Universidad Nacional
SAN LUIS GONZAGA

Universidad Nacional "San Luis Gonzaga"

Software Antiplagio

UNICHECK

INFORME DE REVISIÓN

Se ha realizado el analisis con el software antiplagio de la Universidad Nacional "San Luis Gonzaga", por parte de los docentes reponsables, al documento cuyo titulo es:

El teorema de la función inversa en espacios euclidianos y sus aplicaciones

presentada por:

ALEX OSWALDO YANCE GUERRA

ALUMNO del nivel **PREGRADO** de la facultad de **CIENCIAS** obteniendose como resultado una coincidencia de **0.91%** otorgádosele el calificativo de:

APROBADO

Se adjunta al presenta el reporte de evaluació del software antiplagio.

Observaciones:

sin observación

Ica, **5** de **Septiembre** de **2019**

JAVIER EDUARDO MAGALLANES YUI
ASESOR
SOFTWARE ANTIPLAGIO
FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA" DE ICA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

"EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA EN ESPACIOS EUCLIDIANOS Y SUS APLICACIONES"

TESIS
PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

AUTOR
Bach. YANCE GUERRA ALEX OSWALDO

ASESOR
Mag. VARGAS MAYA NÉSTOR MANUEL

ICA – PERÚ
2019

Dedicatoria

A Dios todopoderoso
A mi madre, Marleny
A mi padre, Oswaldo
A mis hermanos, Lissette y Walter

Agradecimientos

- ❖ A la Universidad Nacional "San Luis Gonzaga" de Ica, por acogerme en sus aulas de la Facultad de Ciencias, cuando era estudiante de pre – grado.

- ❖ A mis profesores de pre – grado, por sus enseñanzas dentro del transcurso de mi formación académica.

- ❖ A mi asesor, el Mag. Néstor Manuel Vargas Maya, por su valiosa contribución en el presente trabajo de tesis.

- ❖ A la comisión evaluadora, por su labor en la revisión de la presente tesis.

Índice

Resumen

En la presente tesis se estudió la posibilidad de demostrar una versión del teorema de la función inversa para funciones definidas entre espacios euclidianos. En nuestra hipótesis afirmamos que era factible realizar esta demostración y nuestro objetivo fue generalizar esta versión. Mediante los métodos de demostración, directo e indirecto, se probó que si f es una función definida entre espacios euclidianos con derivada $f'(c)$ no nula en c, entonces, localmente, posee una inversa f^{-1} confirmándose nuestra hipótesis. Asimismo, se demuestra que esta inversa hereda, localmente, las propiedades de f.

Palabras Claves:

- Teorema de la Función Inversa
- Espacio Euclidiano
- Vecindad
- Biyectiva

Abstract

In the present thesis the possibility of demonstrating a version of the theorem of the inverse function for defined functions between Euclidean spaces was studied. In our hypothesis we affirmed that it was feasible to carry out this demonstration and our objective was to generalize this version. Through the methods of demonstration, direct and indirect, it was proved that if f is a function defined between Euclidean spaces with derivative $f'(c)$ not null in c, then, locally, it has an inverse f^{-1} confirming our hypothesis. Likewise, it is demonstrated that this inverse inherits, locally, the properties of f.

Keywords:

- Inverse Function Theorem
- Euclidean Space
- Neighborhood
- Bijective

Introducción

La investigación está asociada con el Teorema de la Función Inversa en Espacios Euclidianos. El objetivo de esta tesis es dar una presentación rigurosa y detallada del Teorema de la Función Inversa estableciendo las condiciones que garantizan la validez del teorema, se brinda un enfoque local del teorema estudiado.

Antes de presentar los resultados de esta investigación, con la pretensión de que esta tesis tenga una lectura autosuficiente, se considera un marco teórico que contiene resultados y conceptos previos necesarios para comprender esta versión general del Teorema de la Función Inversa. Este breve marco teórico consta de seis capítulos.
La tesis consta de un breve marco teórico donde yacen seis capítulos. En el capítulo 1, se presentan con los conceptos y propiedades básicas de la teoría de conjuntos; en el capítulo 2, se introduce la topología de la recta real; en el capítulo 3, se desarrolla la noción de límite, continuidad y diferenciabilidad de las funciones reales de variable real; se presentan sus propiedades básicas; en el capítulo 4, se presenta conceptos y propiedades relacionadas con el álgebra lineal que se usan en esta tesis; en el capítulo 5, se hace una introducción de los espacios euclidianos presentando su topología; el capítulo 6, se dedica a las aplicaciones entre espacios euclidianos. Finalmente se presentan los resultados obtenidos en esta investigación tanto sobre el Teorema de la Función Inversa en Espacios Euclidianos como de sus aplicaciones en distintas disciplinas de la matemática.

Antecedentes

El matemático francés *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) formuló un teorema que, en esencia, es el Teorema de la Función Inversa, relacionado con el Teorema de la Función Implícita. *Agustín Louis Cauchy* (1789-1716) puso su atención en el teorema y sus generalizaciones ([1]). Justamente a este último se le atribuye el Teorema de la Función Inversa junto a *Jacques Salomon Hadamard* (1865-1963) ([11]). En el siglo XIX, el matemático italiano *Ulisse Dini* (1845-1918) presentó la primera prueba (por inducción) del Teorema de la Función Inversa para un sistema con varias ecuaciones y varias variables reales; después aplicó este teorema en la geometría diferencial. Durante esa época las diferencias entre el análisis real y complejo eran profundas ([8]). Luego *Ralph Tyrell Rockafellar* (1935) trabajó este teorema en espacios de dimensión finita ([2]). Mientras que *Jean-Pierre Aubin* y *Halina Frankowska* (1984) en uno de sus artículos probaron varias generalizaciones del Teorema de la Función Inversa que aplican a la Teoría de Optimización (propiedades Lipschitz de mapas definidos por restricciones) y a la controlabilidad local de ecuaciones diferenciales. Las generalizaciones se refieren principalmente a teoremas de función inversa para mapas uniformes definidos en subconjuntos cerrados y para mapas de valores establecidos ([2]). En 1990, *José de Jesús Ayala* aplicando el Teorema de la Función Inversa demostró el Teorema de la Variedad Invariante y su utilidad alcanza niveles importantes dentro de las ecuaciones diferenciales avanzadas ([3]). *Félix Ricardo Villanueva Santos* (2010) demostró el Teorema de la Función Inversa para aplicaciones Multivaluadas y también la relación de este teorema con el Principio de la Aplicación Abierta Uniforme ([28]). Finalmente, *Tezoto Leandro* (2014) presentó la demostración del Teorema de la Función Inversa, así como algunas aplicaciones sobre la Existencia de Solución para Ecuaciones. La demostración del Teorema de la Función Inversa está dado por un Teorema de Perturbación de la Identificación, que es una consecuencia del Teorema del Punto Fijo de Banach ([27]). Es por estos antecedentes que se tomó la decisión de estudiar este Teorema de la Función Inversa en Espacios Euclidianos.

Por otro lado, en el análisis matemático de las funciones reales de variable real, se probó que si $f'(a) \neq 0$, entonces f posee una inversa local en a; es decir, existen vecindades $V(a,\delta)$ de a y $V(f(a),\varepsilon)$ de $f(a)$ tales que $f: V(a,\delta) \to V(f(a),\varepsilon)$ es biyectiva con inversa continua. Asimismo, se probó que, si f es de clase C^1 en a con $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es localmente de clase C^1 en $f(a)$. También se probó que si f es de clase C^k con $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es de clase C^k. Teniendo en cuenta estos resultados es coherente preguntarse si estos resultados se pueden generalizar para aplicaciones definidas entre espacios euclidianos.

Materiales y Métodos

Materiales

Conceptos y propiedades de la teoría de funciones, de la topología en la recta real, de la continuidad y diferenciabilidad de una función real de variable real, de álgebra lineal, de espacios euclidianos y de las aplicaciones entre espacios euclidianos.

Método

La investigación corresponde al área del Análisis Real de la Matemática, que es una ciencia básica formal, de manera que para analizar la información utilizamos el método inductivo – deductivo y, para demostrar la validez del Teorema de la Función Inversa en espacios euclidianos, teniendo como referencia la versión del mismo teorema para funciones reales de variable real, aplicamos los métodos directo e indirecto de demostración; estos mismos métodos los usamos en la demostración de las aplicaciones del teorema del que nos hemos ocupado.

Resultados

A. Breve Marco Teórico

Capítulo 1

Nociones Básicas de la Teoría de Conjuntos

Creada a finales del siglo XIX por el matemático *George Cantor*, la Teoría de Conjuntos es imprescindible en la actualidad, puesto que los conjuntos están presentes implícita o explícitamente en todo estudio científico y, muy en particular, en el matemático. Nuestro tratamiento de la teoría de conjuntos es deliberadamente ingenuo, sin preocuparnos, por lo tanto, en fundamentarlo rigurosamente.
Aquí se presentan algunos conceptos orientados a sostener el tema de fondo de la presente tesis.

1.1 Producto Cartesiano de Conjuntos.

Definición 1.1.1 El *producto cartesiano* de los conjuntos no vacíos A y B, es el conjunto denotado por $A \times B$ y definido por:

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \text{ y } b \in B\};$$

El conjunto $A \times B$ se lee: (conjunto) producto cartesiano de A y B.

$$(a, b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \text{ y } b \in B.$$

El autor *Gonçalvez A.* enuncia una definición similar en [13], pág.11.

Ejemplo:

Sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{c, d\}$ tenemos los siguientes conjuntos $A \times B = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$ y $B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$. Aquí vemos que generalmente no se cumple la igualdad $A \times B = B \times A$.

Proposición 1.1.2
Sean A, B, C, y D conjuntos cualesquiera. Se cumplen las propiedades siguientes:
1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
3) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$;
4) Si $A \subset B$ y $C \subset D$, entonces $A \times C \subset B \times D$;
5) $A \times B = \emptyset$ si y solo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Estas propiedades se encuentran demostradas en el libro de *Chávez C.* ([7], pág.56).

1.2 Relación.

Definición 1.2.1 Una *relación* entre elementos de un conjunto A y de un conjunto B es todo subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times B$ ($\mathcal{R} \subset A \times B$).
El autor *Gonçalvez A.* presenta una definición similar en [13], pág.11.
Nota: Si $\mathcal{R}$ es una relación entre los elementos del conjunto A y del conjunto B, diremos que "$\mathcal{R}$ es una relación entre los elementos de A y B" para indicar esta situación en forma breve.

Dominio de una Relación.

Definición 1.2.2 Sea $\mathcal{R}$ una relación entre los elementos de A y B, es decir, $\mathcal{R} \subset A \times B$; se define el *dominio de* $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$, como el conjunto:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A\text{: existe } b \in B \text{ y } (a, b) \in \mathcal{R}\};$$

Es decir: $a \in \mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \Leftrightarrow$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{R}$.
Podemos encontrar una definición similar enunciada por *Chávez C.* en [7], pág.59.

Proposición 1.2.3
Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ relaciones entre los elementos de A y B; entonces:
1) $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) = \mathrm{Dom}(\mathcal{R}_1) \cup \mathrm{Dom}(\mathcal{R}_2)$;
2) $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{R}_1) \cap \mathrm{Dom}(\mathcal{R}_2)$;
3) $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}_1) - \mathrm{Dom}(\mathcal{R}_2) \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)$.

El autor *Figueroa R.* expone una prueba para esta proposición en [12], pág.136 – 137.

Rango de una Relación.

Definición 1.2.4 Sea $\mathcal{R}$ una relación entre A y B, es decir $\mathcal{R} \subset A \times B$ se define el *rango de* $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Ran}(\mathcal{R})$, como el conjunto:

$$\mathrm{Ran}(\mathcal{R}) = \{b \in B\text{: existe } a \in A \text{ y } (a,b) \in \mathcal{R}\};$$

Es decir: $b \in \mathrm{Ran}(\mathcal{R}) \Leftrightarrow$ existe $a \in A$ tal que $(a,b) \in \mathcal{R}$.

Podemos ubicar una definición similar dada por *Chávez C.* en [7], pág.59.

Proposición 1.2.5

Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ relaciones entre los elementos de A y B; entonces:

1) $\mathrm{Ran}(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) = \mathrm{Ran}(\mathcal{R}_1) \cup \mathrm{Ran}(\mathcal{R}_2)$;
2) $\mathrm{Ran}(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \subset \mathrm{Ran}(\mathcal{R}_1) \cap \mathrm{Ran}(\mathcal{R}_2)$;
3) $\mathrm{Ran}(\mathcal{R}_1) - \mathrm{Ran}(\mathcal{R}_2) \subset \mathrm{Ran}(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)$.

El autor *Figueroa R.* expone una prueba para esta proposición en [12], pág.136 – 137.

1.3 Función.

Definición 1.3.1 Llamamos *función* del conjunto A en el conjunto B o función de A en B a toda relación que a cada elemento de su dominio le hace corresponder una *ÚNICA* imagen.

El autor *Hefez A.* presenta una definición similar en [15], pág.13.

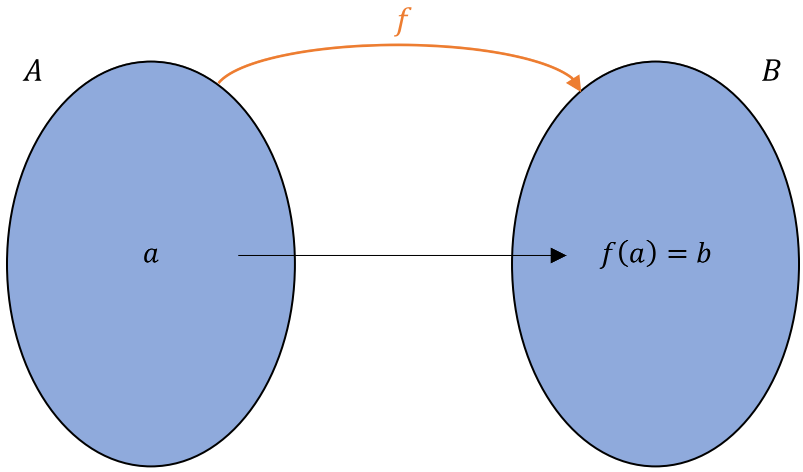
Notación:

1. Para denotar que f es una función de A en B, se escribe
$$f\colon A \to B.$$
2. Para denotar que todo elemento $a \in A$ tiene una única imagen b se escribe $f(a) = b$; entonces una función se representa por:
$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ a &\to f(a) = b; \end{aligned}$$
$f(a)$ es la imagen de a por f.
3. Toda función es una relación, entonces toda función es un subconjunto de $A \times B$; luego denotamos a este conjunto por f.

Una función goza de la siguiente propiedad:

Si $(a,b) \in f$ y $(a,c) \in f$, entonces $b = c$.

Representación Gráfica de una Función.
Una función se puede representar gráficamente mediante un ***diagrama sagital***. Pero sí queremos mostrar las una características geométricas de la función es ideal hacer su gráfica en el ***diagrama cartesiano*** (o ***plano cartesiano*** cuando se trata de funciones reales de variable real).



Dominio y Rango de una Función.
Definición 1.3.2 Sea $f: A \to B$ una función:

i. El conjunto $\mathrm{Dom}(f) = \{a \in A$: existe un único $b \in B, b = f(a)\} \subset A$ se llama *dominio de la función* f; nótese que:
$$a \in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow \text{existe un único } b \in B \text{ tal que } b = f(a).$$
ii. El conjunto $\mathrm{Ran}(f) = \{b \in B$: existe $a \in A$, $b = f(a)\} \subset B$, se llama *rango de la función* f; obsérvese que:
$$b \in \mathrm{Ran}(f) \Leftrightarrow \text{existe } a \in A \text{ tal que } b = f(a).$$

El autor *Chávez C.* enuncia una definición similar en [7], pág.71.

Imagen Directa e Imagen Inversa.
Definición 1.3.3 Sea $f: A \to B$ una función y $D \subset A$; se define la *imagen directa* de D por f, como el conjunto:
$$f(D) = \{b \in B \text{: existe } a \in D \text{ y } b = f(a)\} \subset B;$$
Es decir: $b \in f(D) \Leftrightarrow$ existe $a \in D$ tal que $b = f(a)$.
El autor brasileño *Hefez A.* presenta esta definición en [15], pág.16.

Proposición 1.3.4
Sea $f: A \to B$ una función y $D \subset A$; entonces:
1) Si $D \subset C \subset A$, entonces $f(D) \subset f(C)$;
2) Si $D \subset A$ y $C \subset A$, entonces $f(D \cup C) = f(D) \cup f(C)$;
3) Si $D \subset A$ y $C \subset A$, entonces $f(D \cap C) \subset f(D) \cap f(C)$.

El autor *Chávez C.* expone una prueba en [7], pág.73 – 74.

Definición 1.3.5 Sea $f: A \to B$ una función y $M \subset B$; se define la *imagen inversa* de M por f, como el conjunto:

$$f^{-1}(M) = \{a \in A: f(a) \in M\} \subset A;$$

Es decir: $a \in f^{-1}(M) \Leftrightarrow f(a) \in M$.

El autor *Hefez A.* enuncia esta definición en [15], pág.16.

Proposición 1.3.6

Sea $f: A \to B$ una función y $D \subset A$; entonces:

1) Si $M \subset N \subset B$, entonces $f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$;
2) Si $M \subset B$ y $N \subset B$, entonces $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$;
3) Si $M \subset B$ y $N \subset B$, entonces $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

Podemos encontrar una prueba de esta proposición en [7], pág.73.

1.4 Tipos de Funciones.

Definición 1.4.1 Sea $f: A \to B$ una función; se dice que f es *inyectiva* si y solo si para todo $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$ implica que $a_1 = a_2$.

Definición 1.4.2 Sea $f: A \to B$ una función; se dice que f es *sobreyectiva* si y solo si para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

Definición 1.4.3 Sea $f: A \to B$ una función; se dice que f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva.

El autor brasileño *Hefez A.* expone estas definiciones en [15], pág.18.

Definición 1.4.4 Sea $f: A \to B$ una función y $U \subset A$. Se dice que $g: U \to B$ es la *función restricción* de f al conjunto U si y solamente si $f(a) = g(a)$, para todo $a \in A$; se denota por $f_{|U}$. Es decir: para todo $a \in A$, $f_{|U}(a) = f(a)$.

El autor *Hefez A.* enuncia una definición similar en [15], pág.14.

Definición 1.4.5 Dadas las funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$ se llama *función compuesta* de g con f, denotada por $g \circ f$, a la función $g \circ f: A \to C$ definida por $(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)$, para todo $a \in A$.

Podemos apreciar una definición similar en [15], pág.15.

Proposición 1.4.6

Sean las funciones $f: A \to B$, $g: B \to C$ y $h: C \to D$; entonces:

1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
2) $f \circ I_A = I_A \circ f = f$.

La validez de dichas propiedades de la composición de funciones se demuestra en [15], pág.15 – 16.

Definición 1.4.7 Si $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$, a la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función la llamaremos *función real de variable real* y la denotaremos por

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: y = f(x)\}.$$

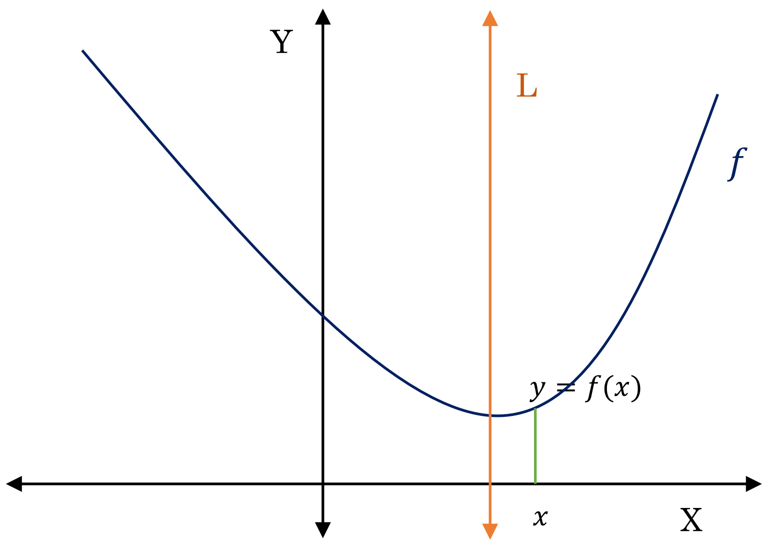
El autor *Figueroa R.* enuncia esta definición en [12], pág.359.

Definición 1.4.8 Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $f: X \to \mathbb{R}$ una función.

i. Se dice que f es *estrictamente creciente*, si para todo x_1,$x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$, se satisface $f(x_1) < f(x_2)$.
ii. Se dice que f es *estrictamente decreciente*, si para todo x_1,$x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) > f(x_2)$.
iii. Se dice que f es *creciente*, si para todo x_1,$x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$, se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$.
iv. Se dice que f es *decreciente*, si para todo x_1,$x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$.

A todas estas funciones se les conoce como *funciones monótonas*.
Podemos encontrar esta definición en [12], pág.421.

Caracterización Geométrica de una Función Real de Variable Real.
Una función se reconoce geométricamente cuando toda recta perpendicular al eje X corta a su gráfica en un único punto.



$(fig. 1)$ Representación Cartesiana de una función real de variable real

1.5 Función Inversa.

Definición 1.5.1 Sea $f\colon A \to B$ una función.

i. Se dice que la función $g\colon B \to A$ es una *inversa a izquierda* de f, si $g \circ f = I_A$;
ii. Se dice que la función $g\colon B \to A$ es una *inversa a derecha* de f, si $f \circ g = I_B$;
iii. Se dice que la función $f\colon A \to B$ posee *inversa* si y solo si existe una función $g\colon B \to A$ la cual es inversa a derecha e izquierda de f; es decir, tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$.

Podemos encontrar estas definiciones en [15], pág.19 – 20.

Notación: Para denotar que g es inversa de f, escribiremos $g = f^{-1}$.

Dominio y Rango de una Función Inversa.

Definición 1.5.2 Sean $f\colon A \to B$ una función y $f^{-1}\colon B \to A$ su función inversa. Entonces:

i. $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \{b \in B\colon \text{existe un único } a \in A \text{ y } a = f^{-1}(b)\} \subset B$, es el *dominio de la función inversa* f^{-1}; obsérvese que:

$$b \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) \Leftrightarrow \text{existe un único } a \in A \text{ tal que } a = f^{-1}(b).$$

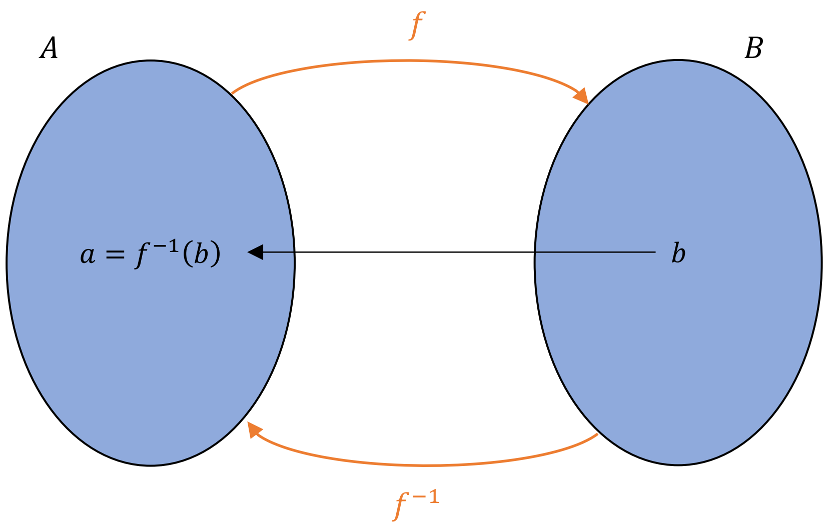
ii. $\mathrm{Ran}(f^{-1}) = \{a \in A\colon \text{existe } b \in B \text{ y } a = f^{-1}(b)\} \subset A$, es el *rango de la función inversa* f^{-1}; nótese que:

$$a \in \mathrm{Ran}(f^{-1}) \Leftrightarrow \text{existe } b \in B \text{ tal que } a = f^{-1}(b).$$

El autor *Figueroa R.* expone una definición similar en [12], pág.166.

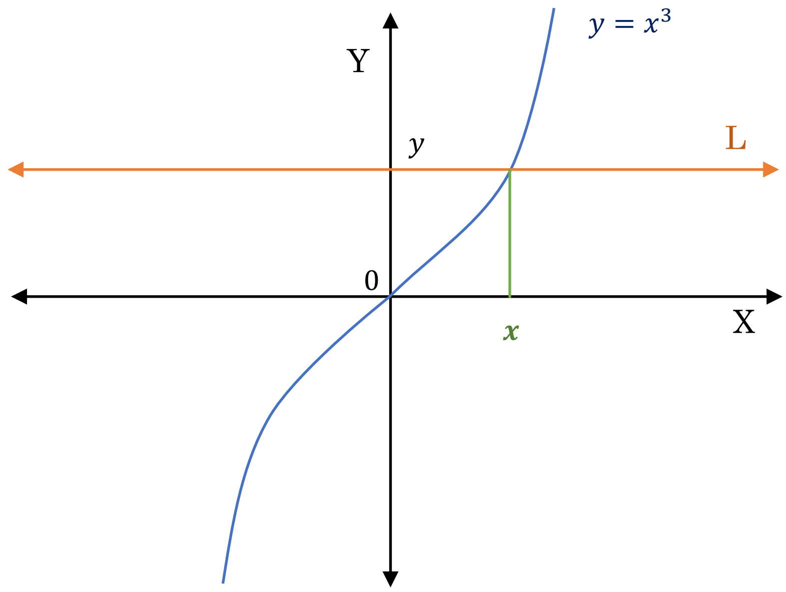
Representación Gráfica de una Función Inversa.

Asimismo una función inversa se puede representar gráficamente mediante un ***diagrama sagital***.

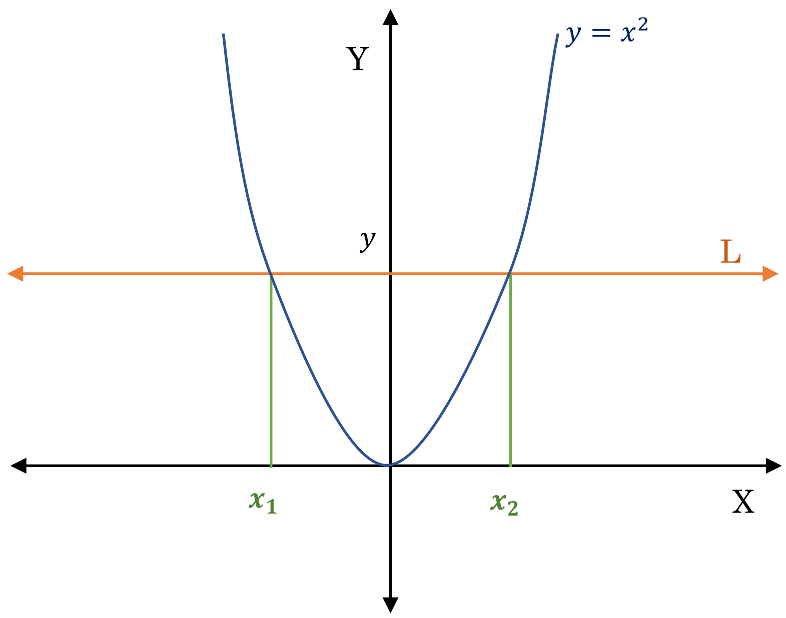


Caracterización Geométrica de una Función Real de Variable Real que posee Inversa que es Función.

Una función f cuya inversa f^{-1} es función se caracteriza porque toda recta horizontal trazada por cada punto perteneciente a su rango, corta a su gráfica en un único punto.



$(fig. 2)$ Función con inversa que ES función.



$(fig. 3)$ Función con inversa que NO es función.

Capítulo 2

Elementos de Topología en la Recta Real

A mediados del siglo XIX comenzó a desarrollarse la Topología, esta disciplina estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten aun cuando estas se someten a deformaciones tan radicales que las hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas. *Johann Listing*, alumno de *Gauss*, fue el primer matemático en utilizar el término "topología" (del griego *topos*, "lugar") en su tratado *Lecciones de topología*.

2.1 Topología.

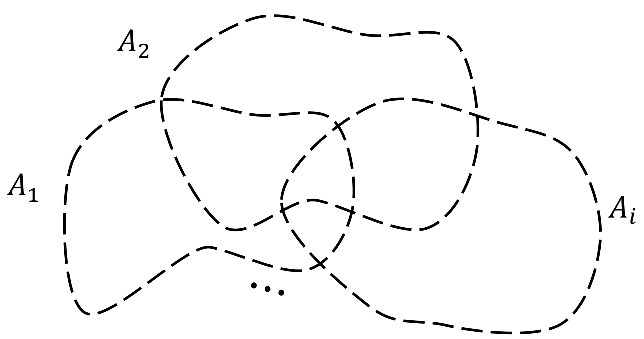
Definición 2.1.1 Sea X un conjunto. Una *topología* en X es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos en X, tal que cumple con los siguientes axiomas:

i. $\emptyset \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$;
ii. Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$, I arbitrario, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$;
iii. Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$, I finito, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

El autor *Prieto C.* enuncia esta definición en [25], pág.43.

Observaciones:

1. A la pareja $(X, \mathcal{A})$ se le denomina *espacio topológico*, al cual denotaremos solo por X.
2. Al conjunto X llamaremos el *conjunto subyacente* del espacio topológico.
3. A los subconjuntos de X llamaremos *abiertos*.



$(fig. 1)$ Topología

2.2 Conjunto Abierto y Conjunto Cerrado.

Definición 2.2.1 Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$.

i. El punto p es *interior* de X si y solamente si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\langle p-\varepsilon, p+\varepsilon\rangle \subset X$. Al conjunto $V(p,\varepsilon) = \langle p-\varepsilon, p+\varepsilon\rangle$ se le llama vecindad de centro p y radio ε del punto p.
ii. El conjunto $intX = \{p \in \mathbb{R}: p$ es punto interior de $X\}$ se llama *conjunto interior* de X.

El autor *Lima E.* enuncia estas definiciones en [21], pág.163.

Ejemplo:
Los intervalos abiertos $\langle a,b\rangle$, $\langle -\infty, b\rangle$, $\langle a, +\infty\rangle$ son conjuntos abiertos.

Proposición 2.2.2
Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$; entonces:
1) $intX \subset X$;
2) Si $X \subset Y$, entonces $intX \subset intY$.

En el libro de *Lima E.* (véase [21], pág.163) se encuentra probado que las propiedades mencionadas son absolutamente ciertas.

Conjunto Abierto.
Definición 2.2.3 Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, se dice que X es un *conjunto abierto* si y solo si $intX = X$. Es decir, todo elemento de X es punto interior de X. Podemos apreciar una definición similar en [21], pág.164, libro del autor *Lima E.*

Proposición 2.2.4
Si X es un intervalo abierto, entonces X es un conjunto abierto.
El autor brasileño *Lima E.* (véase [21], pág.165) prueba que la propiedad mencionada es verdadera.

Teorema 2.2.5
1) El conjunto vacío y $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos.
2) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una colección arbitraria de conjuntos abiertos; entonces $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ es un conjunto abierto.
3) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Demostración
1) a. Probaremos que $\emptyset$ es conjunto abierto.
Supongamos que $\emptyset$ no es abierto, es decir el $int\emptyset \neq \emptyset$, entonces existe un $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \in int\emptyset$; luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle p-\varepsilon, p+\varepsilon\rangle \subset \emptyset$, lo cual contradice a $\langle p-\varepsilon, p+\varepsilon\rangle \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\emptyset$ es conjunto abierto.

b. Probaremos que $\mathbb{R}$ es conjunto abierto ($\mathbb{R} \subset int\mathbb{R}$).

Efectivamente, sea $p \in \mathbb{R}$; entonces podemos construir una vecindad de p, es decir existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle p - \varepsilon, p + \varepsilon \rangle \subset \mathbb{R}$, vemos que p es un punto interior de $\mathbb{R}$, en consecuencia $p \in int\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ es conjunto abierto.

2) Probaremos que la unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Efectivamente, sea $p \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$; entonces para algún $\lambda_0 \in L$, $p \in A_{\lambda_0}$; como A_{λ_0} es un conjunto abierto, implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle p - \varepsilon, p + \varepsilon \rangle \subset A_{\lambda_0}$ y además $A_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$; en consecuencia existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle p - \varepsilon, p + \varepsilon \rangle \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Por lo tanto, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ es un conjunto abierto.

3) Probaremos que la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Efectivamente, sea $p \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$; entonces para todo $i = 1, \cdots, n$; $p \in A_i$; como A_i es un conjunto abierto, implica que p es punto interior de todos los A_i, es decir existen $\varepsilon_i > 0$ tal que $\langle p - \varepsilon_i, p + \varepsilon_i \rangle \subset A_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Consideremos cierto $\varepsilon = min\{\varepsilon_i; i = 1, \cdots, n\} > 0$, entonces $\varepsilon \leq \varepsilon_i$, $i = 1, \cdots, n$; luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle p - \varepsilon, p + \varepsilon \rangle \subset A_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$; esto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $i = 1, \cdots, n$, $\langle p - \varepsilon, p + \varepsilon \rangle \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es un conjunto abierto.

En el libro de *Lima E.* (véase [21], pág.165) se encuentra probado la validez del teorema expuesto.

De este teorema, los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ constituyen una topología para $\mathbb{R}$.

Conjunto Cerrado.

Definición 2.2.6 Sea $X \subset \mathbb{R}$; se dice que X es un *conjunto cerrado* si y solo si el complemento de X es un conjunto abierto. Simbólicamente:

$$X \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \mathbb{R} - X \text{ es abierto.}$$

Podemos apreciar esta definición en [21], pág.171.

Ejemplo:

El intervalo cerrado $[a, b]$ y cualquier conjunto finito $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ subconjunto de $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados.

Teorema 2.2.7

1) El conjunto vacío y $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados.
2) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
3) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una colección arbitraria de conjuntos cerrados; entonces $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ es un conjunto cerrado.

El autor *Lima E.* (véase [21], pág.171 – 172) prueba que el teorema mencionado es absolutamente cierto.
Este teorema es llamado teorema dual topológico.

2.3 Conjunto Acotado y Conjunto Compacto.

Definición 2.3.1 Sea $X \subset \mathbb{R}$, se dice que X es un *conjunto acotado* si y solo si existe una constante real positiva k tal que $|x| \leq k$, para todo $x \in X$. Simbólicamente:

$$X \text{ es acotado} \Leftrightarrow \text{existe } k > 0 \text{ tal que } |x| \leq k, \text{ para todo } x \in X;$$
$$\Leftrightarrow \text{existe } k > 0 \text{ tal que } x \in V(0, k), \text{ para todo } x \in X.$$

Ejemplo:

El intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto acotado.

Definición 2.3.2 Sea $K \subset \mathbb{R}$; se dice que K es un *conjunto compacto* si y solamente si K es cerrado y acotado.
El autor *Bartle R.* expone esta definición en [5], pág.387.

Ejemplo:

El intervalo cerrado $[a, b]$ y cualquier conjunto finito son conjuntos compactos.

Teorema 2.3.3

La unión finita y la intersección arbitraria de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
El autor *Lima E.* expone una demostración de este teorema en [21], pág.387.

2.4 Punto de Acumulación.

Definición 2.4.1 Sea $X \subseteq \mathbb{R}$.

i. Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de X cuando toda *vecindad* V de centro a contiene algún punto de X diferente de a. Es decir, el punto a es un punto de acumulación de X si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.
ii. Un punto que no es de acumulación se llama *punto aislado*;
iii. El conjunto $X' = \{\, a \in \mathbb{R}: a$ es punto de acumulación de $X\}$ se llama *conjunto derivado* de X;
iv. El punto $a \in X$ es un *punto aislado* de X si y solamente si existe $\varepsilon > 0$, $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle \cap X = \{a\}$;
v. Decimos que X es un *conjunto discreto* si y solo si todos sus puntos son aislados.

Todas estas definiciones son enunciadas por *Lima E.* en [21], pág.175.

Ejemplo:

El intervalo $X = [a, b\rangle$, en consecuencia su conjunto derivado de X es $[a, b]$ y si Y es un conjunto finito, entonces su conjunto derivado de Y es el conjunto vacío.

Teorema 2.4.2

Todo punto de un conjunto abierto X es punto de acumulación de X.

Demostración

Sabemos que $a \in X$ y X es un conjunto abierto, entonces existe $r > 0$ tal que $\langle a-r, a+r\rangle \subset X$.

Sea $\varepsilon > 0$, arbitrario; entonces 1) $\varepsilon > r$ 2) $\varepsilon < r$ 3) $\varepsilon = r$

Para 3) es inmediata.

Para 2) si $\varepsilon < r$, tenemos $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle \cap (X - \{a\}) = \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle \neq \emptyset$

Para 1) si $\varepsilon > r$, tenemos $\langle a-r, a+r\rangle \subset \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ implica que $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle \cap (X - \{a\}) \supset \langle a-r, a+r\rangle - \{a\} \neq \emptyset$, en consecuencia tenemos $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.

Lo que demuestra la validez del teorema.

Podemos apreciar una demostración similar en [21], pág.190.

Capítulo 3

Límite, Continuidad y Diferenciabilidad de Funciones Reales de Variable Real

La noción de función continua es uno de los conceptos centrales de la Topología. Aunque el concepto de diferenciabilidad fue planteado mucho antes que el de continuidad, debido a que se formuló en el siglo XVII por *Fermat* y otros, fue el descubrimiento efectuado por *Newton* y *Leibniz* lo que dio inicio al desarrollo del cálculo diferencial.

3.1 Límite.

Definición 3.1.1 Sea $f: X \to \mathbb{R}$ una función, donde $X \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in X'$. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es el *límite de la función* f en a si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. En este caso se usa la notación $\lim_{x \to a} f(x) = L$.
Simbólicamente,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } x \in X \text{ y } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esta definición es enunciada por *Lima E.* en [19], pág.62.

Teorema 3.1.2
Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, f, $g: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$.
Si $L < M$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, para todo $x \in X$ con $0 < |x - a| < \delta$.
El autor *Lima E.* en [19], pág.63 presenta una demostración para este teorema.

Teorema 3.1.3 (Teorema de Sandwich o de Compresión)
Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, y $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.
Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$.
El autor *Lima E.* expone una demostración para este teorema en [19], pág.63 – 64.

Proposición 3.1.4
Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

1) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M$;
2) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) - g(x)\big) = L - M$;
3) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = L \cdot M$;
4) $\lim\limits_{x \to a} \big(\alpha \cdot f(x)\big) = \alpha \cdot L$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
5) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{L}$, si $L \neq 0$;
6) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$, si $M \neq 0$.

En el libro de *Toribio M. y Medina R.* (véase [26], pág.125 – 128) se demuestra la validez de las propiedades de límite de funciones enunciadas.

3.2 Continuidad.

Definición 3.2.1 Sea $f: X \to \mathbb{R}$ una función, donde $X \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que f es *continua* en el punto $a \in X$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Simbólicamente:
f es continua en $a \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Una función $f: X \to \mathbb{R}$ se dice continua sobre X, si es continua en cada punto de X.
Esta definición es expuesta por *Lima E.* en [19], pág.74.

Ejemplos:

a. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función constante definida $f(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$; la función constante es continua en todo $\mathbb{R}$.
b. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$; esta es la función valor absoluto la cual es continua en todo $\mathbb{R}$.

Proposición 3.2.2
Sean $f, g: X \to \mathbb{R}$ funciones continuas en el punto $a \in X$; entonces

1) $f + g$ es continua en a;
2) $f - g$ es continua en a;
3) $f \cdot g$ es continua en a;
4) $\frac{f}{g}$ es continua en a, si $g(a) \neq 0$.

La demostración de estas propiedades es consecuencia inmediata de la teoría de límites.
En el libro de *Martínez C.* y *Sanz M.* (véase [22], pág.182) se encuentra probada esta proposición.

Lema 3.2.3
Si $f: X \to \mathbb{R}$ es continua en el intervalo X, entonces $f(X)$ es un intervalo.
El autor *Lima E.* expone una demostración para este lema en [19], pág.77.

Lema 3.2.4
Sea $f: X \to \mathbb{R}$ una función monótona definida en un intervalo X. Si la imagen $f(X)$ es un intervalo, entonces f es continua.
El autor *Lima E.* presenta una demostración de este teorema en [19], pág.220.

Teorema 3.2.5 (Teorema de la Inversa Continua)
Sean $X \subset \mathbb{R}$, un intervalo, $f: X \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona y continua en X; entonces la función g inversa de f es estrictamente monótona y continua en $Y = f(X)$.
Demostración
a) Supongamos que f sea continua en X, entonces, por el Lema 3.2.3, el conjunto $Y = f(X)$ es un intervalo.
b) Sea $f: X \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona y continua en X, consideremos $f: X \to f(X) = Y$, entonces f es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto, es biyectiva, podemos definir su inversa $g: Y \to X$ que es monótona (pues f es monótona). Además, el conjunto $g(Y) = g\big(f(X)\big) = (g \circ f)(X) = Id(X) = X$. Como la imagen $g(Y) = X$ es un intervalo, entonces por el Lema 3.2.4, tenemos que g es continua en Y.

El autor *Lima E.* expone una demostración para este teorema en [19], pág.79 – 80.

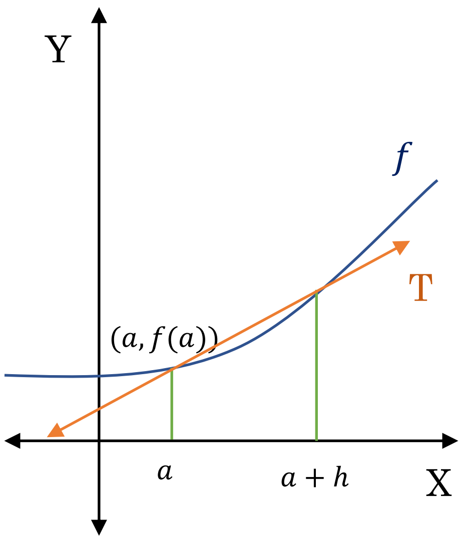
3.3 Diferenciabilidad.
Definición 3.3.1 Sean $X \subset \mathbb{R}$; $f: X \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X$ un punto de acumulación de X ($a \in X'$). La *derivada de la función* f en el punto a es el límite:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$
el cual es representando por $f'(a)$, cuando este existe.
Esta definición es enunciada por *Lima E.* en [19], pág.90 – 91.

Observación:

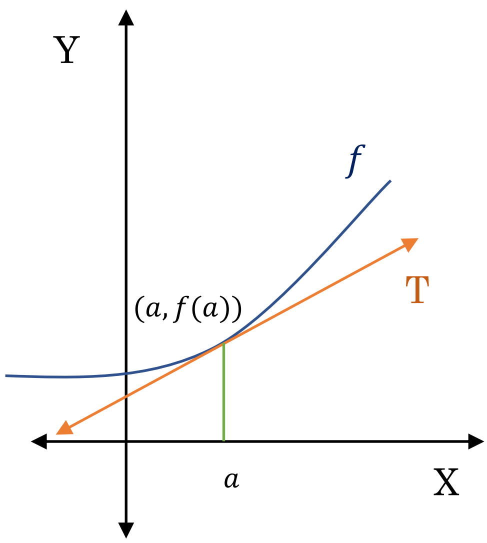
1. Cuando existe $f'(a)$, se dice que f es *derivable* en el punto a.
2. Cuando existe la derivada $f'(x)$ en todos los puntos $x \in X \cap X'$ se dice que la función $f: X \to \mathbb{R}$ es derivable en el conjunto X y se obtiene una nueva función,
$$\begin{aligned} f': X \cap X' &\to \mathbb{R} \\ x &\to f'(x), \end{aligned}$$
llamada *función derivada* de f.
3. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\langle a, b\rangle$; entonces se puede definir la función derivada $f': \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, mediante $(f)'(x) = f'(x)$.

Representación Geométrica de la Derivada.

La derivada $f'(a)$ de la función $f(x)$ en el punto a, es la pendiente (inclinación) de la recta T tangente a la gráfica de la función f en el punto $(a, f(a))$.



$(fig. 1)$



$(fig. 2)$

Ejemplos:

a. Sea f la función constante. Entonces $f'(a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
b. Sea g la función valor absoluto. Entonces para $x \neq 0$, se tiene que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \pm 1$ ($+1$ si $x > 0$ y -1 si $x < 0$). Sigue que existen $f'_+(0) = 1$ y $f'_-(0) = -1$ más no existe $f'(0)$. Para $a \neq 0$ existe $f'(a)$ que vale 1 si $a > 0$ y -1 si $a < 0$.

Proposición 3.3.2

Sean $f, g: X \to \mathbb{R}$ derivables en el punto $a \in X \cap X'$; entonces:

1) $f + g$ es derivable en a con $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2) $f - g$ es derivable en a con $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$;
3) $f \cdot g$ es derivable en a con $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;
4) $\left(\frac{f}{g}\right)'$ es derivable en a con $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}$, si $g(a) \neq 0$.

Los autores *Martínez C. y Sanz M.* en [22], pág.248 – 249 exponen las pruebas de estas proposiciones.

3.4 Función Diferenciable en un Intervalo.

Teorema 3.4.1

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) = f(b)$. Si f es derivable en $\langle a, b\rangle$, entonces existe $c \in \langle a, b\rangle$ tal que $f'(c) = 0$.

Podemos encontrar una demostración de este teorema en [22], pág.235.

Lema 3.4.2 (Teorema de Valor Medio o de Lagrange)

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Si f es derivable en $\langle a, b\rangle$, entonces existe $c \in \langle a, b\rangle$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

El autor *Lima E.* expone la demostración de este lema en [19], pág.98.

Teorema 3.4.3

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b\rangle$.

1) Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in \langle a, b\rangle$, entonces f es creciente en $[a, b]$.
2) Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in \langle a, b\rangle$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración

1) Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$. Definamos el intervalo $[x_1, x_2]$, se verifica que f es continua en $[x_1, x_2]$ y que es derivable en $\langle x_1, x_2\rangle$. Por el Lema 3.4.2 (en $[x_1, x_2]$), existe $c \in \langle x_1, x_2\rangle$ tal que $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, luego $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Como para todo $x \in \langle a, b\rangle$ se cumple $f'(x) > 0$, en particular $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, implica que $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, en consecuencia $f(x_2) - f(x_1) > 0$; de aquí se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$.

   Por lo tanto, f es creciente en $[a, b]$.

Para la parte 2) la prueba es similar; por lo tanto, f es decreciente en $[a, b]$.

Podemos ubicar una demostración similar en [19], pág.99.

3.5 Teorema de la Función Inversa en $\mathbb{R}$.
Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y $a \in X$. Si $f: X \to \mathbb{R}$ es diferenciable con continuidad en X y $f'(a) \neq 0$, entonces existen vecindades $V(a,\delta)$ de centro a y $V(b,\varepsilon)$ de centro $b = f(a)$ tal que $f: V(a,\delta) \to V(b,\varepsilon)$ posee inversa $f^{-1}: V(b,\varepsilon) \to V(a,\delta)$ la cual es diferenciable con continuidad en b y además $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Demostración

Como f es diferenciable en X, entonces que f es continua en X y en particular f es continua en el punto $a \in X$. Por la definición de continuidad en un punto, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$; expresado de otra manera, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $x \in V(a,\delta)$, entonces $f(x) \in V(f(a),\varepsilon)$ ... (1)

De la parte (1) se tiene una restricción para la función f. Definamos la función restricción $f: V(a,\delta) \to \mathbb{R}$.

a) Si f' es continua en a y $f'(a) > 0$, entonces $f'(x) > 0$, para todo $x \in V(a,\delta)$.
b) Análogamente, cuando f' es continua en a y $f'(a) < 0$, entonces $f'(x) < 0$, para todo $x \in V(a,\delta)$.

En consecuencia, si $f: V(a,\delta) \to \mathbb{R}$ es continua en $V(a,\delta)$ y derivable en el interior de $V(a,\delta)$, entonces se tiene dos casos:

a) Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in V(a,\delta)$, entonces f es creciente en $V(a,\delta)$.
b) Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in V(a,\delta)$, entonces f es decreciente en $V(a,\delta)$.

(véase [26], pág.237).

Como $V(a,\delta)$ es un intervalo, $f: V(a,\delta) \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona y continua en $V(a,\delta)$; entonces la función f^{-1}, inversa de f, es estrictamente monótona y continua en $V(b,\varepsilon)$, en virtud del Teorema de la Inversa Continua (véase [5], pág.195 – 196).

Probaremos que f^{-1} es diferenciable en b.

Efectivamente, sabemos que $f'(a) \neq 0$; y como f^{-1} es continua en b, se tiene:

$\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ [$b = f(a)$, entonces $f^{-1}(b) = f^{-1}\big(f(a)\big) = a$].

Por la inyectividad de la función f^{-1}, vemos que $f^{-1}(y) \neq a$ con $y \in V(b,\varepsilon) - \{b\}$. Luego

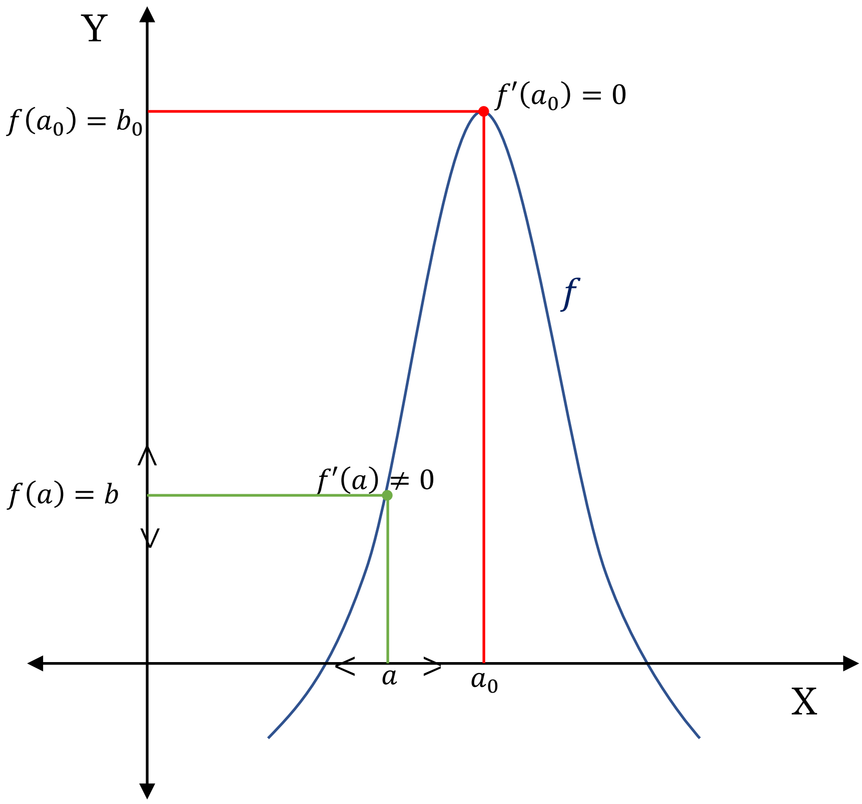
$$\begin{aligned}\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} &= \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} \\ &= \lim_{y \to b} \left[\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}\right]^{-1}\end{aligned}$$

$$= \left[\lim_{y\to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}\right]^{-1}$$
$$= \left[\lim_{y\to b} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]^{-1}$$
$$= [f'(a)]^{-1},$$

pues f es derivable en a. Si $y = f(x)$, entonces $f^{-1}(y) = x$; sabemos que y tiende a b, entonces por la continuidad de f^{-1}, $\lim_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. Por lo tanto, x tiende a a, cuando y se aproxima a b. Y, en consecuencia, existe $(f^{-1})'(b)$ y

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Representación Geométrica del Teorema de la Función Inversa en $\mathbb{R}$.



Capítulo 4

Fundamentos de Álgebra Lineal

El Álgebra Lineal es el estudio de los espacios vectoriales y de las transformaciones lineales definidas entre ellos. Cuando los espacios tienen dimensiones finitas, las transformaciones lineales están asociadas con las matrices. Son numerosas y bastante variadas las situaciones, en matemática y sus aplicaciones, en las que estos objetos están presentes. De ahí la importancia central del Álgebra Lineal en la enseñanza de la matemática. En nuestro caso es fundamental para los propósitos de la tesis.

4.1 Espacio Vectorial.

Definición 4.1.1 Un *espacio vectorial*, sobre el campo K, es un conjunto no vacío E en el cual están definidas dos operaciones:

$$+ : E \times E \to E \text{ donde } (u, v) \to u + v$$
$$\cdot : K \times E \to E \text{ donde } (\alpha, u) \to \alpha \cdot u,$$

llamadas *adición* y *multiplicación por un escalar*, que satisfacen las siguientes propiedades:

i. Para todo $u,v \in E$, $u + v \in E$;
ii. Para todo u,v,$w \in E$, $u + (v + w) = (u + v) + w$;
iii. Existe $0 \in E$, $u + 0 = u$, para todo $u \in E$;
iv. Para todo $u \in E$, existe $-u \in E$ tal que $u + (-u) = 0$;
v. Para todo $u,v \in E$, tal que $u + v = v + u$;
vi. Para todo $u \in E$, para todo $\alpha,\beta \in K$, que $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$;
vii. Para todo $u,v \in E$, para todo $\alpha \in K$, $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;
viii. Para todo $u \in E$, para todo $\alpha,\beta \in K$, $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$;
ix. Para todo $u \in E$, existe $1 \in K$ tal que $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$.

Podemos encontrar esta definición en el texto de *Lima E.* en [18], pág.1.

Observación: A los elementos de un espacio vectorial se les llama *vectores*. También denotaremos a un espacio vectorial sobre el campo K, por $(E, +,\cdot, K)$.

Nota: Para más profundidad puede encontrar la definición de campo en el libro de *Gonçalvez* pág.$34 - 35$, aquí solo diremos que K campo es una estructura algebraica y además el campo fijado para nuestro estudio será el campo real $\mathbb{R}$.

Ejemplo:
Una *matriz* real de orden $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \times n$ números reales de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ se llaman términos de la matriz. Las matrices se representan por letras mayúsculas en la forma $A_{m\times n}$ o también por $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$; cuando no haya necesidad de indicar el orden, solamente se representan por A, B, etc. El conjunto de todas las matrices reales de orden $m \times n$ se representan por $M(m \times n)$ y se convierte en un espacio vectorial cuando en él se define la suma de las matrices $A = \left[a_{ij}\right]$ y $B = \left[b_{ij}\right]$ como $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$ y el producto de la matriz A por el número real α como $\alpha \cdot \mathrm{A} = \left[\alpha \cdot a_{ij}\right]$.

Subespacio Vectorial.
Definición 4.1.2 Sea $(E, +, \cdot, K)$ un espacio vectorial y F un subconjunto no vacío de E. Se dice que F es un *subespacio vectorial* de E si y solo si se cumple las siguientes propiedades:

i. $0 \in F$;
ii. Si u,$v \in F$, entonces $u + v \in E$;
iii. Si $u \in F$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha \cdot u \in F$.

El autor brasileño *Lima E.* enuncia esta definición en [18], pág.10.

Observación: El conjunto $\{0\}$ y F son subespacios vectoriales de E llamados triviales.

Ejemplo:
El conjunto de las matrices simétricas $S(n \times n)$ y el conjunto de las matrices antisimétricas $A(n \times n)$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial $M(n \times n)$.
Nota: La intersección, unión y diferencia de subespacios se definen idénticamente a las operaciones básicas con los conjuntos.

Suma de Subespacios.

Definición 4.1.3 Sean F_1 y F_2 dos subespacios de un espacio vectorial, la *suma de los subespacios* F_1 y F_2 se define del siguiente modo

$$F_1 + F_2 = \{u \in F_1, v \in F_2 : u + v \in F_1 + F_2\}.$$

El autor *Pita C.* enuncia esta definición en [24], pág.209.

Observaciones:

1. En general $F_1 + F_2 \neq F_1 \cup F_2$, pues $F_1 \cup F_2$ no siempre es un subespacio.
2. $F_1 + F_2$ es el menor subespacio que contiene a $F_1 \cup F_2$.

Suma Directa de Subespacios.

Definición 4.1.4 Sea $(E, +, \cdot, K)$ un espacio vectorial, F_1 y F_2 dos subespacios de E. Si, además, en la suma de los subespacios F_1 y F_2 $(F_1 + F_2)$ se cumple que los subespacios F_1 y F_2 tienen en común solo el elemento nulo 0, diremos que es la *suma directa* de F_1 y F_2; denotaremos esta situación por $F_1 \oplus F_2$. Simbólicamente:

$$F_1 \oplus F_2 = \{u + v : u \in F_1, v \in F_2, F_1 \cap F_2 = \{0\}\}.$$

Podemos encontrar una definición similar en [18], pág.14.

Subespacios Suplementarios.

Definición 4.1.5 Sean F_1 y F_2 dos subespacios de E. Si además en la suma directa de los subespacios F_1 y F_2 $(F_1 \oplus F_2)$ se cumple que su suma es igual al espacio vectorial E, denotaremos $F_1 \oplus F_2 = E$ y diremos que F_1 y F_2 son *subespacios suplementarios*.

El autor *Pita C.* presenta una definición similar en [24], pág.214.

Ejemplo:

Los subespacios $S(n \times n)$ y $A(n \times n)$ son suplementarios en el espacio de matrices de orden $n \times n$, pues se cumple

$$S(n \times n) \oplus A(n \times n) = M(n \times n).$$

4.2 Base y Dimensión.

Definición 4.2.1 Se llama *combinación lineal* de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de E a toda suma de la forma

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares pertenecientes a K.

El autor *Chávez C.* enuncia una definición similar en [6], pág.24.

Definición 4.2.2 Sea E un espacio vectorial y $X = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset E$. Se dice que X es *linealmente independiente* si ningún vector $v \in X$ es combinación lineal de otros vectores de X.

Podemos ubicar esta definición en el libro de *Lima E.* [18], pág.25.

Teorema 4.2.3
Sea E un espacio vectorial y $X = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset E$. Entonces:
X es linealmente independiente si y solo si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = 0$ implica que $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \cdots, n$.
En el libro de *Lima E.* (véase [18], pág.25 – 26) se encuentra demostrado este teorema.

Definición 4.2.4 Sea E un espacio vectorial sobre K. Se dice que $X = \{v_1, \cdots, v_n\}$ genera a E (o es un *conjunto generador* de E) si y solo si para todo vector $v \in E$, existen escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in K$ tales que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

El autor *Pita C.* enuncia esta definición en [24], pág.208.

Definición 4.2.5 Sean $v_1,v_2,\ldots,v_n$ vectores de un espacio vectorial E. Definimos el *espacio generado* por estos vectores por

$$S(\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}) = \{v \in E : v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_1 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n, \alpha_i \in K\}.$$

El autor *Chávez C.* expone una definición similar en [6], pág.24.
Nota: $S(\{v_1, v_2, \cdots, v_n\})$ es el espacio generado por el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$; representa al conjunto de combinaciones lineales de los vectores $v_1,v_2,\ldots,v_n$.

Base de un Espacio Vectorial.
Definición 4.2.6 Sea E un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset E$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una *base* de E si se cumple lo siguiente:
i. $\mathcal{B}$ es linealmente independiente en E;
ii. $\mathcal{B}$ es conjunto generador de E.
En el libro de *Lima E.* se encuentra enunciada esta definición ([18], pág.27).

Dimensión de un Espacio Vectorial.
Definición 4.2.7 Se dice que el espacio vectorial E tiene *dimensión* finita n ($\dim E = n$) si admite una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset E$ con n vectores.
Notación: Para denotar que el espacio vectorial E es de dimensión finita escribiremos $\dim E < \infty$. Para $E = \{0\}$ se define $\dim E = 0$.
Podemos encontrar una definición similar en [6], pág.34.

Ejemplo:
Consideremos el espacio vectorial $M(n \times n)$; se verifica fácilmente que el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es base de $M(n \times n)$; entonces la dimensión de $M(n \times n)$ es $n \times n$.

Lema 4.2.8
Sea X un subconjunto linealmente independiente del espacio vectorial E. Supongamos que el vector $v \in E$ no pertenece al espacio generado por X (esto es, $v \notin S(X)$), entonces $X \cup \{v\}$ es linealmente independiente.
El autor *Pita C.* expone una demostración para este lema en [24], pág.236.

Teorema 4.2.9 (Teorema de la Completación de Base)
Sea E un espacio vectorial con $\dim E = n$ y $X = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ un conjunto linealmente independiente de E con $k < n$.
Entonces existen vectores $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n \in E$ tales que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_n\}$ es una base de E.
Demostración

a) Sea $\dim E = n$; si X genera a E, es decir $S(X) = E$, entonces X es una base en E.
b) Caso contrario, si X no genera a E, esto es $S(X) \neq E$, entonces existe $v_{k+1} \in E$ tales que $v_{k+1} \notin S(X)$, entonces $X \cup \{v_{k+1}\} = X_1$ es linealmente independiente, en virtud del Lema 4.2.7.
Si X_1 genera a E, es decir $S(X_1) = E$, entonces X_1 es una base de E. Si X_1 no genera a E, esto es $S(X_1) \neq E$, entonces existe $v_{k+2} \in E$ tales que $v_{k+2} \notin S(X)$; entonces $X_1 \cup \{v_{k+2}\} = X_2$ es linealmente independiente, debido al Lema 4.2.7.
Si X_2 es un generador, es la base buscada si no lo es, repetimos el proceso hasta llegar a un conjunto $\mathcal{B} = X_m = X_{m-1} \cup \{v_{k+m}\}$, es decir $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_{k+m}\}$, donde $k + m = n$ que además de ser linealmente independiente, será un generador de E y por lo tanto, es una base de E.

Podemos ubicar una demostración similar en [24], pág.236 – 237.

4.3 Transformación Lineal.

Definición 4.3.1 Sean E y F espacios vectoriales sobre el campo K. Una función $T: E \to F$ se llama *transformación lineal*, si se cumple lo siguiente:

i. Para todo $u,v \in E$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$;
ii. Para todo $u \in E$, para todo $\alpha \in K$, $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$.

El autor *Pita C.* enuncia esta definición en [24], pág.278.

Ejemplo:

El conjunto de todas las transformaciones lineales es un espacio vectorial con las operaciones suma de transformaciones y multiplicación de una transformación lineal por un escalar, denotado por

$$\mathcal{L}(E,F) = \{T: E \to F \text{ tal que } T \text{ es una transformación lineal}\}.$$

Proposición 4.3.2

Sea $T: E \to F$ una transformación lineal; entonces:

1) $T(0) = 0$;
2) Para todo $u \in E$, $T(-u) = -T(u)$;
3) Para todo $u,v \in E$, $T(u-v) = T(u) - T(v)$;
4) Para todo $u_1,u_2 \in E$, para todo $\alpha_1,\alpha_2 \in K$,
$$T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2) = \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_1 \cdot T(u_2);$$
5) Sean $u_1,\ldots,u_n \in E$ y $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K$; entonces
$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot T(u_i).$$

La prueba se puede encontrar en los [4], [24].

Definición 4.3.3 Sea $T: E \to F$ una transformación lineal,

i. T es un *monomorfismo* si T es una función inyectiva.
ii. T es un *epimorfismo* si T es una función sobreyectiva.
iii. T es un *isomorfismo* si es inyectiva y sobreyectiva.

Podemos encontrar esta definición en [6], pág.70.

Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal.

Definición 4.3.4 Sea $T: E \to F$ una transformación lineal.

i. El conjunto $N(T) = \{u \in E \colon T(u) = 0\}$ se llama *núcleo* de T, es decir, $u \in N(T) \Leftrightarrow T(u) = 0$;
ii. El conjunto $Im(T) = \{w \in F \colon \text{existe } u \in E \text{ y } T(u) = w\}$ se llama *imagen* de T, es decir, $w \in Im(T) \Leftrightarrow$ existe $u \in E$ tal que $T(u) = w$.

Estas definiciones se enuncian en [6], pág.69 – 70.

Proposición 4.3.5
Sea $T: E \to F$ una transformación lineal; entonces:
1) $N(T)$ es un subespacio de E;
2) $Im(T)$ es un subespacio de F.
El autor *Pita C.* expone una prueba de esta proposición en [24], pág.289 – 290.

Lema 4.3.6
Una transformación lineal $T: E \to F$ es inyectiva si y solamente si $N(T) = \{0\}$.
Demostración
($\Rightarrow$) Probaremos que $N(T) = \{0\}$.
Efectivamente, la demostración será por doble inclusión.
a) $N(T) \subset \{0\}$.
Supongamos que $u \in N(T)$; por la definición de núcleo, tenemos que $T(u) = 0$ y, por la Proposición 4.3.5 (parte 1), que $T(0) = 0$; entonces $T(u) = T(0)$, por la inyectividad de T se concluye que $u = 0$. Luego, $u \in \{0\}$.
b) $\{0\} \subset N(T)$.
Es inmediata; por la Proposición 4.3.5 (parte 1), tenemos que $N(T)$ es subespacio de E, lo cual nos dice $0 \in N(T)$, entonces $\{0\} \subset N(T)$.
Vemos que la parte a) y la parte b) son verdaderas. Por lo tanto, se concluye que $N(T) = \{0\}$.
($\Leftarrow$) Probaremos que T es inyectiva.
Efectivamente, dados $u,v \in E$ tal que $T(u) = T(v)$, se tiene que $T(u) - T(v) = 0$ y, como T es transformación lineal, $T(u - v) = 0$; entonces por la definición de núcleo tenemos que $u - v \in N(T)$; como por hipótesis $N(T) = \{0\}$, entonces $u - v \in \{0\}$; es decir $u - v = 0$ y sigue que $u = v$. Por lo tanto, T es inyectiva.
Podemos encontrar una demostración similar en [18], pág.63.

Teorema 4.3.7 (Teorema de la Dimensión)
Sean E y F espacios vectoriales de dimensión finita. Para toda transformación lineal $T: E \to F$ se cumple:
$$\dim E = \dim N(T) + \dim Im(T).$$
Demostración
El teorema se puede expresar de la siguiente manera si $\{v_1, v_2, \cdots, v_q\}$ una base de $N(T)$ y $\{T(a_1), T(a_2), \cdots, T(a_p)\}$ es una base de $Im(T)$. Probaremos que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_q, a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ es una base de E (esto probará la igualdad $\dim E = \dim N(T) + \dim Im(T)$).
a) $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

Supongamos que:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q + \beta_1 \cdot a_1 + \cdots + \beta_p \cdot a_p = 0 \ldots (1)$$

Aplicando T, en ambos miembros, resulta

$$T(\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q + \beta_1 \cdot a_1 + \cdots + \beta_p \cdot a_p) = T(0) = 0$$

$$\alpha_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \alpha_q \cdot T(v_q) + \beta_1 \cdot T(a_1) + \cdots + \beta_p \cdot T(a_p) = 0 \ldots (2)$$

Como $v_1, v_2, \cdots, v_q \in N(T)$, entonces $T(v_1) = \cdots = T(v_q) = 0$.

Reemplazando en (2), obtenemos

$$\beta_1 \cdot T(a_1) + \cdots + \beta_p \cdot T(a_p) = 0$$

Como $\{T(a_1), T(a_2), \cdots, T(a_p)\}$ es linealmente independiente en el conjunto $Im(T)$, entonces $\beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$. Reemplazando los valores de β_i; $i = 1, \cdots, p$, en la ecuación (1) se tiene

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q = 0$$

Como $\{v_1, v_2, \cdots, v_q\}$ es linealmente independiente en $N(T)$, entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

b) $\mathcal{B}$ es conjunto generador.

Sea $v \in E$ un vector arbitrario, se tiene $T(v) \in Im(T)$.

Como $\{T(a_1), T(a_2), \cdots, T(a_p)\}$ es una base de $Im(T)$, entonces:

$$T(v) = \beta_1 \cdot T(a_1) + \cdots + \beta_p \cdot T(a_p)$$

por la linealidad T resulta

$$T(v) = T(\beta_1 \cdot a_1 + \cdots + \beta_p \cdot a_p)$$

es decir,

$$T(v) - T(\beta_1 \cdot a_1 + \cdots + \beta_p \cdot a_p) = 0$$

$$T(v - (\beta_1 \cdot a_1 + \cdots + \beta_p \cdot a_p)) = 0.$$

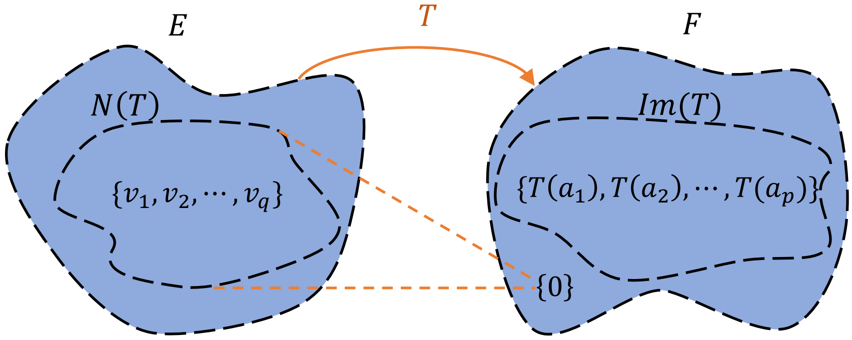
Por la definición de núcleo, se tiene $v - (\beta_1 \cdot a_1 + \cdots + \beta_p \cdot a_p) \in N(T)$.

Como $\{v_1, v_2, \cdots, v_q\}$ es una base de $N(T)$, entonces

$$v - (\beta_1 \cdot a_1 + \cdots + \beta_p \cdot a_p) = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q.$$

De allí $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q + \beta_1 \cdot a_1 + \cdots + \beta_p \cdot a_p$, para todo vector $v \in E$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es conjunto generador.

El autor *Lima E.* expone una demostración similar en [18], pág.68 – 69.



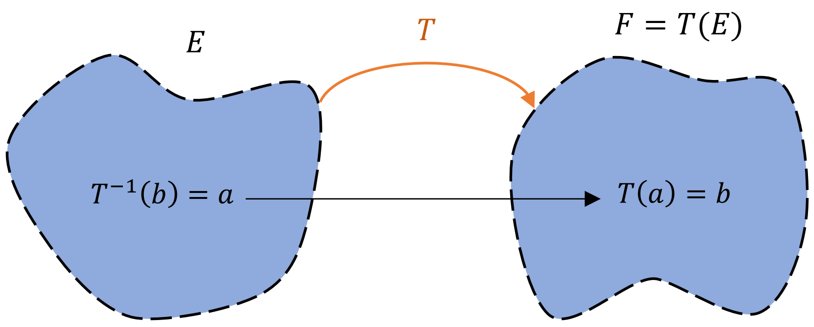
Teorema 4.3.8
Sean E y F espacios vectoriales tales que $\dim E = \dim F$. Una transformación lineal $T: E \to F$ es inyectiva si y solamente si es sobreyectiva y por tanto es un isomorfismo.

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que $T: E \to F$ es inyectiva; entonces $N(T) = \{0\}$; de aquí tenemos que $\dim N(T) = 0$. Por el Teorema de la Dimensión, obtenemos que $\dim E = \dim N(T) + \dim Im(T)$; en consecuencia $\dim E = \dim Im(T)$ y de esto sigue que $\dim Im(T) = \dim E = \dim F$; entonces $\dim Im(T) = \dim F$ e $Im(T) \subset F$. Por lo tanto, T es sobreyectiva.

($\Leftarrow$) Supongamos que T sea sobreyectiva; entonces $Im(T) = F$; de aquí obtenemos que $\dim Im(T) = \dim(F)$. Por el Teorema de la Dimensión, tenemos que $\dim E = \dim N(T) + \dim Im(T)$; esto implica que $\dim E = \dim N(T) + \dim F$; luego, como $\dim E = \dim F$, se concluye que $\dim N(T) = 0$ y en consecuencia $N(T) = \{0\}$. Por lo tanto, T es inyectiva.

Podemos ver una demostración similar expuesta por el autor *Lima E.* en [18], pág.69.



4.4 Matriz Asociada a una Transformación Lineal.

Sea $T: E \to F$ una transformación lineal donde $\dim E = m$ y $\dim F = n$. Supongamos que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ son bases para E y F respectivamente. Para cada $i = 1, \cdots, m$, el vector $T(u_i) \in F$, se puede escribir como combinación lineal de la base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de F; es decir,

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \alpha_{11} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot v_n \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ T(u_m) &= \alpha_{m1} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot v_n. \end{aligned}$$

Entonces podemos escribir,

$$\begin{bmatrix} T(u_1) \\ \vdots \\ T(u_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \cdot v_1 + & \cdots & +\alpha_{1n} \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot v_1 + & \cdots & +\alpha_{mn} \cdot v_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Luego se obtiene una matriz

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} = [\alpha_{ij}]$$

Por lo tanto, la transformación lineal $T: E \to F$, junto con las bases $\mathcal{B} \subset E$ y $\mathcal{B}' \subset F$, determinan una matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = [\alpha_{ij}]$; se prueba que esta matriz es única.

Definición 4.4.1 La matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ se llama *matriz asociada a la transformación lineal* T respecto a las bases $\mathcal{B}$ de E y $\mathcal{B}'$ de F.
Podemos encontrar una definición similar en [24], pág.301 – 302.

Ejemplo:

Determinar la matriz asociada a la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x_1 - 2x_2, 4x_1 + x_2)$; respecto de las bases canónicas en ambos espacios vectoriales.
Sabiendo que la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$. Entonces podemos escribir,

$$\begin{bmatrix} T(1,0) \\ T(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1,0) + 4(0,1) \\ -2(1,0) + 1(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1,0) \\ (0,1) \end{bmatrix}$$

Luego obtiene una matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = [\alpha_{ij}]$; esta es la matriz asociada a la transformación lineal T respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 5

Espacio Euclidiano

El concepto de espacio vectorial surgió como una generalización del espacio de los vectores geométricos; la abstracción, que entonces se efectuó, solo tomó como punto de partida las propiedades de dichos vectores geométricos que provenían de la suma de vectores y producto de un vector por un escalar, dando de esta forma una axiomática para el concepto abstracto de espacio vectorial. Se trata ahora de introducir, en un espacio vectorial, dos nuevas estructuras norma y producto interno que permitan hablar de ángulos y distancias en estas estructuras.

5.1 El Espacio Vectorial $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.1.1 El conjunto $\mathbb{R}^n$ es definido como la colección de todas las $n-$ uplas $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de números reales, donde $n \in \mathbb{N}$; es decir:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Una definición similar es enunciada por *Lima E.* en [22], pág.1.

Definición 5.1.2 Sean $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que $x = y$ si y solo si $x_i = y_i$, para todo $i = 1,2, \cdots, n$. Podemos encontrar una definición similar en [22], pág.1.

Definición 5.1.3 Sean $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos la suma de los vectores x e y, denotada por $x + y$, y el producto de un vector x por el escalar α, denotada por $\alpha \cdot x$, como;

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \cdots, \alpha \cdot x_n),$$

respectivamente. La suma de vectores determina una operación interna llamada *adición de vectores* y el producto de un vector por un escalar una operación externa llamada *multiplicación de un vector por un escalar*.

El autor brasileño *Lima E.* enuncia esta definición en [22], pág.1.

Teorema 5.1.4
El conjunto $\mathbb{R}^n$ con las operaciones adición de vectores y multiplicación de un vector por un escalar, es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial de dimensión n.
En el libro de *Lima E.* (véase [22], pág.1) se encuentra este teorema.

Observaciones:
1. El *vector cero* será denotado por $\theta = (0,0,\cdots,0)$;
2. El *opuesto aditivo* del vector x será denotado por $-x$;
$$-x = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n);$$
3. Los *vectores canónicos* $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$, definidos por $e_1 = (1,0,\cdots,0)$, $e_2 = (0,1,\cdots,0), \ldots, e_n = (0,0,\cdots,1)$ forman una base en $\mathbb{R}^n$, la cual es llamada *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Varios conceptos geométricos que aparecen en el plano y el espacio (tales como ángulo, proyección, perpendicularidad, etc.), pueden ser generalizados a dimensiones mayores. El concepto de norma es fundamental para el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

5.2 Norma, Producto Interno y Distancia en $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.2.1 La función $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por
$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$
se llama *norma euclidiana* en $\mathbb{R}^n$.
El número $\|x\|$ se llama la norma del vector x.
Podemos ver esta definición expuesta por el autor *Lima E.* en [22], pág.4.

Proposición 5.2.2
Para todo $x,y \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:
1) $\|x\| \geq 0$;
2) $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = \theta$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad Triangular);
4) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

La proposición 5.2.2 nos dice que el par $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado*.
El autor *Lima E.* presenta la prueba de esta proposición en [22], pág.5.

Ejemplo:
Sobre el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ definamos la función $\|\cdot\|: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ mediante

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^m, x \neq \theta\right\}.$$

Entonces:

1) Claramente $\|\cdot\|$ es una norma.
2) Para todo $x \in \mathbb{R}^m$, se verifica la desigualdad $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$.
   Para todo $x \in \mathbb{R}^m$ no nulo, de la definición se tiene; $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\|$; entonces $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| \ldots (*)$
   Si $x = \theta$, también se cumple $(*)$.
   Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}^m$; $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$.

Producto Interno en $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.2.3 Sean $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. El *producto interno* de x e y, denotado por $\langle x, y\rangle$, es el número real definido como:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

El autor brasileño *Lima E.* enuncia esta definición en [22], pág.3.
Obsérvese de inmediato que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Proposición 5.2.4
Para todo x,y,$z \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\langle x, x\rangle \geq 0$;
2) $\langle x, x\rangle = 0$ si y solamente si $x = \theta$;
3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
4) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;
5) $\langle \alpha \cdot x, y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle$.

Podemos encontrar la prueba de la proposición en [22], pág.3.

Proposición 5.2.5 (Desigualdad de Cauchy – Schwartz)
Para cualquiera x,$y \in \mathbb{R}^n$; entonces $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
El autor *Lima E.* expone la prueba de esta proposición en [22], pág.4.

Definición 5.2.6 El *ángulo* λ entre dos vectores no nulos x e y es definido por $\cos\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$.
Los autores *Hasser N., LaSalle J. y Sullivan J.* enuncian una definición similar en [14], pág.57.

Definición 5.2.7 Sean $x,y \in \mathbb{R}^n$; se dice que x es *ortogonal* a y si y solo si $\langle x, y\rangle = 0$. Se escribe $x \perp y$ para indicar que x es ortogonal a y. Podemos ver esta definición enunciada por el autor *Lima E.* en [22], pág.4.

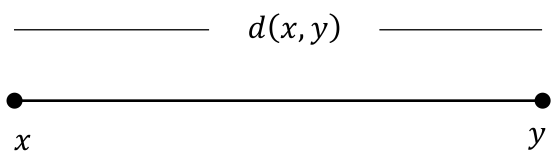
Observaciones:
1. Los vectores canónicos son ortogonales entre sí.
2. Cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ es ortogonal a θ, es decir;

$$\langle x, \theta\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 0 = 0.$$

Distancia en $\mathbb{R}^n$.
Definición 5.2.8 La función $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

se llama *distancia en* $\mathbb{R}^n$.
El número $d(x, y)$ se llama distancia de x a y.
El autor *Lima E.* enuncia esta definición en [22], pág.7.



$fig.1$ Distancia de x a y.

Observación: Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, \theta) = \|x - \theta\| = \|x\|$.

Proposición 5.2.9
Para todo $x,y,z \in \mathbb{R}^n$, se cumplen las siguientes propiedades:
1) $d(x, y) \geq 0$;
2) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;
3) $d(x, y) = d(y, x)$;
4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La proposición 5.2.9 nos dice que el par $(\mathbb{R}^n, d)$ es un *espacio métrico.*
En el libro de *Lima E.* expone una prueba de la proposición en [22], pág.7.

5.3 Elementos de Topología en $\mathbb{R}^n$.

Bolas en $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.3.1 Sea $c \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

i. La *bola abierta* de centro c y radio r, es el conjunto definido por:
$$B(c,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c\| < r\};$$
Nótese que: $x \in B(c,r) \Leftrightarrow \|x - c\| < r$.

ii. La *bola cerrada* de centro c y radio r, es el conjunto definido por:
$$\bar{B}(c,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c\| \leq r\};$$
Obsérvese que: $x \in \bar{B}(c,r) \Leftrightarrow \|x - c\| \leq r$.

iii. La *esfera* de centro c y radio r, es el conjunto definido por:
$$S(c,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c\| = r\};$$
Nótese que: $x \in S(c,r) \Leftrightarrow \|x - c\| = r$.

El autor *Lima E.* expone estas definiciones en [22], pág.10 – 11.

Observación: Para todo $c \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$; $\bar{B}(c,r) = B(c,r) \cup S(c,r)$.

Conjunto Acotado.

Definición 5.3.2 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, se dice que X es un *conjunto acotado* si y solo si existe una constante real positiva k tal que $\|x\| \leq k$, para todo $x \in X$. Simbólicamente:

X es acotado $\Leftrightarrow$ existe $k > 0$ tal que $\|x\| \leq k$, para todo $x \in X$;
$\Leftrightarrow$ existe $k > 0$ tal que $x \in \bar{B}(\theta, k)$, para todo $x \in X$.

El autor *Lima E.* enuncia esta definición en [22], pág.39.

Interior de un Conjunto y Conjunto Abierto.

Definición 5.3.3 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

i. El punto c es *interior* de X si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(c,\varepsilon) \subset X$;
ii. El conjunto $int(X) = \{c \in \mathbb{R}^n : c$ es punto interior de $X\}$ se llama *conjunto interior* de X;
iii. El conjunto X es un *conjunto abierto* si y solo si $int(X) = X$.

El autor *Lima E.* expone estas definiciones en [22], pág.34.

Observación: Para todo $X \subset \mathbb{R}^n$, $int(X) \subset X$.
Efectivamente, sea $c \in int(X)$; entonces c es punto interior de X, es decir; existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(c,\varepsilon) \subset X$. Entonces $c \in B(c,\varepsilon) \subset X$. Por lo tanto $c \in X$.

Proposición 5.3.4

Sean $X, Y \subset \mathbb{R}^n$; entonces:

1) Si $X \subset Y$, entonces $intX \subset intY$;
2) El conjunto $intX$ es un conjunto abierto.

El autor *Lima E.* expone una prueba en [22], pág.35.

Proposición 5.3.5
Para $c \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$; $B(c,r)$ y $\mathbb{R}^n - \bar{B}(c,r)$ son conjuntos abiertos.
El autor *Lima E.* presenta una prueba en [22], pág.34 – 35.

Teorema 5.3.6
1) El conjunto vacío y $\mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos.
2) La intersección de una familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
3) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in A}$ una colección arbitraria de conjuntos abiertos; entonces $\bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda$ es un conjunto abierto.

Podemos encontrar una demostración del teorema en [22], pág.36.

Conjunto Cerrado.
Definición 5.3.7 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, se dice que X es un *conjunto cerrado* si y solamente si el complemento de X es un conjunto abierto. Simbólicamente:

$$X \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \mathbb{R} - X \text{ es abierto.}$$

El autor *Del Castillo F.* enuncia una definición similar en [9], pág.17.

Teorema 5.3.8
1) El conjunto vacío y $\mathbb{R}^n$ son conjuntos cerrados.
2) La unión de una familia finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
3) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in A}$ una colección arbitraria de conjuntos cerrados; entonces $\bigcap_{\lambda \in A} A_\lambda$ es un conjunto cerrado.

El autor *Del Castillo F.* expone una demostración en [9], pág.18.

Conjunto Compacto.
Definición 5.3.9 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, se dice que K es un *conjunto compacto* si y solo si K es cerrado y acotado.
El autor *Del Castillo F.* enuncia una definición similar en [9], pág.123.

Ejemplo:
La bola cerrada $\bar{B}(c,r)$ y cualquier conjunto finito son conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.3.10
La intersección de una familia finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
Demostración
La intersección de una familia finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, en virtud del Teorema 5.3.8 (parte 3). Faltaría probar que la intersección finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado; sea $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, entonces para todo $i = 1, \cdots, n$; $x \in A_i$, como los conjuntos A_i son acotados, entonces que existen constantes $k_i > 0$ tal que $\|x\| \leq k_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Tomando $k = \min\{k_i; i = 1, \cdots, n\} > 0$, entonces existe $k > 0$ tal que $\|x\| \leq k$, para todo $x \in A_i$. Por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es acotado. Esto completa la demostración del teorema.

5.4 Sucesión y Límite en $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.4.1 Una *sucesión* en $\mathbb{R}^n$ es una función $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que a cada número natural p se le asocia el vector $x(p) = x_p \in \mathbb{R}^n$ llamado $p -$ término de la sucesión.
Podemos encontrar una definición similar en [22], pág.13.

Definición 5.4.2 Sea $(x_p) \subset \mathbb{R}^n$ se dice que $c \in \mathbb{R}^n$ es *límite de la sucesión* x_p cuando p tiende al infinito si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p \in \mathbb{N}$, con $p \geq p_0$, entonces $\|x_p - c\| < \varepsilon$. Simbólicamente,

$$\lim_{p\to\infty} x_p = c \Leftrightarrow \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } p_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } p \in \mathbb{N}$$
$$\text{con } p \geq p_0, \text{ entonces } \|x_p - c\| < \varepsilon.$$

Nota: Sea $(x_p) \subset \mathbb{R}^n$ se dice que x_p es una *sucesión convergente* si y solamente si existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{p\to\infty} x_p = c$.
El autor *Del Castillo F.* presenta una definición similar en [9], pág.25.

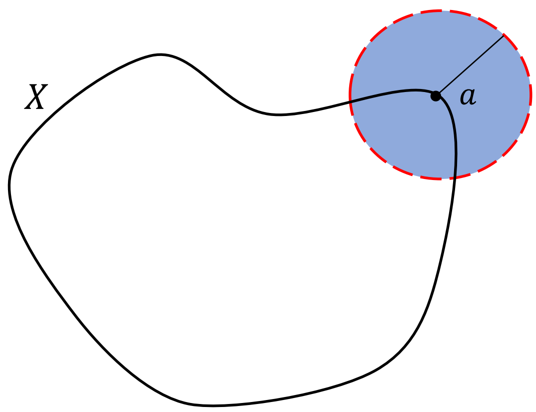
Definición 5.4.3 Sea (x_p) una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Se dice que (x_p) es una *sucesión de Cauchy*, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p,q \in \mathbb{N}$, con $p,q \geq p_0$, entonces $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$. Simbólicamente,

$$(x_p) \text{ es de Cauchy} \Leftrightarrow \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } p_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } p,$$
$$q \in \mathbb{N}, \text{ con } p,q \geq p_0, \text{ entonces } \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Podemos encontrar una definición similar en [9], pág.25.

Definición 5.4.4 Sea $(x_p) \subset \mathbb{R}^n$ y $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función creciente. La composición $x \circ k: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que a cada número natural p le asocia el punto $(x \circ k)_p = x_{kp}$ es llamada *subsucesión* de $(x_p) \subset \mathbb{R}^n$.
Notación: $(x_{kp}) \subset (x_p)$ significara "(x_{kp}) es una subsucesión de (x_p)".
El autor *Lima E.* enuncia una definición similar en [9], pág.25.
Nota: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es un espacio completo. Si TODA sucesión de Cauchy es converge.

Definición 5.4.5 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $a \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de acumulación* de X cuando toda *bola* B de centro a contiene algún punto de X diferente de a. Es decir, el punto a es un punto de acumulación de X si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Podemos encontrar esta definición en [9], pág.14.



$fig.2$ El punto a es de acumulación de X.

Definición 5.4.6 Sea $f: X \to \mathbb{R}^n$ una función, donde $X \subset \mathbb{R}^m$ y a es punto de acumulación de X. Se dice que $L \in \mathbb{R}^n$ es el *límite de la función* f en a si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < \|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - L\| < \varepsilon$. En este caso se usa la notación $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Simbólicamente,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } x \in X \text{ y}$$
$$0 < \|x - a\| < \delta, \text{ entonces } \|f(x) - L\| < \varepsilon.$$

Esta definición es enunciada por *Lima E.* en [9], pág.33.

Capítulo 6

Aplicaciones entre Espacios Euclidianos

En este capítulo desarrollaremos los conceptos de continuidad y diferenciabilidad de las aplicaciones entre espacios euclidianos. Los conceptos de diferenciabilidad y de continuidad son de los que más han influido en el desarrollo de la matemática, pero fue en siglo XIX cuando el análisis le dio la firmeza y la claridad que goza en la actualidad.

6.1 Funciones Continuas.

Definición 6.1.1 Sea $f: U \to \mathbb{R}^n$ una *aplicación* definida en el conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$, tal que a cada punto $x \in X$ le asocia su imagen $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$. Las funciones reales $f_i: U \to \mathbb{R}$, para cada $i = 1, \cdots, n$, son llamadas *funciones coordenadas* de f. Se escribe entonces $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n)$.
El autor *Lima E.* enuncia esta definición en [20], pág.19.

Definición 6.1.2 Sean $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función y $a \in \mathrm{Dom}(f)$; se dice que f es *continua* en c si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in U$ y $\|x - c\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(c)\| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$f \text{ es continua en } c \Leftrightarrow \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } x \in U \text{ y } \|x - c\| < \delta, \text{ entonces } \|f(x) - f(c)\| < \varepsilon.$$

El autor *Bartle R.* enuncia esta definición en [4], pág.162.

Teorema 6.1.3
Si f es continua en c y g es continua en $z = f(c)$, entonces la compuesta $g \circ f$ es continua en c.
El autor *Bartle R.* expone una demostración para este teorema en [4], pág.168 – 169.

Teorema 6.1.4
Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: U \to \mathbb{R}^n$ y $c \in U$. Son equivalentes:
1) f es continua en c;
2) Para todo $(x_k) \subset U$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = c$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(c)$.

El autor *Lang S.* presenta una demostración para este teorema en [17], pág.126 – 127.

Teorema 6.1.5 (Teorema del Valor Máximo y Mínimo)
Sea $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ compacto en $\mathbb{R}^m$ y sea f función continua de valor real; entonces existen puntos x^*,x_* en K tales que

$$f(x^*) = \sup\{f(x): x \in K\} \text{ y } f(x_*) = \inf\{f(x): x \in K\}.$$

El autor *Bartle R.* expone una demostración para este teorema en [4], pág.180 – 181.

Corolario 6.1.6
Sea $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces f es inyectiva si y solo si existe $m > 0$ tal que $\|f(x)\| \geq m\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$.
El autor *Bartle R.* presenta una demostración para este teorema en [4], pág.181.

6.2 Aplicaciones Continuas.
Definición 6.2.1 Diremos que $f: U \to \mathbb{R}^n$ es una *aplicación continua* en el conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ cuando f es continua en todos los puntos $c \in U$.
Podemos encontrar esta definición en [20], pág.20.

Teorema 6.2.2
Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto compacto y $f: K \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua; entonces $f(K)$ es un conjunto compacto.
Demostración
Supongamos que $(y_k) \subset f(K)$; entonces existe $(x_k) \subset K$ tal que $y_k = f(x_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ pues $(y_k \in f(K)$, Como $(x_k) \subset K$ y K compacto, entonces existe $(x_{jk}) \subseteq (x_k)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{jk} = x \in K$. Como f es continua en K, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{jk}) = f(x) \in f(K)$ y $x \in K$ en virtud del Teorema 6.1.4. Haciendo $y_{jk} = f(x_{jk})$ e $y = f(x)$, hallamos que existe una subsucesión $(y_{jk}) \subseteq (y_k)$ para la cual $\lim\limits_{k\to\infty} y_{jk} = y \in f(K)$. Por lo tanto $f(K)$ es un conjunto compacto.
Podemos encontrar una demostración similar en [17], pág.142.

Definición 6.2.3 Una aplicación $f: U \to \mathbb{R}^n$ dice *uniformemente continua* en el conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x_1,x_2 \in U$ y $\|x_1 - x_2\| < \delta$, entonces $\|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$.
El autor *Lang S.* enuncia una definición similar en [17], pág.142.

Teorema 6.2.4 Toda aplicación continua $f: K \to \mathbb{R}^n$, definida en el conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, es uniformemente continua.
Demostración
Supongamos que f no es uniformemente continua, es decir existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existen $x_\delta, x'_\delta \in K$ con $\|x_\delta - x'_\delta\| < \delta$ y $\|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| \geq \varepsilon$. Tomando $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$; (denotando $x_\delta = x_{\frac{1}{n}} = x_n$ y $x'_\delta = x'_{\frac{1}{n}} = x'_n$), existen $x_k, x'_k \subset K$ con $\|x_k - x'_k\| < \frac{1}{k}$ $(*)$ y $\|f(x_k) - f(x'_k)\| \geq \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
Como K es compacto, existen $(x_{jk}) \subset (x_k)$ y $(x'_{jk}) \subset (x'_k)$ tales que $\lim_{k\to\infty} x_{jk} = x \in K$ y $\lim_{k\to\infty} x'_{jk} = x' \in K$. Luego

$$\|x - x'\| = \left\| \lim_{k\to\infty} x_{jk} - \lim_{k\to\infty} x'_{jk} \right\| = \left\| \lim_{k\to\infty} x_{jk} - x'_{jk} \right\| = 0, \text{ (por } (*)).$$

Si $\|x - x'\| = 0$, entonces $x = x'$. Como f es continua, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{jk}) = f(x) \text{ y } \lim_{k\to\infty} f(x'_{jk}) = f(x') = f(x), \text{ pues } [x = x'] \; (**)$$

Luego $\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} \|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\| = \left\| \lim_{k\to\infty} f(x_{jk}) - \lim_{k\to\infty} f(x'_{jk}) \right\| = 0$, (por $(**)$). Entonces $\varepsilon \leq 0$, lo cual es una contracción, pues $\varepsilon > 0$. Esto demuestra la validez del teorema.
El autor *Lang S.* expone una demostración en [17], pág.142 – 143.

Definición 6.2.5 Un *homeomorfismo* en el conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ sobre el conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ es una biyección continua $f: U \to V$ cuya inversa $f^{-1}: V \to U$ también es continua.
El autor brasileño *Lima E.* enuncia esta definición en [20], pág.26.

Teorema 6.2.6 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto; entonces toda aplicación continua inyectiva $f: K \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre su imagen $L = f(K)$ (compacto).
Podemos ubicar una demostración para el teorema en [20], pág.27.

6.3 Funciones y Aplicaciones Diferenciables.

Definición 6.3.1 Sea $f: U \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^m$, sea $c \in U$ y sea $x \in \mathbb{R}^m$ cualquiera. Se dice que un vector $\frac{\partial f(c)}{\partial x} \in \mathbb{R}^n$ es la *derivada parcial* de f en c con respecto a x si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ y $0 < |t| < \delta$ se verifica la desigualdad $\left\| \frac{(f(c+tx) - f(c))}{t} - \frac{\partial f(c)}{\partial x} \right\| \leq \varepsilon$.

Observaciones:

1. La derivada parcial $\frac{\partial f(c)}{\partial x}$ esta determinada de manera única cuando existe.
2. Se define $\frac{\partial f(c)}{\partial x}$ como el límite $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(c+tu)-f(c)}{t}$, o como la derivada en $t=0$ de la función F definida por $F(t)=f(c+tu)$, para $|t|$ suficientemente pequeña y con valores en $\mathbb{R}^n$.

El autor *Bartle R.* enuncia esta definición en [4], pág.381.

Definición 6.3.2 Sea $U\subset\mathbb{R}^m$ un conjunto abierto. Diremos que una aplicación $f: U\to\mathbb{R}^n$ es *diferenciable en* $c\in U$ si y solamente si existe una transformación lineal $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ tal que para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $x\in\mathbb{R}^m$ y $\|x-c\|\le\delta$, entonces $x\in U$ y $\|f(x)-f(c)-T(x-c)\|\le\varepsilon\|x-c\|$.
Se puede reformular de la siguiente manera:
Para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $u\in\mathbb{R}^m$ y $\|u\|\le\delta$, entonces $\|f(c+u)-f(c)-T(u)\|\le\varepsilon\|u\|$, que, además, se puede escribir como $\lim\limits_{\|u\|\to 0}\frac{\|f(c+u)-f(c)-T(u)\|}{\|u\|}=0$.
Podemos encontrar esta definición en [4], pág.382.

Observaciones:

1. La aplicación lineal T se llama *derivada* de f en c y se denota por $f'(c)$.
2. Una función $f: U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ se dice *diferenciable sobre* U, si es diferenciable en cada punto de U.
3. La función $f': U\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, que a cada $c\in U$ le hace corresponder una transformación lineal $f'(c):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, se llama función derivada.

Matriz Jacobiana.

Definición 6.3.3 Sean $f: U\to\mathbb{R}^n$ diferenciable en $c\in U\subset\mathbb{R}^m$ y e_j el $j-$ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Entonces

$$f'(c)\cdot e_j=\lim_{t\to 0}\frac{f(c+te_j)-f(c)}{t}\in\mathbb{R}^n.$$

El límite anterior es usualmente llamado $j-$ésima derivada parcial de f en el punto c, y es indicado por $f'(c)\cdot e_j=\frac{\partial f}{\partial x^j}(c)$.
De la Definición 6.1.1, si $f^1,\cdots,f^n: U\to\mathbb{R}$ son las funciones coordenadas de f, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(c)=\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^j}(c),\cdots,\frac{\partial f^n}{\partial x^j}(c)\right).$$

Podemos expresar la matriz de la transformación lineal $f'(c): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ asociada a las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, llamada *matriz jacobiana* de f en el punto c, cuyo orden es $n \times m$. El elemento (i, j) de esta matriz es la i – ésima coordenada del vector $f'(c) \cdot e_j$, y por lo tanto:

$$Jf(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(c) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(c) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(c) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(c) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(c) & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^m}(c) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(c) & \frac{\partial f^n}{\partial x^2}(c) & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(c) \end{bmatrix}.$$

Cuando $m = n$, el determinante de la matriz $Jf(c)$ se llama el *determinante Jacobiano* o simplemente el *Jacobiano* de f en el punto c, se denota con $J(f(c))$.
El autor brasileño *Lima E.* expone esta definición en [20], pág.98.

Definición 6.3.4 Sean $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos. Una aplicación $f: U \to V$ es un *difeomorfismo* entre U y V cuando es una biyección diferenciable cuya inversa, $g = f^{-1}: V \to U$, también es diferenciable.
El autor *Lima E.* enuncia esta definición en [20], pág.111.

6.4 Aplicaciones de Clase $C^1(U)$.

Definición 6.4.1 Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto. La aplicación $f: U \to \mathbb{R}^n$ se dice que es de *"clase $C^1(U)$"* si,
i. f es diferenciable en U;
ii. $f': U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es continua.
Podemos encontrar esta definición en [4], pág.409.

Teorema 6.4.2
Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, $f: U \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en U. Entonces:
f es de clase $C^1(U)$ si y solo si las derivadas parciales $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ son continuas en U; $1 \le i \le$ y $1 \le j \le m$.
Demostración
($\Leftarrow$) Supongamos que las derivadas parciales $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ son continuas en U, para todo $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$, sea $c \in U$; dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_{ij} > 0$ tal que si $x \in U$ y $\|x - c\| \le \delta_{ij}$, entonces

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{mn}}.$$

Consideremos $\delta = \min\{\delta_{ij}: 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} > 0$. Entonces hemos hallado un $\delta > 0$ tal que si $x \in U$ y $\|x - c\| < \delta$, se verifica que $\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{mn}}$, para todo $1 \le i \le$ y $1 \le j \le m$.
Por hipótesis, existen $f'(x)$, $f'(c)$ las cuales se pueden representar por sus matrices jacobianas.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x) & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^m}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f^n}{\partial x^2}(x) & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(c) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(c) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(c) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(c) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(c) & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^m}(c) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(c) & \frac{\partial f^n}{\partial x^2}(c) & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(c) \end{bmatrix},$$

respectivamente. Recordemos que si $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es transformación lineal, entonces $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|: \|x\| \le 1\}$ y, además, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, $\|T(x)\| \le \|T\|\|x\|$. Luego,

$$\|f'(x) - f'(c)\| = \sup\{\|(f'(x) - f'(c))y\|: \|y\| \le 1\}$$

Como

$$\begin{aligned}(f'(x) - f'(c))y = \Bigg[&\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) - \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(c)\right)y_1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(c)\right)y_2 + \cdots \\ &+ \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) - \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(c)\right)y_m, \cdots, \left(\frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) - \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(c)\right)y_1 \\ &+ \left(\frac{\partial f^n}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial f^n}{\partial x^2}(c)\right)y_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) - \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(c)\right)y_m\Bigg],\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\|(f'(x) - f'(c))y\| &\le \left[\sum_{i,j}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(c)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\|y\| \\ &< \left[\sum_{i,j}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{mn}})\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\|y\| \\ &\le (mn\frac{\varepsilon^2}{4mn})^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Luego $\|(f'(x) - f'(c))y\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $y \in \mathbb{R}^m$ con $\|y\| \le 1$; este resultado implica que $\sup\{\|(f'(x) - f'(c))y\|: \|y\| \le 1\} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; por lo tanto se sigue que $\|f'(x) - f'(c)\| < \varepsilon$. Así, f' es continua en c.

($\Rightarrow$) Sea $c \in U$ tal que f' es continua en c. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in U$ y $\|x - c\| \leq \delta$ entonces $\|f'(x) - f'(c)\| < \varepsilon$; luego tenemos que $\|(f'(x) - f'(c))y\| \leq \|f'(x) - f'(c)\|$, para todo $y \in \mathbb{R}^m$ con $\|y\| \leq 1$. Para $y = (1,0,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^m$, en particular, la doble desigualdad

$$\left\|\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) - \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(c), \cdots, \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) - \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(c)\right)\right\| \leq \|f'(x) - f'(c)\| < \varepsilon,$$

implica que

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x) - \frac{\partial f^i}{\partial x^1}(c)\right| < \varepsilon, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Así queda demostrado que las derivadas parciales $\frac{\partial f^i}{\partial x^1}$ son continuas en c, para todo $1 \leq i \leq n$. Análogamente, para $y = (0,1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^m$, la doble desigualdad

$$\left\|\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(c), \cdots, \frac{\partial f^n}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial f^n}{\partial x^2}(c)\right)\right\| \leq \|f'(x) - f'(c)\| < \varepsilon,$$

implica que

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial f^i}{\partial x^2}(c)\right| < \varepsilon, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Así también queda demostrado que las derivadas parciales $\frac{\partial f^i}{\partial x^2}$ son continuas en c, para todo $1 \leq i \leq n$. Repetimos este proceso hasta demostrar que todas las derivadas parciales $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ son continuas en c, para todo $1 \leq i \leq n$ y todo $1 \leq j \leq m$. Por lo tanto, las derivadas parciales $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ son continuas en cualquier punto de U, pues c es arbitrario.

El autor *Bartle R.* presenta una demostración similar en [4], pág.409 – 410.

Lema 6.4.3

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, $f: U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en U, $x_0 \in U$ y $S = \{(1-t)a + tb: 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. Entonces

$$\|f(b) - f(a) - f'(x_0)(b - a)\| \leq \|b - a\| \sup\{\|f'(x) - f'(x_0)\|: x \in S\}.$$

El autor *Bartle R.* expone una demostración para este teorema en [4], pág.410.

Lema 6.4.4 (Lema de Aproximación)
Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, $f: U \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1(U)$, $x_0 \in U$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in U$ con

$$\|x_1 - x_0\| \leq \delta \text{ y } \|x_2 - x_0\| \leq \delta,$$

entonces

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Demostración
Supongamos que f es de clase $C^1(U)$. Entonces, existe $f': U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, la cual es continua en U.
Sea $x_0 \in U$; entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in U$ y $\|x - x_0\| \leq \delta_1$, entonces $\|f'(x) - f'(x_0)\| < \varepsilon$ ... $(*)$
Como $x_0 \in U$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que $B[x_0, \delta_2] \subset U$ ... $(**)$
Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$; dados $x_1, x_2 \in U$ con $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$ y $\|x_2 - x_0\| \leq \delta$.

a) Como $\|x_1 - x_0\| \leq \delta_1$ y $\|x_2 - x_0\| \leq \delta_1$, entonces $\|f'(x_1) - f'(x_0)\| < \varepsilon$ y $\|f'(x_2) - f'(x_0)\| < \varepsilon$, por $(*)$.
b) Como $\|x_1 - x_0\| \leq \delta_2$ y $\|x_2 - x_0\| \leq \delta_2$, entonces $x_1 \in B[x_0, \delta_2] \subset U$ y $x_2 \in B[x_0, \delta_2] \subset U$.

Así el segmento de recta que une x_1 con x_2 se encuentra en U. Por el Lema 6.4.3, sabemos que $\|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_0)(x_1 - x_2)\|$ es menor o igual a $\|x_1 - x_2\| \sup\{\|f'(x) - f'(x_0)\| : x \in S\}$. Para cada $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $t \in [0,1]$ se tiene,

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \|[(1-t)x_1 + tx_2] + [(1-t)x_0 + tx_0]\| \\ &= \|(1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0)\| \\ &\leq (1-t)\|x_1 - x_0\| + t\|x_2 - x_0\| \\ &\leq (1-t)\delta + t\delta = \delta \end{aligned}$$

Por $(*)$ tenemos que $\|f'(x) - f'(x_0)\| < \varepsilon$, esto condición implica que $\sup\{\|f'(x) - f'(x_0)\| : x \in S\} \leq \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

El autor *Bartle R.* presenta una demostración parecida en [4], pág.410.

Nota:
Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $f: U \to \mathbb{R}^n$. En lo siguiente se establecerá, el carácter local de la transformación f en un punto $c \in U$; estas características están determinadas por la transformación lineal $f'(c)$. Veremos los siguientes casos:

i. Si $m \leq n$ y $f'(c)$ es inyectiva, entonces f es inyectiva en vecindades pequeñas de c.
ii. Si $m \geq n$ y $f'(c)$ es sobreyectiva, entonces la imagen bajo f de una vecindad pequeña de c es una vecindad de $f(c)$.
iii. Si $m = n$ y $f'(c)$ es biyectiva, entonces f aplica una vecindad U de c en una forma uno a uno sobre una vecindad V de $f(c)$.

B. Resultados Obtenidos

En esta parte exponemos los resultados más importantes de la investigación realizada.

Resultado 1: Teorema de la Función Inyectiva

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $f: U \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1(U)$, $c \in U$ donde $f'(c)$ es inyectiva. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $g = f_{|B[c,\delta]}$ es inyectiva y $g^{-1}: g(B[c,\delta]) \to B[c,\delta]$ es continua.

Demostración

Sea $c \in U$ tal que $f'(c)$ es inyectiva. Por el Corolario 6.1.6, existe $r > 0$ tal que $r\|u\| \le \|f'(c)u\|$, para todo $u \in \mathbb{R}^m$ ... $(*)$

Consideremos $\varepsilon = \frac{r}{2} > 0$. Por el Lema de Aproximación, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in U$ con $\|x_1 - c\| \le \delta_1$ y $\|x_2 - c\| \le \delta_2$, entonces $\|f(x_1) - f(x_2) - f'(c)(x_1 - x_2)\| \le \frac{r}{2}\|x_1 - x_2\|$. Asumiendo que $u = x_1 - x_2$, resulta que $\|f(x_1) - f(x_2) - f'(c)(u)\| \le \frac{r}{2}\|u\|$. Por la desigualdad triangular, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \|f'(c)u\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| &\le \|f(x_1) - f(x_2) - f'(c)(u)\| \\ &\le \frac{r}{2}\|u\| \\ &\le \frac{1}{2}\|f'(c)u\|, \end{aligned}$$

por la desigualdad $(*)$

Entonces $\frac{1}{2}\|f'(c)u\| \le \|f(x_1) - f(x_2)\|$ ... $(**)$

1) Probaremos que f es inyectiva en $B[c,\delta_1]$. Para este fin consideremos $x_1, x_2 \in B[c,\delta_1]$ con $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1, x_2 \in U$ con $\|x_1 - c\| \le \delta_1$ y $\|x_2 - c\| \le \delta_1$; luego $\frac{1}{2}\|f'(c)u\| \le \|f(x_1) - f(x_2)\| = 0$ y en consecuencia $\frac{1}{2}\|f'(c)u\| = 0$; de aquí se sigue que $\|f'(c)u\| = 0$, entonces $f'(c)u = \theta$. Siendo $f'(c)$ un monomorfismo, concluimos que $u = \theta$; entonces se concluye que $x_1 - x_2 = \theta$; es decir $x_1 = x_2$. Por lo tanto, f es inyectiva en $B[c,\delta]$. Definamos $g: B[c,\delta_1] \to f(B[c,\delta_1])$ mediante $g(x) = f(x)$, para todo $x \in B[c,\delta_1]$. Así, g es biyectiva.

2) Probaremos que g^{-1} es continua. Efectivamente, dados $y_1, y_2 \in f(B[c,\delta_1])$, existe un único $x_1 \in B[c,\delta_1]$ tal que $y_1 = f(x_1)$ y existe un único $x_2 \in B[c,\delta_1]$ tal que $y_2 = f(x_2)$. Luego,

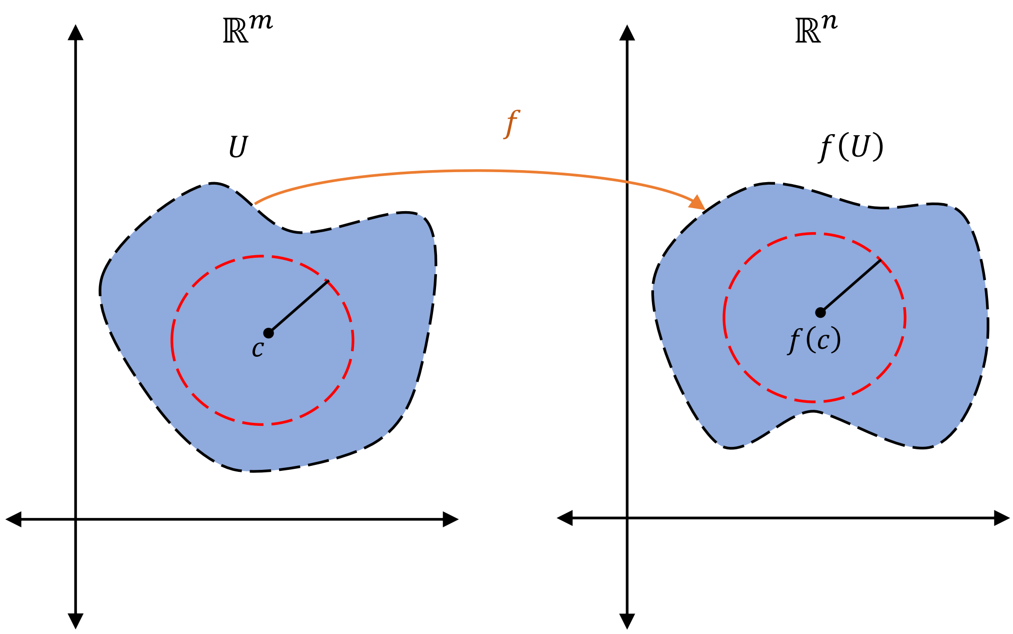
$$\begin{aligned} \|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\| &= \|x_1 - x_2\| \\ &\le \frac{1}{r}\|f'(c)u\|, \text{ por } (*) \\ &\le \frac{2}{r}\|f(x_1) - f(x_2)\|, \text{ por } (**) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{r} \|y_1 - y_2\|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon r}{2}\right\} > 0$ tal que si $\|y_1 - y_2\| < \delta$, entonces $\|y_1 - y_2\| < \delta_1$ y $\|y_1 - y_2\| < \frac{\varepsilon r}{2}$; luego tenemos que,

$$\|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\| \leq \frac{2}{r} \|y_1 - y_2\| < \frac{2}{r} \frac{\varepsilon r}{2} = \varepsilon.$$

Lo que demuestra que g^{-1} es continua.



Resultado 2: Teorema de la Función Sobreyectiva

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $f: U \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1(U)$, $c \in U$ donde $f'(c)$ es sobreyectiva. Entonces existen $k > 0$ y $\alpha > 0$ tales que si $y \in \mathbb{R}^n$ y $\|y - f(c)\| \leq \frac{\alpha}{2k}$, entonces existe $x \in U$ tal que $\|x - c\| \leq \alpha$ y $f(x) = y$.

Demostración

Sea $c \in U$ tal que $f'(c): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva. Cada uno los vectores e_i, de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es la imagen bajo $f'(c)$ de algún vector en $\mathbb{R}^n$; entonces existen vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $f'(c)(u_i) = e_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Puesto que para cada $y \in \mathbb{R}^n$, existen escalares únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que $y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ [cuando $y = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$], entonces podemos definir una función $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mediante la regla de correspondencia $g(y) = g(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$.

1) Es claro que g es una transformación lineal.

2) También es evidente que $f'(c) \circ g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal. Además, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene
$$\begin{aligned}(f'(c) \circ g)(y) = f'(c)\big(g(x)\big) = f'(c) \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i &= \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i f'(c) u_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = y,\end{aligned}$$
entonces $(f'(c) \circ g)(y) = y$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $f'(c) \circ g$ es la identidad en $\mathbb{R}^n$.

3) Si $k = (\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$, entonces $\|g(y)\| \leq k\|y\|$, para $y \in \mathbb{R}^n$. Efectivamente, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ se tiene
$$\begin{aligned}\|g(y)\| = \|g(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\| = \|\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i g(e_i)\| &= \|\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\|, \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|u_i\|, \\ &\leq (\textstyle\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\textstyle\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|y\| k.\end{aligned}$$
Por lo tanto, $\|g(y)\| \leq k\|y\|$, para $y \in \mathbb{R}^n$.

4) Para $\frac{1}{2k} > 0$, por el Lema de Aproximación, existe $\delta > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in U$ con $\|x_1 - c\| \leq \delta$ y $\|x_2 - c\| \leq \delta$, se satisface que $\|f(x_1) - f(x_2) - f'(c)(x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2k}\|x_1 - x_2\|$. Además, podemos elegir δ de tal modo que $B[c, \delta] \subset U$.

5) Sea $y \in \mathbb{R}^n$ donde $\|y - f(c)\| \leq \frac{\alpha}{2k}$ y consideremos $x_0 = c$, $x_1 = x_0 + g\big(y - f(c)\big)$. Entonces, como $x_1 - x_0 = g(y - f(c))$; se sigue que $\|x_1 - x_0\| = \|g(y - f(c))\|$

y $\|g(y-f(c))\| \leq k\|y-f(c)\| \leq k\left(\frac{\alpha}{2k}\right)=\frac{\alpha}{2}$.
Entonces $\|x_1-x_0\| \leq \frac{\alpha}{2}$ [o $\|x_1-x_0\| \leq \left(1-\frac{1}{2}\right)\alpha$].
De esta manera, resulta que $\|x_1-c\|=\|x_1-x_0\| \leq \frac{\alpha}{2} \leq \alpha$ y
que $\|x_0-c\|=\|c-c\|=0 \leq \alpha$.
Siendo $x_1, x_0 \in U$, por la parte 4) tenemos que

$$\|f(x_1)-f(x_0)-f'(c)(x_1-x_0)\| \leq \frac{1}{2k}\|x_1-x_0\|.$$

Tomemos $x_2=x_1-g\big(f(x_1)-f(x_0)-f'(c)(x_1-x_0)\big)$; sigue que

$$\begin{aligned}\|x_2-x_1\| &= \left\|g\big(f(x_1)-f(x_0)-f'(c)(x_1-x_0)\big)\right\| \\ &\leq k\|f(x_1)-f(x_0)-f'(c)(x_1-x_0)\|, \text{ por la parte 3)} \\ &\leq k\left(\frac{1}{2k}\right)\cdot\|x_1-x_0\|=\frac{1}{2}\|x_1-x_0\| \\ &\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2^2}\end{aligned}$$

Entonces $\|x_2-x_1\| \leq \frac{\alpha}{2^2}$.
Luego, $\|x_2-x_0\| \leq \|x_2-x_1\|+\|x_1-x_0\| \leq \frac{\alpha}{2^2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\alpha$

$$=\left[1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\right]\alpha=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\alpha$$

Por lo tanto, $\|x_2-x_0\| \leq \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\alpha$.
Entonces podemos definir inductivamente $x_3, x_4, \ldots, x_i$ de modo que $\left\|x_j-x_{j-1}\right\| \leq \frac{\alpha}{2^j}$ y $\left\|x_j-c\right\| \leq \left(1-\frac{1}{2^j}\right)\alpha$, donde $3 \leq j \leq i$.
De esta manera para

$$x_{i+1}=x_i-g\big(f(x_i)-f(x_{i-1})-f'(c)(x_i-x_{i-1})\big)$$

se cumple que

$$\begin{aligned}\|x_{i+1}-x_i\| &= \left\|g\big(f(x_i)-f(x_{i-1})-f'(c)(x_i-x_{i-1})\big)\right\| \\ &\leq k\|f(x_i)-f(x_{i-1})-f'(c)(x_i-x_{i-1})\| \\ &\leq k\frac{1}{2k}\cdot\|x_i-x_{i-1}\|=\frac{1}{2}\|x_i-x_{i-1}\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2^i}\right)=\frac{\alpha}{2^{i+1}}.\end{aligned}$$

Se obtiene entonces que $\|x_{i+1}-x_i\| \leq \frac{\alpha}{2^{i+1}}$, para todo $i \geq 1$.
Asimismo,

$$\begin{aligned}\|x_{i+1}-c\| \leq \|x_{i+1}-x_i\|+\|x_i-c\| &\leq \frac{\alpha}{2^{i+1}}+\left(1-\frac{1}{2^i}\right)\alpha \\ &=\left(1-\frac{1}{2^{i+1}}\right)\alpha,\end{aligned}$$

entonces $\|x_{i+1}-c\| \leq \left(1-\frac{1}{2^{i+1}}\right)\alpha$, para todo $i \geq 1$.
Así se ha construido una sucesión (x_p) en $\mathbb{R}^m$ tal que

$$\left\|x_p-x_{p-1}\right\| \leq \frac{\alpha}{2^p},\ \left\|x_p-c\right\| \leq \left(1-\frac{1}{2^p}\right)\alpha.$$

6) Afirmamos que $(x_p) \subset \mathbb{R}^m$ es de Cauchy.
Efectivamente, sean $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ con $p \leq q$

$$\begin{aligned}\|x_p - x_q\| &\leq \|x_p - x_{p+1}\| + \|x_{p+1} - x_{p+2}\| + \cdots + \|x_{q-1} - x_q\| \\ &\leq \frac{\alpha}{2^{p+1}} + \frac{\alpha}{2^{p+2}} + \cdots + \frac{\alpha}{2^m} \leq \frac{\alpha}{2^p}.\end{aligned}$$

Para todo $\varepsilon > 0$, tomemos $\frac{\varepsilon}{\alpha} > 0$; Por la propiedad Arquimediana, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{p_0}} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Entonces para $p, q \in \mathbb{N}$, con $p_0 \leq p \leq q$, resulta que $\|x_p - x_q\| \leq \frac{\alpha}{2^p} \leq \frac{\alpha}{2^{p_0}} < \alpha\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = \varepsilon$. Lo que prueba que la sucesión (x_p) es de Cauchy.

7) Puesto que el espacio $\mathbb{R}^m$ es completo, existe $x \in \mathbb{R}^m$ tal que x_p converge hacia $x \in \mathbb{R}^m$.

8) Probaremos que $x \in B[c, \alpha]$. Efectivamente, para cada $p \in \mathbb{N}$, $\|x_p - c\| \leq \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\alpha$; entonces aplicando límite obtenemos que $\lim\limits_{p\to\infty}\|x_p - c\| \leq \lim\limits_{p\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\alpha$; luego, tenemos lo siguiente $\left\|\lim\limits_{p\to\infty}(x_p - c)\right\| \leq \alpha - \alpha \lim\limits_{p\to\infty}\frac{1}{2^p}$; se sigue que $\|x - c\| \leq \alpha$. Por lo tanto, $x \in B[c, \alpha]$.

9) Para todo $p \in \mathbb{N}$, $f'(c)(x_{p+1} - x_p) = y - f(x_p)$. Probaremos esta igualdad por inducción sobre p. Para $p = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}f'(c)(x_1 - x_0) = f'(c)\big[g\big(y - f(c)\big)\big] &= (f'(c) \circ g)\big(y - f(c)\big) \\ &= y - f(c) = y - x_0\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$\begin{aligned}f'(c)(x_{p+1} - x_p) &= f'(c)\big[-g\big(f(x_p) - f(x_{p-1}) - f'(c)(x_p - x_{p-1})\big)\big] \\ &= -(f'(c) \circ g)\big[f(x_p) - f(x_{p-1}) - f'(c)(x_p - x_{p-1})\big] \\ &= -\big[f(x_p) - f(x_{p-1}) - f'(c)(x_p - x_{p-1})\big] \\ &= f'(c)(x_p - x_{p-1}) - f(x_p) + f(x_{p-1})\end{aligned}$$

Supongamos que para p se cumpla la igualdad

$$f'(c)(x_p - x_{p-1}) = y - f(x_{p-1}).$$

Probaremos que esta es cierta para $p + 1$. En este caso se tiene

$$\begin{aligned}f'(c)(x_{p+1} - x_p) &= f'(c)(x_p - x_{p-1}) - f(x_p) + f(x_{p-1}) \\ &= y - f(x_{p-1}) - f(x_p) + f(x_{p-1}) \\ &= y - f(x_p).\end{aligned}$$

10) Se verifica que $y = \lim\limits_{p\to\infty} f(x_p) = f(x)$.
Para todo $p \in \mathbb{N}$, se cumple

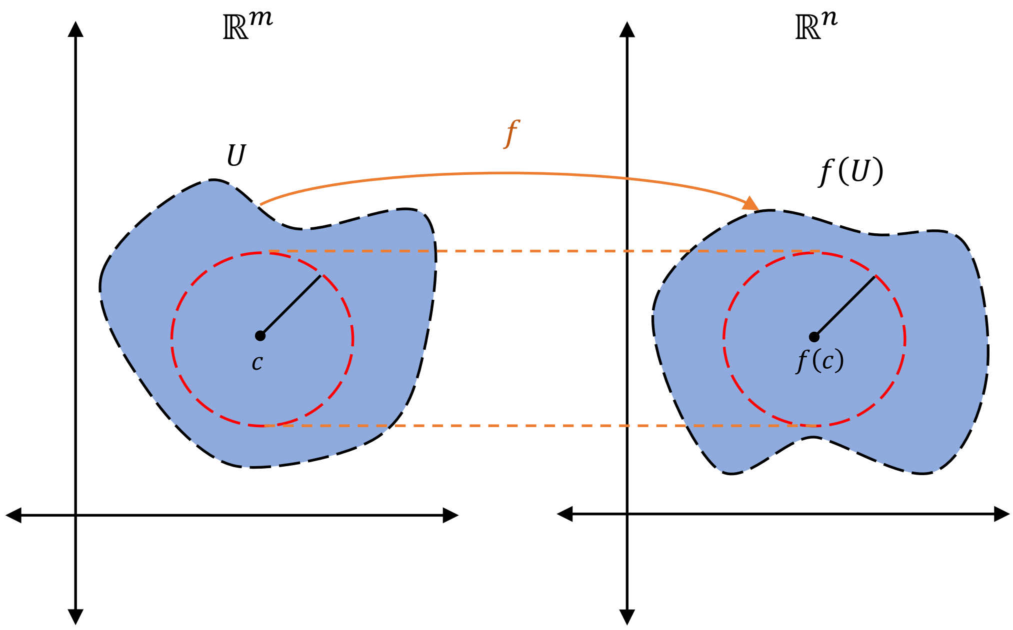
$$f'(c)(x_{p+1} - x_p) = y - f(x_p).$$

Luego, $\lim\limits_{p\to\infty}[f'(c)(x_{p+1} - x_p)] = \lim\limits_{p\to\infty}[y - f(x_p)]$;

de allí, $f'(c)\left[\lim\limits_{p\to\infty}(x_{p+1} - x_p)\right] = y - \lim\limits_{p\to\infty}[f(x_p)]$

Como $f'(c)$ es una transformación lineal, tenemos que $f'(c)[\theta] = \left(y - f(\lim\limits_{p\to\infty} x_p)\right)[\theta]$; esto implica que $\theta = y - f(x)$. Por lo tanto, $y = f(x)$.

11) Para todo $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|y - g(c)\| \leq \frac{\alpha}{2k}$, existe $x \in U$, con $\|x - c\| \leq \alpha$, tal que $y = f(x)$.



Resultado 3: Teorema de la Aplicación Abierta

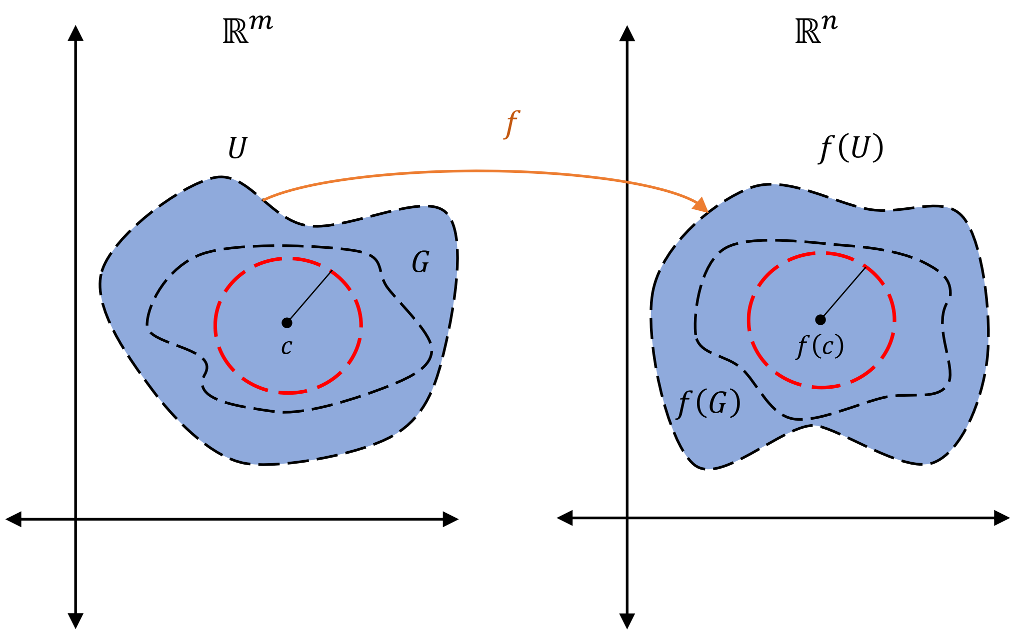
Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, $f: U \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1(U)$, $f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sobreyectiva, para todo $x \in U$ y $G \subset U$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^m$; entonces $f(G)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Demostración

Sea $b \in f(G)$; entonces existe $c \in G$ tal que $b = f(c)$. Consideremos que $g = f_{|G}$; por el Teorema de la Función Sobreyectiva, existen $k > 0$ y $\alpha > 0$ tales que $y \in \mathbb{R}^n$ y $\|y - g(c)\| \leq \frac{\alpha}{2k}$, entonces existe $x \in G$ y $\|x - c\| \leq \alpha$ tal que $y = f(x) \ldots (*)$

Probaremos que existe $\beta > 0$ tal que $B[b, \beta] \subset f(G)$.

Consideremos $\beta = \frac{\alpha}{2k} > 0$; por $(*)$, dado $y \in \mathbb{R}^n$ con $\|y - b\| \leq \beta$, existe $x \in G$ y $\|x - c\| \leq \alpha$ tal que $y = f(x)$. Por lo tanto, existe $x \in G$ tal que $y = f(x)$, y así $y \in f(G)$.



Seguidamente presentamos el resultado central de este trabajo.

Resultado 4: Teorema de la Función Inversa

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f: U \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1(U)$ y $c \in U$ tal que $f'(c)$ es biyectiva. Entonces:

a) Existe $V \subset U$ abierto, $c \in V$ tal que $W = f(V)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $f(c) \in W$;
b) $f: V \to W$ es biyectiva;
c) $g = f^{-1}: W \to V$ es continua;
d) g es de clase $C^1(W)$;
e) Para todo $y \in W$, $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$.

Demostración

1) Por hipótesis $f'(c)$ es inyectiva; luego, por el Corolario 6.1.6, existe $r > 0$ tal que $2r\|z\| \leq \|f'(c)z\|$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$.

2) Existe $\delta > 0$ tal que si $x \in U$ y $\|x - c\| \leq \delta$, entonces $f'(x)$ es inyectiva. Efectivamente, f es de clase $C^1(U)$, luego $f': U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es continua. Luego, en particular, f' es continua en c. Para $r > 0$ por la parte 1), existe $\delta > 0$ tal que si $x \in U$ y $\|x - c\| \leq \delta$, entonces $\|f'(x) - f'(c)\| < r$. Fijemos $x \in U$ con $\|x - c\| < \delta$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $f'(x)v = \theta$.
Probaremos que $v = \theta$. Supongamos que $v \neq \theta$; entonces se tiene que $\|(f'(x) - f'(c))v\| \leq \|f'(x) - f'(c)\| \cdot \|v\| < r\|v\|$.
Pero
$$\|(f'(x) - f'(c))v\| = \|(f'(x)v - f'(c)v\| = \|f'(c)v\|$$
y
$$2r\|v\| \leq \|f'(c)v\|.$$
Luego $2r\|v\| \leq \|f'(c)v\| < r\|v\|$ con $r > 0$ y $\|v\| > 0$; de allí tenemos que $2r\|v\| < r\|v\|$, entonces $2 < 1$(contradicción). Así que, $v = \theta$.
Por lo tanto, $f'(x)$ es inyectiva.

3) Existe $\delta > 0$ tal que si $x \in U$ y $\|x - c\| \leq \delta$, entonces $f'(x)$ es biyectiva. Efectivamente, por la parte 2) tenemos que $f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un monomorfismo, entonces $f'(x)$ es biyectiva, en virtud del Teorema 4.3.7.

4) Para todo $x \in U$ y $\|x - c\| \leq \delta$ se satisface que $\|f'(x)z\| \geq r\|z\|$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Efectivamente, para cada $x \in U$ y $\|x - c\| \leq \delta$, $\|f'(x)z\| - \|f'(c)z\| \leq \|(f'(x) - f'(c))z\|$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$.
Pero $2r\|z\| \leq \|f'(c)z\|$ y

$$\|(f'(x) - f'(c))z\| \leq \|f'(x) - f'(c)\|\|z\| < r\|z\|,$$
entonces $2r\|z\| - \|f'(x)z\| < r\|z\|$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$.
Por lo tanto, $\|f'(x)z\| \geq r\|z\|$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$.

5) Existe $\alpha > 0$ tal que $f_{|B[c,\alpha]}$ es inyectiva.
Efectivamente, $f'(c)$ es inyectiva. Por el Teorema de la Función Inyectiva, existe $\alpha > 0$ tal que $f_{|B[c,\alpha]}$ es inyectiva.

6) Sean $\lambda = min\{\delta, \alpha\} > 0$ y $V = B(c, \lambda) \subset U$ [V es una bola de c].
Por la parte 3), tenemos que $f'(x)$ es biyectiva (en particular, sobreyectiva), para todo $x \in V$. Por la parte 5), tenemos que $f_{|V}$ es inyectiva.

7) Probaremos que $W = f(V)$ es una bola de $f(c)$.
Efectivamente, existe $G \subset V$, G abierto, tal que $c \in G$ y $f_{|V}$ es de clase $C^1(V)$. Como $f'(x)$ es sobreyectiva, para todo $x \in V$, por el Teorema de la Aplicación Abierta, tenemos que $f(G)$ es conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$; como $f(c) \in f(G)$ y $f(G) \subset W$ es abierto, entonces $W = f(V)$ es una bola de $f(c)$.

8) Definamos la función $f_1: V \to W$ mediante
$$x \to f_1(x) = f(x)$$
Por las partes 5) y 6), tenemos que f_1 es biyectiva. Sea $g = (f_1)^{-1}: W \to V$, entonces g es uniformemente continua, en virtud del Teorema de la Función Inyectiva. Sea $y_1 \in W$, entonces existe $x_1 \in V$ tal que $y_1 = f(x_1)$ pues $x_1 = g(y_1)$. Por la hipótesis, f es diferenciable en x_1; entonces para $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_1 + h \in V$ se cumple que
$$f(x_1 + h) = f(x_1) + f'(x_1)h + \|h\|p(h), \text{ donde } \lim_{h\to\theta} p(h) = \theta.$$
Además, $f'(x_1): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es biyectiva. Sea $T_1 = [f'(x_1)]^{-1}$ el isomorfismo inverso de $f'(x_1)$; se cumple:
$$h = ([f'(x_1)]^{-1} \circ f'(x_1))h = (T_1 \circ f'(x_1))h$$
$$h = T_1(f'(x_1)h)$$
$$h = T_1 - (f(x_1 + h) - f(x_1) - \|h\|p(h)) \dots (*)$$
Para $x = x_1 + h \in V$, existe $y \in W$ tal que $y = f(x)$ pues $x = g(y)$.
Así, $h = x - x_1 = g(y) - g(y_1)$; por $(*)$,
$$g(y) - g(y_1) = T_1(f(g(y)) - y_1 - \|h\|p(h))$$
$$g(y) - g(y_1) = T_1(y - y_1 - \|h\|p(h)).$$
De allí resulta, $g(y) - g(y_1) - T_1(y - y_1) = -\|h\|T_1(p(h)) \dots (**)$
Dado que $f'(x_1)$ es inyectiva, existe $r > 0$ tal que

$\|y - y_1\| = \|f(x) - f(x_1)\| \geq \frac{r}{2}\|x - x_1\|$, siempre que y este lo suficientemente cerca de y_1. Sea $k \in \mathbb{R}^n$ tal que $y - y_1 = k$.
De $(**)$ obtenemos que:

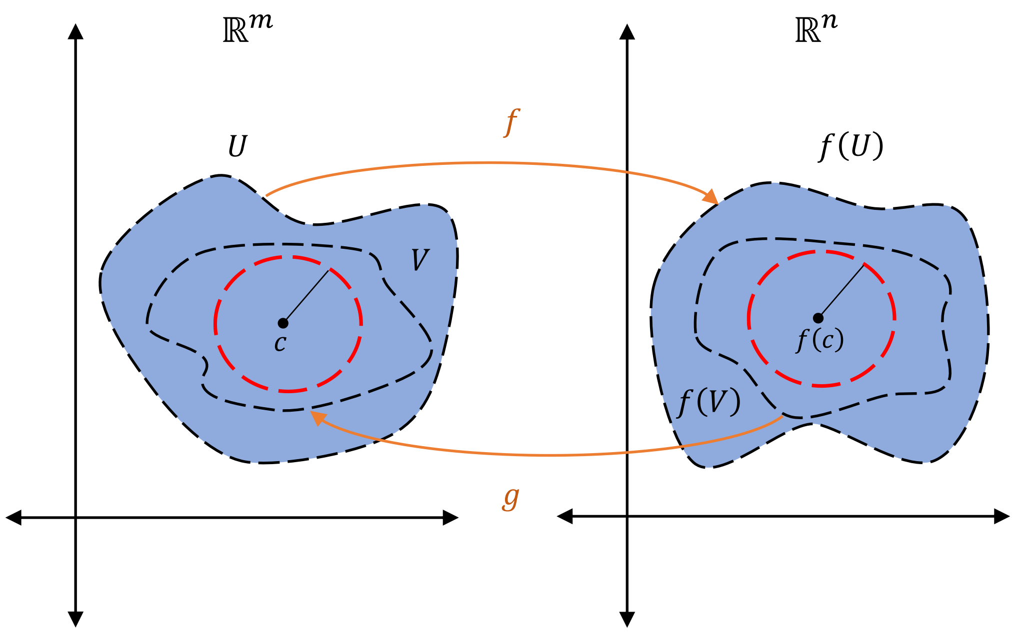
$$\|g(y_1 + k) - g(y_1) - T_1(k)\| = \|h\| \cdot \|T_1(p(h))\|;$$

De la parte 4) tenemos que $\|f'(x)z\| \geq r\|z\|$; entonces $\|z\| \leq \frac{1}{r}\|f'(x)z\|$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Sea $u = f'(x)z \in \mathbb{R}^n$; si $T_1(u) = z$, entonces $\|T_1(u)\| \leq \frac{1}{r}\|u\|$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$. Luego se tiene sucesivamente que

$$\begin{aligned} \|g(y_1 + k) - g(y_1) - T_1(k)\| &= \|h\| \cdot \|T_1(p(h))\| \\ &\leq \|x - x_1\| \cdot \frac{1}{r}\|u\| \\ &\leq \frac{2\|y - y_1\|}{r} \cdot \frac{\|u\|}{r} \\ &= \frac{2\|k\|}{r^2} \cdot \|u\|. \end{aligned}$$

Cuando $k > 0$ tenemos que y tiende a y_1; luego $g(y)$ se aproxima a $g(y_1)$ [g es continua] y en consecuencia x tiende a x_1. Por lo tanto, h se aproxima a 0. Así, g es diferenciable en y_1 e y

$$g'(y_1) = T_1 = [f'(x_1)]^{-1}.$$



Los siguientes resultados que se exponen son aplicaciones del Teorema de la Función Inversa.

Resultado 5: Teorema de la Forma Local de las Inmersiones

Definición. Una aplicación $f: U \to \mathbb{R}^n$ es fuertemente diferenciable en $a \in U$, cuando existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, tal que para cada $x, y \in U$; $f(x) - f(y) = T(x-y) + \rho_a(x,y)$ con $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho_a(x,y)}{\|x-y\|} = \theta$.
El autor *Lima E.* presenta esta definición en [22], pág.273.

Definición. Una *inmersión* del abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable $f: U \to \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in U$, la derivada $f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es un monomorfismo. Evidentemente, esto ocurre cuando $m \leq n$.
El autor *Lima E.* expone esta definición en [22], pág.289.

Observación:

1. Diremos que f es *fuertemente diferenciable* en $a \in U$ si la derivada $f': U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es continua en el punto $a \in U$.

Ejemplo:

1. Sea $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ una aplicación de inclusión, dada por $f(x) = (x, \theta)$. Como f es lineal, tenemos $f'(x) = f$, para $x \in \mathbb{R}^m$; luego f es una inmersión C^∞. El principal resultado de esta sección es mostrar que toda inmersión de clase $C^k (k \geq 1)$ se comporta localmente como esta.

Teorema de la Forma Local de las Inmersiones.
Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $f: U \to \mathbb{R}^{m+n}$ de clase $C^k (k \geq 1)$. Suponga que exista $a \in U$ tal que $f'(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ es inyectiva. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^k, $h: Z \to V \times W$, de una vecindad Z de $f(a)$ sobre un abierto $V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, ($a \in V, \theta \in W, f(V) \subset Z$) tal que $(h \circ f)(x) = (x, \theta)$ para cada $x \in V$.
Demostración
Sean $E = f'(a) \cdot \mathbb{R}^m$ la imagen de $f'(a)$. Existen vectores linealmente independientes $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^{m+n}$ que generan un subespacio vectorial $F \subset \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$. Entonces $f'(a)$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre E y $\dim F = n$. Definamos $\varphi: U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ mediante

$$\varphi(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = f(x) + y,$$

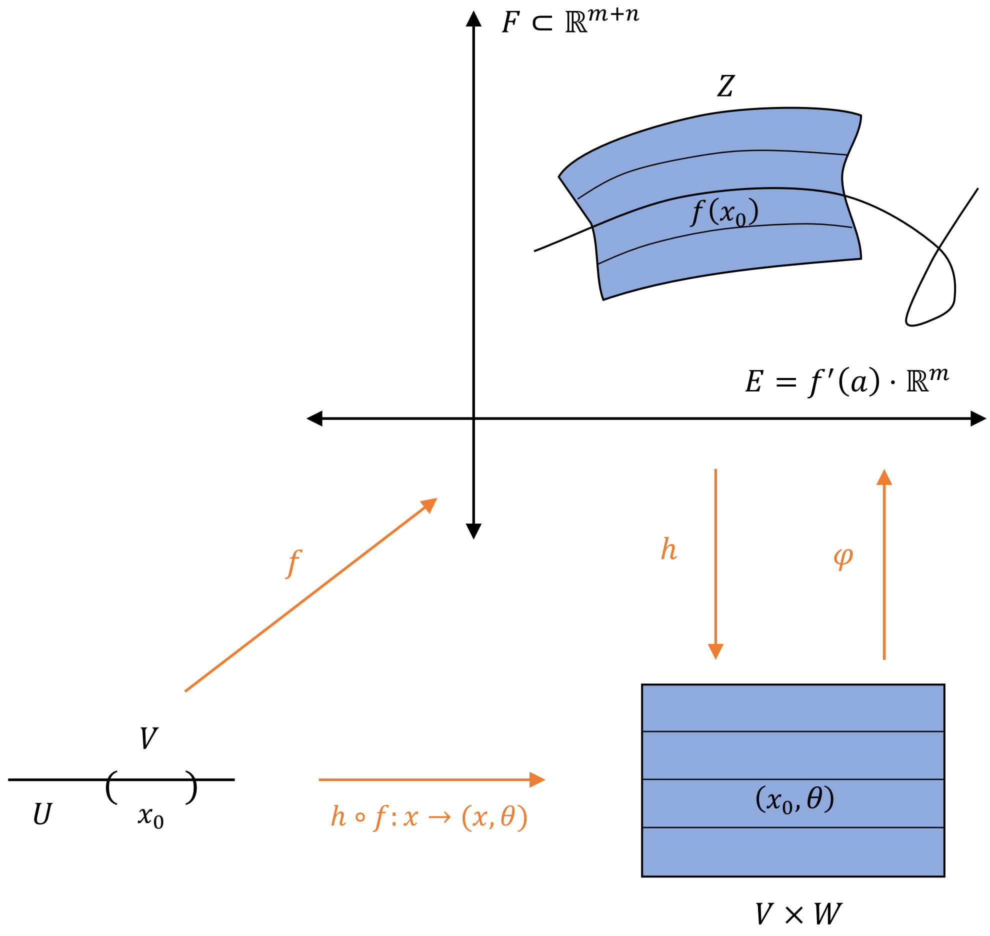
donde $x \in U$ e $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Además $\varphi \in C^k$, $\varphi(a, \theta) = f(a)$. Entonces φ es fuertemente diferenciable en el punto (a, θ), y

$$\varphi'(a, \theta) \cdot (v, w) = f'(a) \cdot v + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i,$$

donde $v \in \mathbb{R}^m$ y $w = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$. Siendo $f'(a)$ inyectiva y $\mathbb{R}^{m+n}$ la suma directa de la imagen de $f'(a)$ con F, resulta inmediata que $\varphi'(a, \theta): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ es inyectiva y por lo tanto un isomorfismo. Por el Teorema de la Función Inversa, φ es un difeomorfismo de clase C^k de una vecindad de (a, θ) (que podemos escoger en la forma $V \times W$, donde V es un abierto de U con $a \in V$ y W un abierto de F con $\theta \in W$) sobre una vecindad abierta $Z = \varphi(V \times W)$ de $f(a)$ en $\mathbb{R}^{m+n}$.

Sea h el difeomorfismo inverso de $\varphi_{|(V \times W)}$. Como $\varphi(a, \theta) = f(a)$ tenemos que

$$(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = h\big(\varphi(x, \theta)\big) = (x, \theta), \text{ para todo } x \in V.$$



Resultado 6: Aplicación del Teorema de la Función Inversa en Geometría Diferencial

Definición 1. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una *superficie regular* de dimensión k si para cada $p \in S$, existe un abierto V de $\mathbb{R}^n$ conteniendo p y una aplicación $f: U \subset \mathbb{R}^k \to S \cap V$ de un abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $S \cap V$ tales que:

i. f es un homeomorfismo diferenciable;

ii. Para todo $q \in U$, $f'_q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva.

El autor *Do Carmo M.* expone una definición similar en [10], pág.64 – 65.

Observación 1:

1. Una superficie k – dimensional es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que localmente es homeomorfo a abiertos del espacio $\mathbb{R}^k$.
2. La aplicación φ se denomina una *parametrización* o un sistema (local) de coordenadas y el conjunto $f(U) = S \cap V$ se denomina abierto coordenado.
3. Para verificar la continuidad de $f^{-1}: S \cap V \to U$ se debe verificar que f^{-1} es la restricción de una aplicación continua $F: W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definida en un subconjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ conteniendo $S \cap V$.
4. La matriz jacobiana $Jf(q)$ es distinto de cero, posee alguna submatriz cuadrada de orden k con determinante distinto de cero.

Definición 2. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable definida en el abierto U $(m \geq n)$. Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es llamado *valor regular* si la derivada $f'_q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva en todo punto $q \in f^{-1}(p)$.
Podemos encontrar una definición similar en [10], pág.70.

Observación 2:

Recuerde que $f'_q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{ran} f'_q = n$ (observe que en particular $m \geq n$). Si hacemos $f = (f^1, \cdots, f^n)$ entonces esto último equivale a decir que la matriz jacobiana $Jf(q)$ de orden $n \times m$, tiene rango n lo cual quiere decir que $Jf(q)$ tiene n columnas linealmente independientes.

Teorema
Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $p \in f(U)$ es valor regular de f, entonces $f^{-1}(p)$ es una superficie regular.
Demostración
Sea $k = 2 = 3 - 1$ e indiquemos con (y, x_1, x_2) las coordenadas en $\mathbb{R}^3$. Sea $a = (b_0, x_0) \in f^{-1}(p)$, donde $b_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 = (x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$. Como $p = f(a)$ es un valor regular de f, entonces $f'_a: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva. Por la Observación 2, la matriz jacobiana

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f^1}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix},$$

tiene rango 1; entonces sus columnas son linealmente independientes y por lo tanto podemos asumir que $\frac{\partial f^1}{\partial y}(a) \neq 0$. Definamos una aplicación $\varphi: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante la regla de correspondencia

$$\varphi(y, x_1, x_2) = (f^1(q), x_1, x_2),$$

donde $q = (y, x_1, x_2)$ [observe que $\varphi(a) = (f(a), x_1^*, x_2^*) = (p, x_1^*, x_2^*)$]. Entonces la nueva matriz será

$$J\varphi(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f^1}{\partial x_2}(a) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto el determinante de $J\varphi(a)$ es distinto de cero. [Pues $\frac{\partial f^1}{\partial y}(a) \neq 0$], entonces φ'_q es un isomorfismo. Por el Teorema de la Función Inversa, tenemos que φ es un difeomorfismo de una vecindad Q de a sobre una vecindad W de $\varphi(a)$. Sea $K = K_1 \times K_2 \subset W \subset \mathbb{R}^3$ un cubo abierto de centro $\varphi(a)$, donde $K_1 \subset \mathbb{R}$ es un cubo abierto de centro $p = f(a)$ y $K_2 \subset \mathbb{R}^2$ es también un cubo abierto de centro (x_1^*, x_2^*) hagamos $V = \varphi^{-1}(K) \cap f^{-1}(p)$. Entonces φ aplica la vecindad V difeomórficamente sobre la imagen $\varphi(V) = K_1 \times K_2$. Consideremos la aplicación $h: K_2 \to \{p\} \times K_2$ definida por $h(x_1, x_2) = (p_1, x_1, x_2)$ que es un difeomorfismo y definamos la aplicación $\psi: K_2 \to V$ como $\psi = \varphi^{-1} \circ h$.
Observemos que $\psi(x_1, x_2) = \varphi^{-1}(p_1, x_1, x_2)$. Finalmente, para cualquier punto $a \in f^{-1}(p)$ se concluye que $f^{-1}(p)$ es una superficie regular de dimensión 2.

Teorema

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in S$. Entonces existe una vecindad V de p en S tal que V es la gráfica de una función diferenciable que tiene una de las tres formas:

$$z = f(x, y) \text{ o } y = g(y, z) \text{ o } x = h(y, z).$$

Demostración

El teorema se puede reescribir de la siguiente manera: Toda superficie regular en $\mathbb{R}^3$ es localmente el grafico de una función diferenciable.

Efectivamente, sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular $2-$dimensional y consideremos un punto cualquiera $p \in S$. Sea $\varphi: U \to S$ una parametrización de S en p y hagamos $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$. De la Observación 1 (parte 4), la matriz jacobiana $J\varphi(q)$ posee alguna submatriz cuadrada de orden 2 con determinante distinto de cero; supongamos que es la siguiente submatriz cuadrada

$$C = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x_1}(q) & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x_2}(q) \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x_1}(q) & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x_2}(q) \end{bmatrix}$$

aquella que posee jacobiano no nulo; es decir, $\frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$; de no ser así simplemente re $-$ enumeramos los subíndices para las funciones coordenadas de φ.

Sea $\pi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la proyección definida por $\pi(x, y) = x$ donde $x \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}$. Restringiendo π a $\varphi(U)$ se obtiene la aplicación $\pi \circ \varphi: U \to \mathbb{R}^2$ la cual tendrá como regla de correspondencia a

$$(\pi \circ \varphi)(x) = \pi\big(\varphi(x)\big) = \big(\varphi^1(x), \varphi^2(x)\big).$$

Además la matriz jacobiana de $\pi \circ \varphi$ en el punto $q = \varphi^{-1}(p)$ esta dada por $J(\pi \circ \varphi)(q) = C$ de donde $det\big(J(\pi \circ \varphi)(q)\big) = \frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$, lo cual garantiza que $d(\pi \circ \varphi)_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo. Usamos el Teorema de la Función Inversa para garantizar la existencia de vecindades $U_0 \subset U$ de q tal que $\pi \circ q$ es un difeomorfismo de U_0 en un abierto $U_1 = \pi \circ \varphi(U_0)$. Esto implica entonces que la inversa $(\pi \circ \varphi)^{-1}: U_1 \to U_0$ es también un difeomorfismo.

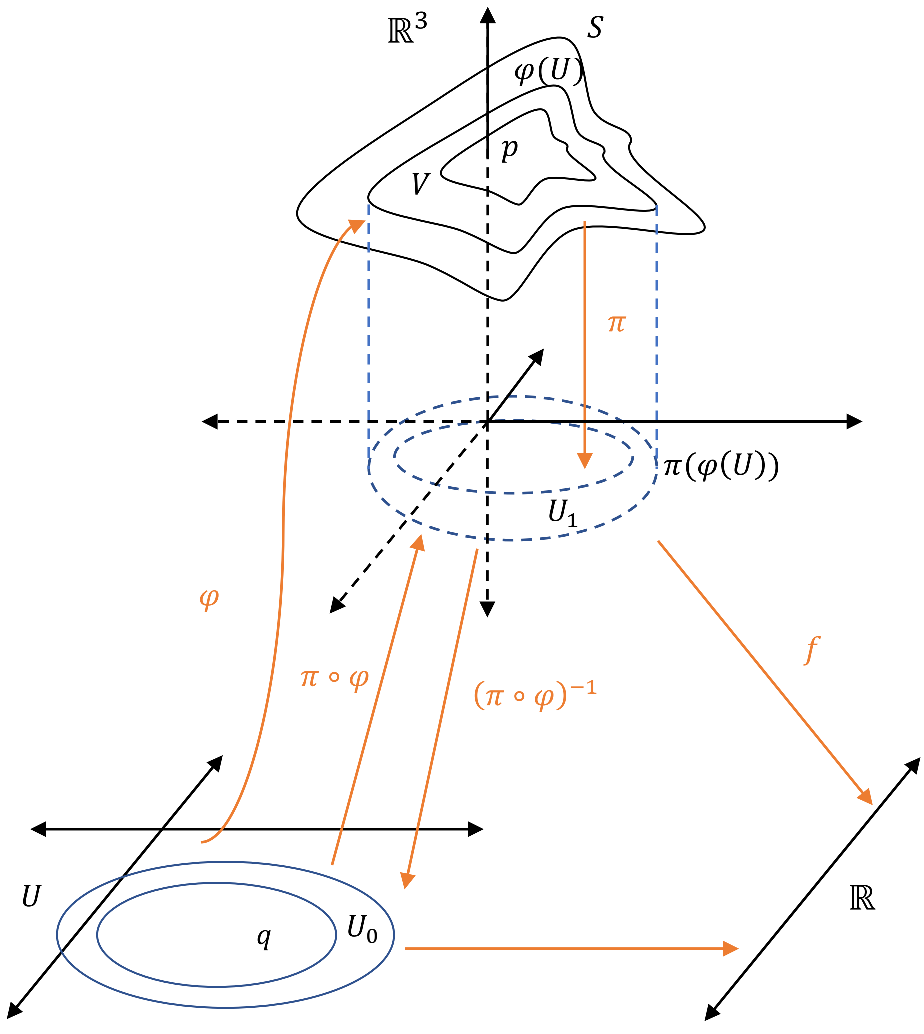
La proyección π restringida a $\varphi(U_0) = V$ es biyectiva.

Efectivamente, en el conjunto V se cumple que $\pi = (\pi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ y como ${\varphi^{-1}}_{|V}$ y $\pi \circ \varphi_{|U_0}$ son biyectivas entonces π es biyectiva.

La aplicación $\varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}: U_1 \to V$ cumple con las condiciones de la definición de superficie regular y por lo tanto $\psi = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}: U_1 \to V$ es una parametrización. Efectivamente, se tiene que $(\pi \circ \varphi)^{-1}: U_1 \to U_0$ es un difeomorfismo y la aplicación

$\varphi: U_0 \to V$ es un homeomorfismo diferenciable, de donde se concluye que $\varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}: U_1 \to V$ es un homeomorfismo diferenciable. Similarmente podemos argumentar respecto a la inyectividad de la derivada de ψ en todo punto $r \in U_1$.

Para todo $x \in U_1$ se tiene que $(\pi \circ \psi)(x) = x$ lo cual implica que $\psi(x) = (x, f(x))$, donde $f: U_1 \to \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable. Pero $(x, f(x)) \in V$ si y solamente si $x \in U_1$. Luego se concluye que $V = \{(x, y): y = f(x)\}$ es decir que V es el gráfico de f.



Resultado 7: Aplicación del Teorema de la Función Inversa en Ecuaciones Diferenciales Parciales

Definición 1. Una *ecuación diferencial parcial o EDP* para una función $u = u(x_1, x_2, \cdots x_n)$ con derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial {x_n}^k}$ es una relación de la forma

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}, \cdots, \frac{\partial^k u}{\partial {x_n}^k}\right) = 0 \ldots (*),$$

donde F es una función de las variables $x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial {x_n}^k}$.

Una función u es *solución* de $(*)$ si en alguna región del espacio de sus variables independientes, la función y sus derivadas satisfacen la ecuación idénticamente en $x_1, x_2, \dots, x_n$.

El *orden* de una EDP es dado por la derivada parcial de mayor orden que aparece en la ecuación. De la ecuación $(*)$, el orden de la EDP es k.

El autor *Iório V.* expone una definición similar en [16], pág.3.

Ecuaciones Semilineales de Segundo Orden.

Consideremos la ecuación diferencial parcial con dos variables independientes:

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \ldots (1)$$

La parte primordial de la ecuación (1) es el operador

$$A_u = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} \ldots (2)$$

Asumamos que $a(x,y)$,$b(x,y)$,$c(x,y)$ son funciones continuas en un abierto Ω del plano y que no se anulan simultáneamente.

Definamos la función $\delta: \Omega \to \mathbb{R}$ mediante

$$\delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) \ldots (3)$$

Definición 2. El operador diferencial A dado por (2) y la EDP (1) es:

(1) De tipo *parabólico* en un punto $(x,y) \in \Omega$, si $\delta(x,y) = 0$ en ese punto.

(2) De tipo *hiperbólico* en un punto $(x,y) \in \Omega$, si $\delta(x,y) > 0$ en ese punto.

(3) De tipo *elíptico* en un punto $(x,y) \in \Omega$, si $\delta(x,y) < 0$ en ese punto.

El autor *Iório V.* expone una definición similar en [16], pág.78 – 79.

Teorema

Una propiedad fundamental es que el tipo de una EDP es invariante bajo cambios de variables.

Demostración

Supongamos que $\xi = \xi(x,y)$,$\eta = \eta(x,y)$ son funciones continuas diferenciables, hasta el segundo orden, en una vecindad del punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ con la matriz jacobiana

$$J(x,y) = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$$

y supongamos que $\det[J(x_0, y_0)]$ es distinto de cero. Entonces, por continuidad, el jacobiano no se anula en una vecindad del punto (x_0, y_0) y por el Teorema de la Función Inversa, podemos resolver localmente $x = x(\xi,\eta)$,$y = y(\xi,\eta)$ en una vecindad del punto $(\xi_0,\ \eta_0) = \big(\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0)\big)$ y las funciones x e y son de clase C^2 en dicha vecindad. Definiendo entonces $v(\xi,\eta) = u(x,y)$ y $v(\xi,\eta) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)$ sigue que $u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)$ para simplificar las variables x e y en $u = v(\xi,\eta)$. Luego obtenemos, por la Regla de la Cadena, que

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$, es decir $u_x = v_\xi \cdot \xi_x + v_\eta \cdot \eta_x$; asimismo

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$, es decir $u_y = v_\xi \cdot \xi_y + v_\eta \cdot \eta_y$;

Siendo $u_x = \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$, derivando con respecto x, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u_x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] \\
&= \left[\frac{\partial^2 v(\xi,\eta)}{\partial \xi \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v(\xi,\eta)}{\partial \xi \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial xx} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 v(\xi,\eta)}{\partial \eta \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v(\xi,\eta)}{\partial \eta \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial xx} \\
&= \left[v_{\xi\xi} \cdot \xi_x + v_{\eta\xi} \cdot \eta_x\right] \cdot \xi_x + v_\xi \cdot \xi_{xx} + \left[v_{\xi\eta} \cdot \xi_x + v_{\eta\eta} \cdot \eta_x\right] \cdot \eta_x + v_\eta . \eta_{xx} \\
&= v_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + v_{\eta\xi} \cdot \eta_x \cdot \xi_x + v_\xi \cdot \xi_{xx} + v_{\xi\eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + v_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 \\
&\quad + v_\eta \cdot \eta_{xx}
\end{aligned}$$

Como x,$y \in C^2$ entonces

$u_{xx} = v_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + v_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + v_\xi \cdot \xi_{xx} + v_\eta \cdot \eta_{xx}$;

Análogamente, obtendremos

$$\begin{aligned}
u_{xy} &= v_{\xi\xi} \cdot \xi_x \cdot \xi_y + v_{\eta\xi} \cdot \big(\xi_x \cdot \eta_y + \xi_y \cdot \eta_x\big) + v_{\eta\eta} \cdot \eta_x \cdot \eta_y + v_\xi \cdot \xi_{xy} \\
&\quad + v_\eta \cdot \eta_{xy};
\end{aligned}$$

$u_{yy} = v_{\xi\xi} \cdot \big(\xi_y\big)^2 + 2v_{\xi\eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_y + v_{\eta\eta} \cdot \big(\eta_y\big)^2 + v_\xi \cdot \xi_{yy} + v_\eta \cdot \eta_{yy}$.

Por lo tanto, si u es una solución clásica de la ecuación (1), v es una solución clásica de la ecuación

$$A(\xi,\eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi,\eta)v_{\xi\eta} + C(\xi,\eta)v_{\eta\eta} = F\big(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta\big) \ldots (4)$$

donde

$$\begin{cases} A(\xi,\eta) = a(x,y)(\xi_x)^2 + 2b(x,y)\xi_x\xi_y + c(x,y)\left(\xi_y\right)^2 \\ B(\xi,\eta) = a(x,y)\xi_x\eta_x + b(x,y)(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c(x,y)\xi_y\eta_y \ldots (5) \\ C(\xi,\eta) = a(x,y)(\eta_x)^2 + 2b(x,y)\eta_x\eta_y + c(x,y)\left(\eta_y\right)^2 \end{cases}$$

Calculando el discriminante de la ecuación (4), obtendremos

$$\Delta(\xi,\eta) = B(\xi,\eta)^2 - A(\xi,\eta)C(\xi,\eta) = \delta(x,y)\det[J(x,y)^2],$$

donde $\delta(x,y) = b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y)$ es el discriminante de la ecuación (1). Como la matriz jacobiana nunca se anula en una vecindad del punto (x_0,y_0), $\Delta(\xi,\eta)$ tiene el signo de $\delta_0(x_0,y_0)$.
Concluimos afirmando que la ecuación (1) es parabólica si y solo si la ecuación (4) es parabólica (análogamente, para la ecuación hiperbólica y elíptica).
Nota: Las curvas características son muy importantes en el estudio de las ecuaciones hiperbólicas; las ecuaciones elípticas no tienen curvas características.

Además, sea

$$u(x,y) = \frac{dy}{dx} \ldots (6)$$

Se verifica que u satisface la ecuación

$$au^2 - 2bu + c = 0 \ldots (7)$$

Concluimos que: en el caso hiperbólico ($\delta > 0$) existen dos familias de curvas reales satisfaciendo (6) con u solución de (7); en el caso parabólico ($\delta = 0$) existe solo una familia mientras que en el caso elíptico ($\delta < 0$) no existe ninguna. Las curvas definidas por (6) con u solución de (7), cuando existen, se denominan *curvas características* de la ecuación (1).

Ejemplos:

a. Encontremos las curvas características para la ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2u_{xx}, \text{ donde } c > 0.$$

Resolución

Podemos escribir $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$, donde $c > 0$. Vemos que $a(t,x) = 1$, $b(t,x) = 0$ y $c(t,x) = -c^2$; entonces $\delta(t,x) = c^2 > 0$ (hiperbólico).

Luego la ecuación (14) queda $u^2 + 2(0)u + (-c^2) = u^2 - c^2 = 0$, entonces $u = \pm c$. Obtenemos que $\frac{dx}{dt} = \pm c$; se sigue entonces $dx = \pm cdt$; luego integrando miembro a miembro obtenemos que $\int dx = \pm c \int dt$; entonces $x = \pm ct + k$ (k constante). Por lo tanto, las curvas características son las familias de rectas $x + ct = k_1$ y $x - ct = k_2$, donde k_1,k_2 son constantes.

b. Encontremos las curvas características para la ecuación de onda

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \text{ donde } \alpha > 0.$$

Resolución

Podemos escribir $u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0$, donde $\alpha^2 > 0$. Vemos que $a(t,x) = 0$, $b(t,x) = 0$ y $c(t,x) = -\alpha^2$; entonces $\delta(t,x) = 0$ (parabólico). Luego la ecuación (14) se reduce a la ecuación $0u^2 + 2(0)u + (-\alpha^2) = -\alpha^2 = 0$, entonces $\alpha = 0 = u$ (pues la EDP tiene solución única). Obtenemos que $\frac{dx}{dt} = 0$ sigue que $dx = 0$, luego integrando miembro a miembro obtenemos $\int dx = 0 \int dt$; entonces $x = k$ (k constante). Por lo tanto, la curva característica son las familias de rectas $x = k$ donde k son constantes.

Discusión

A tenor de los resultados expuestos anteriormente podemos expresar, de manera precisa, lo siguiente:
En el Resultado 1, se prueba que si $f'(c)$ es inyectiva, entonces f posee una inversa local que es inyectiva y continua; en el Resultado 2 se muestra que si $f'(c)$ es sobreyectiva, entonces f es localmente sobreyectiva y como una consecuencia de este resultado, se obtiene el Resultado 3 que establece una propiedad topológica para una función f. Finalmente, el Resultado 4, que es el que está conectado al objetivo de esta tesis, conjuga los Resultados 1 y 2 estableciendo que si $f'(c)$ es biyectiva, entonces f es localmente biyectiva en c, con inversa local continua y diferenciable; esto demuestra que si $f'(c)$ es no nula, entonces f posee una inversa local en c.

Estos resultados son una generalización del teorema de la función inversa para funciones reales de variable real y de las propiedades que hereda dicha inversa.

Conclusiones

De lo expuesto en la discusión de los resultados podemos establecer las siguientes conclusiones:

- Se ha generalizado el teorema de la función inversa de funciones reales de variable real para funciones definidas entre espacios euclidianos de dimensión finita.

- Se ha probado que la función inversa local de una función definida entre espacios euclidianos, también hereda las propiedades de la función directa.

Sugerencias

- Desarrollar en la asignatura de análisis en el espacio $\mathbb{R}^n$ este teorema que es rico en aplicaciones en la matemática.

- Para profundizar en la información sobre temas posteriores a los conceptos aquí vertidos recomendamos leer los libros de "Curso de Analise Vol. 2" de *Elon Lages Lima* y "Análisis Matemático" de *Robert Bartle*.

- Revisar la topología del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, conceptos y teoremas importantes de la diferenciabilidad.

- Motivar a los estudiantes en la investigación científica en el área de Análisis.

Fuentes de Información

[1] Andaur, G. y Monsalve, C. (sf). *Los teoremas de la Función Implícita y de la Función Inversa.* Universidad del Bío Bío. Chillan, Chile. Recuperado de: *http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1987/3/Andaur_Munoz_Gissela.pdf*

[2] Aubin, J. and Frankowska, H. (1984). *On Inverse Function Theorems for Set – Valued Maps.* International Institute For Applied Systems Analysis. Laxenburg, Austria.Recuperado de: http://pure.iiasa.ac.at/id/eprint/2450/1/WP-84-068.pdf

[3] Ayala, J. (1990). *Teoremas Fundamentales del Cálculo Diferencial.* Universidad de Sonora. Sonora, México. Recuperado de: http://lic.mat.uson.mx/tesis/59TesisAyala.PDF

[4] Bartle, R. (1992). *Introducción al Análisis Matemático (6ª reimpresión española)*. D.F., México: Limusa.

[5] Bartle, R. y Sherbert, D. (1996). *Introducción al Análisis Matemático de una Variable (2ª edición española)*. D.F., México: Limusa.

[6] Chávez, C. (2007). *Álgebra Lineal (1ª edición)*. Lima, Perú: Moshera S.R.L.

[7] Chávez, C. (2012). *Notas de Álgebra (1ª edición)*. Lima, Perú: Moshera S.R.L.

[8] De Oliveira, O. (2013 – 2014). *The Implicit and the Inverse Function Theorems: Easy Proofs.* Universidad de São Paulo. São Paulo, Brasil. Recuperado de: *https://www.ime.usp.br/~oliveira/IMPLI-1-RAEX-FINAL.pdf*

[9] Del Castillo, F. (1980). *Análisis Matemático II (1ª edición).* Madrid, España: Alhambra.

[10] Do Carmo, M. (1990). *Geometria diferencial de curvas y superfícies (1ª edición española).* Madrid, España: Alianza.

[11] Fernandes, A. (2014). *O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach.* Universidade Estadual da Paraíba. Paraíba, Brasil. Recuperado de:

http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/12345689/ 4266/1/PDF%20-%20Alex%20Fernandes %20Mendes.pdf

[12] Figueroa, R. (2013). *Matemática Básica 1 (8ª edición)*. Lima, Perú: RFG.

[13] Gonçalvez, A. (2017). *Introdução a Álgebra (6ª edição)*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.

[14] Hasser, N., LaSalle, J. y Sullivan, J. (1982). *Análisis Matemático Volumen 2 Curso Intermedio (12ª reimpresión española)*. D.F., México: Trillas.

[15] Hefez, A. (2016). *Curso de Álgebra volume1 (5ª edição)*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.

[16] Iório, V. (2016). *EDP: Um Curso de Graduação (4ª edição)*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.

[17] Lang, S. (1990). *Introducción al Análisis Matemático (12ª edición española)*. Wilmington, U.S.A.: Addison – Wesley Iberoamericana.

[18] Lima, E. (2018). *Álgebra Linear (9ª edição)*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.

[19] Lima, E. (2017). *Análise Real vol. 1 (12ª edição)*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.

[20] Lima, E. (2016). *Análise Real vol. 2 (6ª edição)*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.

[21] Lima, E. (2017). *Curso de Análise vol. 1 (14ª edição)*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.

[22] Lima, E. (2015). *Curso de Análise vol. 2 (11ª edição)*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.

[23] Martínez, C. y Sanz, M. (1992). *Análisis de una Variable Real (1ª edición)*. Barcelona, España: Reverté.

[24] Pita, C. (1991). *Álgebra Lineal (1ª edición)*. D.F, México: Mc Graw – Hill.

[25] Prieto, C. (2005). *Topología Básica (2ª reimpresión)*. D.F., México: Fondo de Cultura Económica.

[26] Toribio, M. y Medina, R. (2009). *Cálculo Diferencial con aplicaciones (1ª edición)*. Lima, Perú: UNI.

[27] Tezoto, L. (2014). *Sobre o Teorema da Função Inversa.* Universida de Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São Paulo, Brasil. Recuperado de: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/124069/000832268.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[28] Villanueva. (2010). *Teorema de la Función Inversa para Aplicaciones Multivaluadas.* Universidad Nacional De Ingeniería. Lima, Perú. Recuperado de: http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/324/1/villanueva_sf.pdf