplicar las teorías topológicas a otros campos de la Ciencia.

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M. Macho Stadler, «¿Qué es la topología?», 2012.
- [2] R. Diestel, Graph Theory, Springer 2000
- [3] P. Herrero y P. Lucas, «Continuidad,» de *Topología*, Murcia, 2012.
- [4] A. García y W. Dal Lago, «Elementos de topología,» Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, 2018.
- [5] M. Perez, «Topología en el plano y el espacio,» de *Cálculo diferencial e integral en varias variables*, 2020.
- [6] P. Shick, General Topology, Editorial Wiley, 2007.
- [7] W. Sierpinski, General Topology, Editorial Dover, 2000.
- [8] Maynard Masfield, Introducción a la Topología, 1974.
- [9] M. García Guerrero y J. Margalef Roig, Topología, Editorial Alhambra, 1995
- [10] J. Munkres, Topología General, Universidad Nacional de Colombia, 2002.
- [11] Universidad Politecnica de Valencia, «Teoría de grafos,» Valencia, 2020.
- [12] J. Parra Muñoz y M. Alvarez Nuñez, «Teoría de grafos,» 2013.
- [13] M. Álvarez Nuñez y J. Parra Muñoz, Teoría de grafos, 2013.
- [14] E. Hernandez Perez, «Teoría de grafos y algunas de sus aplicaciones,» 2013.
- [15] C. Borges, Elementary Topology and Applications, World Scientific, 2000.
- [16] F. Croom, Principles of topology, Cengage Learning, 2002.
- [17] S. Davis, Topology, McGraw Hill, 2005.
- [18] S. Krantz, Essentials of topology with Applications, CRC Press, 2010.
- [19] R. Lopez Camino, Ejercicios de topología general, Editorial Nativola, 2009.
- [20] V. Runde, A taste of topology, Editorial Springer, 2005.
- [21] P. Shick, General Topology, Editorial Wiley, 2007.
- [22] W. Sierpinski, General Topology, Editorial Dover, 2000.
- [23] G. Skandalis, Maths pour la licence: Topologie et analyse, Dunod, 2001.
- [24] O. Viro, O. Ivanov, N. Netsvetev y V. Kharlamov, Elementary Topology: Problem textbook, AMS, 2008.
- [25] F. Chamizo Llorente, Topología, 2013.
- [26] E. Hernandez Perez, «Teoría de grafos y algunas de sus aplicaciones,» 2013.
- [27] Appel, K., Haken, W. Every planar map is four colorable. Part I. Discharging. Illinois Journal of Mathematics 21, 429–490. (1977a):
- [28] Appel, K., Haken, W. Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility. Illinois Journal of Mathematics 21, 491–567. (1977b):
- [29] Sylvester, J.J. (1878): Chemistry and Algebra. Nature 17, 284.