



Universidad Nacional
SAN LUIS GONZAGA



Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

Esta licencia es la más restrictiva de las seis licencias principales Creative Commons, permitiendo a otras solo descargar sus obras y compartirlas con otras siempre y cuando den crédito, pero no pueden cambiarlas de forma alguna ni usarlas de forma comercial.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0>



UNIVERSIDAD NACIONAL SAN LUIS GONZAGA
EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

CONSTANCIA

El que suscribe, deja constancia que se ha realizado el análisis con el software de verificación de similitud al documento cuyo título es:

**“POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE LA REPRESENTACIÓN MATRICIAL
DE OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA”**

Presentado por:

CONTRERAS TORRES, YANET ELVIRA

Egresado del nivel **Pregrado** de la Facultad de Ciencias. El resultado obtenido es el **11% de Similitud**, por el cual se otorga el calificativo de:

APROBADO, según Reglamento de Evaluación de la Originalidad

Se adjunta al presente el reporte de evaluación con el software de verificación de originalidad.

Ica, 27 de marzo del 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN LUIS GONZAGA
FACULTAD DE CIENCIAS
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN



[Firma manuscrita]
Dr. JORGE LUIS DE LA CRUZ TORRES
DIRECTOR(a)

UNIVERSIDAD NACIONAL “SAN LUIS GONZAGA”

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

Facultad de Ciencias



“Polinomio característico de la representación matricial de operadores lineales en espacios de dimensión finita”

Línea de Investigación

Ciencias Naturales, Ingeniería y Tecnologías Sostenibles

TESIS

BACH: CONTRERAS TORRES, YANET ELVIRA

Ica - Perú

2024

DEDICATORIA

Dedicado a mi padre celestial, por su amor incondicional por ser mi fuente de inspiración y motivación constante en todo este proceso de la tesis, solo gracias a él lo he concluido y por permitirme darme salud y por su infinita misericordia.

A mi madre Martina por sus oraciones, y apoyo constante que hicieron posible lograr mis objetivos. También a todos mis hermanos que creyeron en mí.

AGRADECIMIENTO

Agradecer a la Dra. Merly Liliana Yataco Bernaola, por su asesoramiento, dedicación y su apoyo incondicional en el desarrollo de la tesis.

A la Escuela Profesional de Matemática e Informática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional San Luis Gonzaga, por brindar una excelente formación académica a todos los alumnos sin excepción, para todos ellos mi agradecimiento eterno.

ÍNDICE

RESUMEN

ABSTRACT

| | |
|----------------------------------------|-----------|
| I. INTRODUCCIÓN | 7 |
| II. ESTRATEGIAS METODOLOGICAS | 8 |
| III. RESULTADOS | 9 |
| IV. DISCUSIÓN | 58 |
| V. CONCLUSIONES | 59 |
| VI. RECOMENDACIONES | 60 |
| VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 61 |
| VIII. ANEXOS | 62 |

RESUMEN

El trabajo de investigación se inicia con algunos aspectos básicos del álgebra lineal, curso que se dicta en la Facultad de Ciencias donde he culminado mis estudios de pregrado. Los temas que sea tomado para el trabajo se enumeran en el siguiente orden. Primero, inicio con la definición de espacio vectorial y se demuestran algunas propiedades importantes. Luego se define una transformación lineal de un espacio vectorial a otro, generalmente un espacio vectorial diferentes, pero sobre el mismo campo. Cuando una transformación lineal se define sobre dos espacios vectoriales iguales, hablamos de operadores lineales. Defino la representación matricial de una transformación lineal por ende de un operador lineal, esta representación matricial la usaremos en este trabajo de tesis. Para estas matrices que son las representaciones matriciales definimos el valor y vector propio, luego entramos a los polinomios característicos, a la semejanza de matrices y sus propiedades en particular que las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Finalmente se estudiará algunos métodos iterativos para el cálculo del polinomio característico de una matriz. Los métodos estudiados son en este orden:

-Método de Danilevsky.

-Método de Krylov

-Método de Le verrier

Se dan algunos ejemplos de aplicación de estos métodos.

Se deja la tarea de otra investigación para estudiar o implementar un software para ejecutar estos métodos en la computadora.

Palabra claves. Operador lineal; representación matricial; polinomio característico; valores propios.

ABSTRACT

The research work begins with some basic aspects of linear algebra, a course that is taught at the Faculty of Sciences where I have completed my undergraduate studies. The topics that have been taken up for the work are listed in the following order. First, we start with the definition of a vector space and demonstrate some important properties. Then a linear transformation is defined from one vector space to another, generally a different vector spaces, but over the same field. When a linear transformation is defined on two equal vector spaces, we speak of linear operators. I define the matrix representation of a linear transformation therefore of a linear operator, we will use this matrix representation in this thesis work. For these matrices, which are the matrix representations, we define the value and eigenvector, then we enter the characteristic polynomials, the similarity of matrices and their properties, in particular that similar matrices have the same characteristic polynomial.

Finally, some iterative methods for calculating the characteristic polynomial of a matrix will be studied. The methods studied are in this order:

- Danilevsky method
- Krylov method
- Le verrier method

Some examples of application of these methods are given.

The task of another investigation is left to study or implement software to execute these methods on the computer.

Keywords. Linear operator; its matrix representation; characteristic polynomial; Own values

I. INTRODUCCIÓN

En el estudio del cálculo matricial se enuncian diferentes definiciones tales como las operaciones entre matrices, los tipos de matrices, las matrices cuadradas. En estas matrices cuadradas que pueden ser las representaciones matriciales de ciertas transformaciones lineales (en este caso operadores lineales) se definen el determinante de una matriz, matrices inversas, en general no todas las matrices cuadradas tienen inversa. En estas matrices cuadradas se define el valor y vector propio, y para el cálculo de los valores propios es de mucha utilidad el concepto de determinante de una matriz.

El concepto de determinante de una matriz es de mucha utilidad para el cálculo de los valores propios, sin embargo, este método es en la mayoría de veces muy tedioso y muy complicado, para evitar estos cálculos difíciles, se hace este trabajo de investigación titulado “Polinomio característico de la representación matricial de operadores lineales en espacios de dimensión finita”. Se estudian tres métodos de cálculo de los coeficientes del polinomio característico: para cada método se deduce los pasos requeridos y se llega a la solución deseada. Con esto llegamos a concluir con los objetivos de la investigación planteada.

II. ESTRATEGIA METODOLÓGICA

2.1. Tipo y diseño de la investigación.

2.1.1. Tipo de investigación.

Es de tipo básico, en esta investigación no se hace uso de métodos estadísticos.

2.1.2. Diseño de investigación

El diseño es Descriptivo – comparativo.

2.2. Técnicas e instrumentos de recolección de la información.

2.2.1. Técnicas de recolección de la información.

Utilice la documentación para cada una de las variables consideradas en la investigación y así poder obtener la información de datos como la teoría y propiedades de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales. Todo esto ayudará a construir las estrategias metodológicas para obtener los resultados en esta investigación

2.2.2. Instrumentos de recolección de datos.

Para cumplir con los objetivos, probar las hipótesis planteadas, usaremos:

- Instrumento documental: Bibliotecas especializadas en matemáticas donde se encuentren los libros de Análisis Matemático, Teoría de la Medida e Integración.
- Instrumentos mecánicos como una Laptop implementada con internet para descargar los libros con los datos requeridos. Una impresora para recolectar y ordenar los datos.

2.2.3. Análisis e interpretación de los resultados.

Los datos que se obtengan, tales como los teoremas y propiedades serán analizadas y probadas para su validez.

Para la comprobación de los resultados se estudiarán algunas propiedades básicas de la teoría de integración y producto de espacios medibles.

III. RESULTADOS

3.1. CONCEPTOS BASICOS

3.1.1. Espacio Vectorial.

Definición 1. Sea G un conjunto no vacío, donde está definida una operación binaria " $*$ ". Decimos que el par $(G, *)$ es un grupo si se cumple

1. $a * b \in G; \forall a, b \in G$ (cerradura)
2. $a * (b * c) = (a * b) * c; a, b, c \in G$ (Ley asociativa)
3. $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a; a \in G$ (existencia del elemento identidad en G)
4. $\forall a \in G, \exists a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$ (elemento inverso en G)

Nota. Si en el grupo $(G, *)$ se verifica que $a * b = b * a$, decimos que el grupo $(G, *)$ es un grupo abeliano [1].

Definición 2. (Campo o cuerpo). Sea K un conjunto no vacío y dos operaciones (binarias) \oplus y $*$, definidas en K . Decimos que $(K, \oplus, *)$ es un campo si se cumple los siguientes axiomas $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ [2].

- $A_1: a \oplus b \in K$ Ley de la cerradura.
- $A_2: a \oplus b = b \oplus a$ Ley conmutativa.
- $A_3: a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ Ley asociativa.
- $A_4: \exists \theta \in K / a \oplus \theta = a, \forall a \in K$ Elemento cero con respecto a \oplus
- $A_5: \text{Para cada } a \in K, \exists a' \in K / a \oplus a' = \theta$ Elemento inverso
- $M_1: a * b \in K$ Ley de la cerradura.
- $M_2: a * b = b * a$ Ley conmutativa.
- $M_3: a * (b * c) = (a * b) * c$ Ley asociativa.

$M_4: \exists e \in K / a * e = a, \forall a \in K$ Elemento cero con respecto a *

$M_5: \text{Para cada } a \in K, a \neq \theta, \exists a^{-1} \in K / a * a^{-1} = e$ Elemento inverso

$D_1: a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$ Ley distributiva.

Nota: Las propiedades de A_1 hasta A_5 afirman que (K, \oplus) es un grupo abeliano.

Las propiedades de M_1 hasta M_5 afirman que $(K - \{\theta\}, *)$ es un grupo abeliano.

Definición 3. Sea el campo $(K, \oplus, *)$ y e el elemento unitario de K :

1. Si $n \cdot e = e \oplus e \oplus e \oplus \dots \oplus e \neq \theta$ (n-veces), para todo n entero positivo, se dice que el campo K es de característica cero.
2. Si $n \cdot e = e \oplus e \oplus e \oplus \dots \oplus e = \theta$ para algún n y si m es el menor entero positivo tal que $m \cdot e = e \oplus e \oplus e \oplus \dots \oplus e = \theta$ (m-veces), se dice que el campo K es de característica m [2].

Definición 4. Se llama subcampo de un campo $(K, \oplus, *)$ a toda $L \neq \phi, L \subset K$ estable respecto a las leyes de K y tal que la estructura inducida sobre L por estas leyes sea una estructura de campo.

Equivalentemente: Sea $(K, \oplus, *)$ un campo, el subconjunto no vacío L es subcampo de K si $(L, \oplus, *)$ es un campo [2].

Definición 5. Un espacio vectorial V sobre un campo K es un conjunto no vacío de elementos llamados vectores con dos leyes de combinación (operaciones) llamadas adición vectorial (o adición) y multiplicación por escalar que satisface las siguientes condiciones: [3].

Primero para la adición "+" satisface

$$A_1: v_1 + v_2 \in V; \forall v_1, v_2 \in V$$

$$A_2: v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

$$A_3: (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

$A_4 : \exists \mathbf{0} \in V : \mathbf{0} + v = v; \forall v \in V$ (elemento cero)

$A_5 : \text{Para cada } v \in V, \exists -v \in V : v + (-v) = \mathbf{0}$ (elemento inverso para la adición)

Segundo: para la operación “ \cdot ”

$M_1 : r \cdot v_1 \in V; \forall r \in K : \forall v \in V$

$M_2 : r \cdot (v_1 + v_2) = r \cdot v_1 + r \cdot v_2 \forall r \in K : \forall v_1, v_2 \in V$

$M_3 : (r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v \forall r, s \in K : \forall v \in V$

$M_4 : (r \cdot s) \cdot v = r \cdot (s \cdot v)$

$M_5 : 1 \cdot v = v$, donde $1 \in K$ (es el elemento unidad)

Definición 6. (Combinación lineal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y

v_1, v_2, \dots, v_n vectores en V , entonces

$$\sum_{i=1}^n r_i v_i = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n$$

es una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n , donde $r_i \in K$ [3].

Definición 7. Si V es un espacio vectorial sobre K y si v_1, v_2, \dots, v_n son vectores en V ,

decimos que tales vectores son linealmente dependientes (L.D.) sobre K , si existen

elementos r_1, r_2, \dots, r_n en K no todos ceros tales que

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n = \bar{\mathbf{0}} \quad (\bar{\mathbf{0}} \in V, \text{ vector nulo})$$

Si los vectores v_1, v_2, \dots, v_n no son LD sobre K , se dice que son linealmente independientes (L.I.) sobre K .

Teorema 1. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, entonces solo puede suceder uno de los dos casos

1. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente
2. Alguno de los v_i es combinación lineal de los anteriores.

Demostración:

Solo puede suceder que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente o es linealmente dependiente.

1. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, no hay nada que probar.
2. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente, entonces en

$$r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_2 + \dots + r_n \cdot v_n = \bar{0},$$

existen escalares $r_j \neq 0$ para algún j .

Ordenando todos los escalares r_j que son no nulos, tenemos

$$s_1 \cdot v_1^1 + s_2 \cdot v_2^1 + \dots + s_k \cdot v_k^1 + s_{k+1} v_{k+1}^1 + \dots + s_n v_n^1 = \bar{0}$$

Donde $s_i : i = 1, 2, \dots, k$ son no nulos y $s_i : i = k + 1, k + 2, \dots, n$ son nulos.

Entonces

$$v_k^1 = \frac{-1}{s_k} (s_1 v_1^1 + s_2 v_2^1 + \dots + s_{k-1} v_{k-1}^1)$$

Definición 8. Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V . El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S se llama conjunto generado por S y se denota por

$Sp(S) = \langle S \rangle =$ conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S

Definición 9. Un subespacio W de un espacio vectorial V es un subconjunto no vacío de V que es asimismo un espacio vectorial con respecto a las operaciones de adición y multiplicación por escalar definidas en V [3].

3.1.2. Transformaciones Lineales.

Definición 10. Sean U y V dos espacios vectoriales, una función $T: U \rightarrow V$, se llama transformación lineal en U y V si tiene las propiedades siguientes [4]:

- i) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta); \forall \alpha, \beta \in U$
- ii) $T(k\alpha) = kT(\alpha); \forall \alpha \in U, \forall k \in \mathbb{K}$

esto significa que T conserva la adición y la multiplicación por escalar.

Las dos propiedades i) y ii) pueden combinarse en una sola

$$T(r\alpha + s\beta) = rT(\alpha) + sT(\beta), \forall \alpha, \beta \in U, \forall r, s \in \mathbb{K}$$

Ejemplo 1.

- a) Transformación idéntica: $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, definida por $T(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{V}$, se denota por $I_{\mathbb{V}}$.

Pues:

$$T(\alpha + \beta) = \alpha + \beta = T(\alpha) + T(\beta)$$

$$T(k\alpha) = k\alpha = kT(\alpha)$$

- b) Transformación cero: $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definida por $T(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{V}$, se denota por $0_{\mathbb{V}}$

Pues:

$$T(\alpha + \beta) = 0 = 0 + 0 = T(\alpha) + T(\beta)$$

$$T(k\alpha) = 0 = k(0) = kT(\alpha)$$

- c) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y, 3y - 4z), \forall \alpha = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

es una transformación lineal.

Pues: Sea $\alpha = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ y $\beta = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha + \beta = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3$$

Primero:

$$T(\alpha + \beta) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$T(\alpha + \beta) = (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 3(y_1 + y_2) - 4(z_1 + z_2))$$

$$T(\alpha + \beta) = (2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2, 3y_1 + 3y_2 - 4z_1 - 4z_2)$$

$$T(\alpha + \beta) = (2x_1 + y_1, 3y_1 - 4z_1) + (2x_2 + y_2, 3y_2 - 4z_2)$$

$$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$$

Segundo:

$$T(k\alpha) = T(kx_1, ky_1, kz_1)$$

$$T(k\alpha) = (2(kx_1) + (ky_1), 3(ky_1) - 4(kz_1))$$

$$T(k\alpha) = k(2x_1 + y_1, 3y_1 - 4z_1)$$

$$T(k\alpha) = kT(\alpha)$$

- d) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x, x + y, x - y)$, $\forall \alpha = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, es una transformación lineal.

La verificación es similar al ejemplo c)

Definición 11. Una transformación lineal $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ es uno a uno (o inyectiva) si:

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ implica que } T(\alpha_1) \neq T(\alpha_2)$$

En forma equivalente:

$$T(\alpha_1) = T(\alpha_2) \text{ implica que } \alpha_1 = \alpha_2$$

Ejemplo 2.

- 1) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$ es uno a uno.

En efecto: Sea $\alpha_1 = (x_1, y_1)$ y $\alpha_2 = (x_2, y_2)$

Entonces:

$$T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$$

$$\Rightarrow T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$$

$$\Rightarrow (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

2. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ (proyección) no es uno a uno.

Pues:

$$T(x, y, a) = T(x, y, b) = (x, y, 0)$$

Sin embargo: $(x, y, a) \neq (x, y, b)$, para $a \neq b$

Nota:

- 1) Si T es univalente diremos que T es no singular.
- 2) Se cumple para $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ una aplicación lineal que $T(0_1) = 0_2$

$$3) \quad T(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = T((\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3)$$

En general por inducción sobre n,

$$T(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) + \dots + T(\alpha_n), \text{ o}$$

$$\text{En forma abreviada: } T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n T(\alpha_i)$$

$$4) \quad T(\alpha_1 - \alpha_2) = T(\alpha_1 + (-\alpha_2))$$

$$5) \quad \text{El subconjunto de } \mathbb{V}_1: T^{-1}(0_2) = \{\alpha \in \mathbb{V}_1; T(\alpha) = 0_2\}$$

Es un subespacio vectorial de \mathbb{V}_1 llamado el subespacio nulo de T y se denota por $T^{-1}(0_2) = N(T)$ (núcleo de T o Kernel de T).

$$6) \quad \text{El subconjunto de } \mathbb{V}_2: T(\mathbb{V}_1) = \{T(\alpha); \alpha \in \mathbb{V}_1\}, \text{ es un subespacio de } \mathbb{V}_2$$

llamada la imagen de T.

Definición 12. Una transformación lineal $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ es suryectivo (o sobreyectivo), si

$$T(\mathbb{V}_1) = \mathbb{V}_2$$

Teorema 2: Sea $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ una aplicación lineal. Entonces T es inyectivo si y solo si

$$N(T) = \{0_1\}$$

NOTA:

1. La dimensión del núcleo de T si existe la llamaremos nulidad de T.

$$\text{Denotamos por } \dim(N(T)) = \eta(T) = \eta.$$

2. La dimensión del subespacio $T(\mathbb{V}_1)$ la llamaremos rango de T. Denotaremos por $\dim(T(\mathbb{V}_1)) = r(T) = r$

Definición 13. Sean $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ espacios vectoriales sobre el campo \mathbb{K} , una aplicación lineal $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ se llama isomorfismo lineal si es que T es inyectivo.

Si existe un isomorfismo lineal $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ se dice que \mathbb{V}_1 y \mathbb{V}_2 son linealmente isomorfos [5].

3.1.3. Matriz asociada a una transformación lineal.

Primero: Consideremos un caso especial: $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ una aplicación lineal.

Se prueba que existe un vector A en \mathbb{K}^m tal que $T(x) = Ax$.

Segundo: Sea Ahora $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ una aplicación lineal del espacio vectorial \mathbb{K}^n sobre el espacio vectorial \mathbb{K}^m .

Sean e_1, e_2, \dots, e_n los vectores columna unitarios en \mathbb{K}^n y sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ los vectores columna unitarios en \mathbb{K}^m , se tiene que $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, donde x_j es la componente j de x .

$$\Rightarrow T(x) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \dots + x_n T(e_n)$$

También:

$$T(e_1) = a_{11} \varepsilon_1 + a_{21} \varepsilon_2 + \dots + a_{m1} \varepsilon_m$$

$$T(e_2) = a_{12} \varepsilon_1 + a_{22} \varepsilon_2 + \dots + a_{m2} \varepsilon_m$$

$$T(e_n) = a_{1n} \varepsilon_1 + a_{2n} \varepsilon_2 + \dots + a_{mn} \varepsilon_m$$

En términos de los vectores columna

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(e_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\Rightarrow T(x) = x_1 (a_{11} \varepsilon_1 + a_{21} \varepsilon_2 + \dots + a_{m1} \varepsilon_m) + \dots + x_n (a_{1n} \varepsilon_1 + a_{2n} \varepsilon_2 + \dots + a_{mn} \varepsilon_m)$$

$$\Rightarrow T(x) = (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n) \varepsilon_1 + \dots + (a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n) \varepsilon_m$$

En consecuencia se hacemos: $A = [a_{ij}]$, entonces se ve que

$$T(x) = Ax$$

Desarrollada completamente, esta expresión tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Así T es una aplicación lineal asociada a la matriz A . También designamos a A como la matriz asociada con la aplicación lineal T . Esta matriz es única.

$$T(x) = Ax.$$

Tercero: Sea $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ una aplicación lineal y $\dim(\mathbb{V}_1) = n$, $\dim(\mathbb{V}_2) = m$ y las

bases (fijas y ordenadas) $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ y $B' = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ de \mathbb{V}_1 y \mathbb{V}_2

Para $\alpha_j \in \mathbb{V}_1$, $T(\alpha_j) \in \mathbb{V}_2$

$$T(\alpha_1) = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \dots + a_{m1}\beta_m$$

$$T(\alpha_2) = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \dots + a_{m2}\beta_m$$

.....

$$T(\alpha_n) = a_{1n}\beta_1 + a_{2n}\beta_2 + \dots + a_{mn}\beta_m$$

O

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\beta_i$$

Definimos la traspuesta de la matriz A de los coeficientes como la representación matricial de T en las bases B y B' [5].

Notación:

$$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Ejemplo 3. Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z, u) = (x - y + z + u, x + 2z - u, x + y + 3z - 3u)$$

Consideremos las bases

$$B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^4$$

$$B' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

$$T(e_1) = T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1) = 1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3$$

$$T(e_2) = T(0,1,0,0) = (-1,0,1) = -1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3$$

$$T(e_3) = T(0,0,1,0) = (1,2,3) = 1\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$$

$$T(e_4) = T(0,0,0,1) = (1,-1,-3) = 1\varepsilon_1 - 1\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3$$

$$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

Ejemplo 4. Para el ejemplo anterior, consideramos la misma transformación lineal y sean

$$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^4$$

$$B' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

$$T(\alpha_1) = T(1,1,1,1) = (2,2,2) = 2\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3$$

$$T(\alpha_2) = T(0,1,1,1) = (1,1,1) = 1\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3$$

$$T(\alpha_3) = T(0,0,1,1) = (2,1,0) = 2\beta_1 - 1\beta_2 - 1\beta_3$$

$$T(\alpha_4) = T(0,0,0,1) = (1,-1,-3) = 1\beta_1 - 2\beta_2 - 2\beta_3$$

$$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

Ejemplo 5. Sea $\mathbb{V} = \{c_0 + c_1x + c_2x^2 : c_i \in \mathbb{R}\}$

Sea $D: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definida por $D(p) = p'$, $\forall p \in \mathbb{V}$ y $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ una base de

\mathbb{V} .

$$D(1) = 0 = 0(1) + 0(x) + 0(x^2) + 0(x^3)$$

$$D(x) = 1 = 1(1) + 0(x) + 0(x^2) + 0(x^3)$$

$$D(x^2) = 2x = 0(1) + 2(x) + 0(x^2) + 0(x^3)$$

$$D(x^3) = 3x^2 = 0(1) + 0(x) + 3(x^2) + 0(x^3)$$

$$\text{Entonces: } [D]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Definición 14. Una transformación lineal $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$, donde $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2$, se llama OPERADOR LINEAL [6].

Teorema 2. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ una base de

\mathbb{V} y $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ un operador. Entonces $\forall v \in \mathbb{V}$ se cumple:

$$[T]_B [v]_B = [T(v)]_B$$

Demostración:

$$\forall v \in \mathbb{V}, v = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \dots + r_n\alpha_n \Rightarrow [\alpha]_B = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

$$T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n$$

$$T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n$$

.....

$$T(\alpha_n) = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n$$

$$\text{En } v = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \dots + r_n\alpha_n$$

$$T(v) = r_1T(\alpha_1) + r_2T(\alpha_2) + \dots + r_nT(\alpha_n)$$

$$T(v) = r_1(a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n) + r_2(a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n) + \dots$$

$$r_n(a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n)$$

$$T(v) = (r_1a_{11} + r_2a_{12} + \dots + r_na_{1n})\alpha_1 + (r_1a_{21} + r_2a_{22} + \dots + r_na_{2n})\alpha_2 + \dots$$

$$(r_1a_{n1} + r_2a_{n2} + \dots + r_na_{nn})\alpha_n$$

$$\Rightarrow [T(\alpha)]_B = \begin{bmatrix} r_1 a_{11} + r_2 a_{12} + \dots + r_n a_{1n} \\ r_1 a_{21} + r_2 a_{22} + \dots + r_n a_{2n} \\ \vdots \\ r_1 a_{n1} + r_2 a_{n2} + \dots + r_n a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(\alpha)]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(\alpha)]_B = [T]_B [\alpha]_B$$

En general el teorema es válido para $T: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, A base de \mathbb{U} y B base de \mathbb{V}

Se cumple:

$$[T(\alpha)]_B = [T]_B^A [\alpha]_A$$

Teorema 4. Sea $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ una base ordenada de \mathbb{V} sobre \mathbb{K} y sea $M(n, n)$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n (con elementos en \mathbb{K}).

Entonces la aplicación $\varphi: Hom(V, V) \rightarrow M(n, n)$ definida por $\varphi(T) = [T]_B$ es un isomorfismo y para cualquier $S, T \in Hom(V, V)$ y para cualquier $r \in \mathbb{K}$

$$[T + S]_B = [T]_B + [S]_B$$

$$[rT]_B = r[T]_B$$

Demostración:

i) φ es uno a uno

$$\text{Debemos mostrar que: } \varphi(T) = \varphi(S) \Rightarrow [T]_B = [S]_B$$

En efecto:

$$T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n = S(\alpha_1)$$

$$T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n = S(\alpha_2)$$

....

$$T(\alpha_n) = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n = S(\alpha_n)$$

Por lo tanto: $T = S$

ii) φ es sobre

$$\text{Para cada matriz } A \in M(n, n), \text{ existe } T \in Hom(V, V) \text{ tal que } [T]_B = A^T$$

Luego: φ es sobre.

Por lo tanto φ es un isomorfismo.

Veamos que:

$$[T + S]_B = [T]_B + [S]_B$$

$$[rT]_B = r[T]_B$$

Primero:

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j; i = 1, 2, \dots, n$$

$$S(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} \alpha_j; i = 1, 2, \dots, n$$

$$A = [a_{ij}] \text{ y } B = [b_{ij}]. \text{ Entonces } [T]_B = A^T \text{ y } [S]_B = B^T$$

También:

$$[T + S](\alpha_i) = T(\alpha_i) + S(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) \alpha_j$$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$\Rightarrow [T + S]_B = (A + B)^T = A^T + B^T = [T]_B + [S]_B$$

Segundo:

En forma análoga

$$(rT)(\alpha_i) = rT(\alpha_i)$$

$$(rT)(\alpha_i) = r \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j$$

$$(rT)(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n (ra_{ij}) \alpha_j; i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow rA = [ra_{ij}]$$

$$\Rightarrow [rT]_B = (rA)^T = rA^T = r[T]_B$$

Teorema 5. Para cualesquiera $S, T \in \text{Hom}(V, V)$ se cumple: $[ST]_B = [S]_B [T]_B$

Demostración:

$$\text{Tenemos: } T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j; S(\alpha_j) = \sum_{k=1}^n b_{jk} \alpha_k$$

$$A = [a_{ij}], B = [b_{jk}]. \text{ Luego: } [T]_B = A^T \text{ y } [S]_B = B^T$$

Tenemos:

$$(ST)(\alpha_i) = S(T(\alpha_i)) = S\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j\right) = \sum_{j=1}^n a_{ij}S(\alpha_j)$$

$$\Rightarrow (ST)(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\left(\sum_{k=1}^n b_{jk}\alpha_k\right)$$

$$\Rightarrow (ST)(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ij}b_{jk}\right)\alpha_k$$

$$\text{Pero: } AB = [c_{ik}] / c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$$

$$[ST]_B = (AB)^T = B^T A^T = [S]_B [T]_B$$

3.1.4. VALORES PROPIOS

Definición 15. Sea T un operador lineal de un espacio vectorial \mathbb{V} en si mismo, es decir $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, el número real λ se dice que es un **valor propio** (o un **eigen valor** o **valor característico**) de T si existe un vector $v \neq 0$ tal que:

$$Tv = \lambda v, [7], [8].$$

Ejemplo 6. Para el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por

$$T(x, y) = (4x + 2y, -x + y)$$

Calcular los valores y vectores propios.

Resolución:

Por definición: $Tv = \lambda v$, para todo $v = (x, y)$ en \mathbb{R}^2

$$(4x + 2y, -x + y) = \lambda(x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = \lambda x \dots(1) \\ -x + y = \lambda y \dots(2) \end{cases}$$

Despejamos y de la ecuación (1)

$$2y = \lambda x - 4x \Rightarrow y = \frac{\lambda x}{2} - 2x \dots (3)$$

Sustituimos (3) en (2)

$$-x + \left(\frac{\lambda x}{2} - 2x\right) = \lambda \left(\frac{\lambda x}{2} - 2x\right)$$

$$\Rightarrow -2x + \lambda x - 4x = \lambda^2 x - 4\lambda x$$

$$\Rightarrow \lambda^2 x - 5\lambda x + 6x = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 3$, son dos valores propios.

Calculamos los vectores propios:

Usando la ecuación 3: $y = \frac{\lambda x}{2} - 2x$

Para el valor propio: $\lambda = 2$, tenemos

$$y = x - 2x \Rightarrow y = -x, \text{ esto es v\u00e1lido para cualquier valor } x \neq 0$$

Para $x = 1, y = -1$, tenemos el vector propio $v = (1, -1)$. Todos los m\u00faltiplos de este vector, tambi\u00e9n es un vector propio.

Para el valor propio: $\lambda = 3$, tenemos

$$y = \frac{3}{2}x - 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x.$$

Para $x = 2, y = -1$, tenemos el vector propio $v = (2, -1)$. Todos los m\u00faltiplos de este vector, tambi\u00e9n es un vector propio.

En conclusi\u00f3n: los valores y vectores propios del operador lineal son

$$\lambda_1 = 2 \text{ y } v_1 = (1, -1)$$

$$\lambda_2 = 3 \text{ y } v_2 = (2, -1)$$

Ejemplo 7. Para el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por

$$T(x, y) = (4x + 2y, -x + y)$$

Calcular los valores y vectores propios.

Resoluci\u00f3n:

Por definici\u00f3n: $Tv = \lambda v$, para todo $v = (x, y)$ en \mathbb{R}^2

$$(4x + 2y, -x + y) = \lambda(x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = \lambda x \dots(1) \\ -x + y = \lambda y \dots(2) \end{cases}$$

Otro método es utilizar la representación matricial del operador lineal.

Tenemos la siguiente definición:

Definición 16. Sea A una matriz cuadrada de orden n , un número real λ se dice que es un **valor propio** (o un **eigen valor** o **valor característico**) de A si existe un vector $x \neq 0$ tal que:

$$Ax = \lambda x$$

es decir, x es un vector que al transformarlo mediante la multiplicación por A el vector resultante mantiene su dirección, posiblemente solo su longitud y/o sentido se modifique. El vector x se llama vector propio o eigen vector asociado al valor propio λ [9].

El conjunto de todos los valores propios de la matriz A se llama el espectro de A y se denota por $\sigma(A)$.

Ejemplo 8. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Se tiene:

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3x_1,$$

x_1 es vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_1 = 3$.

También

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1x_2,$$

x_2 es vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$.

En cambio

$$Ax_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

x_3 no es vector propio de A .

DETERMINACION DE LOS VALORES PROPIOS:

Sea λ_0 un valor propio de A , si existe un vector $x_0 \neq 0$ tal que:

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0$$

$$Ax_0 = \lambda_0 I_n x_0$$

$$(A - \lambda_0 I) x_0 = 0$$

Si: $B = (A - \lambda_0 I_n)$ lo anterior significa que el sistema homogéneo $n \times n$, $Bx = 0$

tiene además de la solución trivial otra solución ($x = x_0 \neq 0$). Por consiguiente, no

tiene solución única. Y por tanto, el determinante de la matriz B debe ser cero:

$$\det(B) = \det(A - \lambda_0 I_n) = 0$$

Resumiendo:

Todo valor propio λ_0 debe ser raíz del polinomio característico asociado a A .

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ y un vector propio asociado al valor propio λ debe ser

solución del sistema homogéneo.

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

De los cursos básicos de algebra es importante recordar el teorema del factor.

Ejemplo 9. Determinar los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

Resolución:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$$

$$p_A(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$p_A(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + (2)(1)(3) + (3)(2)(2)$$

$$- [(3)(3-\lambda)(3) + (2)(1)(1-\lambda) + (1-\lambda)(2)(2)]$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 6 + 12 - [9(3-\lambda) + 2(1-\lambda) + 4(1-\lambda)]$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 + 18 - 9(3-\lambda) - 6(1-\lambda)$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 21 - 27 + 9\lambda - 6 + 6\lambda$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda - 12$$

$$p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-6)$$

Valores propios: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 6$ (enteros)

Calculo de los vectores propios:

Para $\lambda_1 = 1$, se resuelve: $(A - \lambda_1 I)X = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Se encuentra el vector } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2/3 \\ x_2 \\ -2x_2/3 \end{bmatrix} = \frac{x_2}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Se escoge como el primer vector propio: } X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -2$, se resuelve: $(A - \lambda_2 I)X = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Se encuentra el vector

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13x_2/3 \\ x_2 \\ 11x_2/3 \end{bmatrix} = -\frac{x_2}{3} \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Se escoge como el segundo vector propio: $X_2 = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \\ -11 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_3 = 6$ (valor propio dominante), se resuelve: $(A - \lambda_3 I)X = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Se encuentra el vector

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se escoge como el tercer vector propio: $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Se forma la matriz $P = [X_1 \quad X_2 \quad X_3] = \begin{bmatrix} -2 & 13 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & -11 & 1 \end{bmatrix}$

La inversa de P : $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 13 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & -11 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/15 & 1/5 & -2/15 \\ 1/24 & 0 & -1/24 \\ 13/40 & 2/5 & 11/40 \end{bmatrix}$

Luego:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1/15 & 1/5 & -2/15 \\ 1/24 & 0 & -1/24 \\ 13/40 & 2/5 & 11/40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 13 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & -11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10. Determinar los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

Resolución:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 - 39\lambda^2 - 16\lambda + 60$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda - 10)$$

Valores propios: $\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -2$; $\lambda_4 = -3$

Calculo de los vectores propios:

Para $\lambda_1 = 10$, se resuelve: $(A - \lambda_1 I)X = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -9 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$\text{El vector } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Se escoge como el primer vector propio: } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 1$, se resuelve: $(A - \lambda_2 I)X = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_4 \\ x_2 = -8x_4 \\ x_3 = 4x_4 \end{cases}$$

$$\text{El vector } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_4 \\ -8x_4 \\ 4x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se escoge como el segundo vector propio: $X_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_3 = -2$, se resuelve: $(A + 2I)X = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 & 9/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_4/7 \\ x_2 = -5x_4/7 \\ x_3 = -9x_4/7 \end{cases}$$

El vector $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_4/7 \\ -5x_4/7 \\ -9x_4/7 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}$

Se escoge como el tercer vector propio: $X_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_4 = -3$, se resuelve: $(A + 3I)X = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_4/9 \\ x_2 = -4x_4/9 \\ x_3 = -4x_4/9 \end{cases}$$

$$\text{El vector } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_4/9 \\ -4x_4/9 \\ -4x_4/9 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{-1}{9} x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Se escoge como el tercer vector propio: } X_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Se forma la matriz } P = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -9 & 4 \\ 1 & 1 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Se calcula: } P^{-1} = \begin{bmatrix} 119/468 & 10/39 & 85/468 & 4/13 \\ 1/36 & -1/12 & 1/18 & 0 \\ 1/12 & 0 & -1/12 & 0 \\ 5/12 & 1/52 & -1/26 & -1/13 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 119/468 & 10/39 & 85/468 & 4/13 \\ 1/36 & -1/12 & 1/18 & 0 \\ 1/12 & 0 & -1/12 & 0 \\ 5/12 & 1/52 & -1/26 & -1/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -9 & 4 \\ 1 & 1 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Teorema 6. Sea $p(x)$ un polinomio. Un número c es raíz del polinomio $p(x)$, es decir $p(c) = 0$ si y sólo si $(x - c)$ divide a $p(x)$. Es decir, al hacer la división de $p(x)$ entre $(x - c)$ el residuo es cero. Luego: $p(x) = (x - c)q(x)$.

Definición 17. (Multiplicidad algebraica de un valor propio). Sea A una matriz cuadrada y λ_0 un valor propio. Como hemos visto λ debe ser raíz del polinomio característico de A , $p_A(\lambda)$, así: $(\lambda - \lambda_0)$ divide a $p_A(\lambda)$. Al mayor exponente m que cumple:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda)$$

le llamaremos **multiplicidad algebraica** de λ_0 .

Ejemplo 11. Para la transformación $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene que $A = [T]_{e_i}$, es

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 7 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Determine la multiplicidad algebraica de cada uno de los valores propios.

Resolución:

Tenemos que:

$$p(\lambda) = \text{Det}[A - \lambda I] = \text{Det} \left(\begin{bmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 7 & -5 & -4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$p(\lambda) = \text{Det} \begin{bmatrix} 5-\lambda & -5 & -2 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ 7 & -5 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (5-\lambda)[(-2-\lambda)(-4-\lambda)+15] + 5[(-3)(-4-\lambda)-21] + (-2)[15-7(-2-\lambda)]$$

$$p(\lambda) = (5-\lambda)[(\lambda^2 + 6\lambda + 8) + 15] + 5(3\lambda + 12 - 21) - 2(15 + 14 + 7\lambda)$$

$$p(\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 23) + 5(3\lambda - 9) - 2(29 + 7\lambda)$$

$$p(\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 23) + 15\lambda - 45 - 58 - 14\lambda$$

$$p(\lambda) = 5\lambda^2 + 30\lambda + 115 - \lambda^3 - 6\lambda^2 - 23\lambda + \lambda - 103$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda + 12 = (3-\lambda)(\lambda+2)^2$$

Luego: $\lambda_1 = 3$ (multiplicidad 1) y $\lambda_2 = -2$ (multiplicidad 2)

Ejemplo 12. Para la transformación $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene que $A = [T]_{e_i}$, es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine la multiplicidad algebraica de cada uno de los valores propios.

Resolución:

Tenemos:

$$p(\lambda) = \text{Det}[A - \lambda I] = \text{Det} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$p(\lambda) = \text{Det} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

Luego: $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad 1) y $\lambda_2 = 2$ (multiplicidad 2)

Ejemplo 13. Para la transformación $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, se tiene que $A = [T]_{e_i}$, es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -80 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

Determine la multiplicidad algebraica de cada uno de sus valores propios.

Resolución:

Hallando los valores propios:

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \text{Det} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & -80 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A - \lambda I) = (-\lambda) \text{Det} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -80 \\ 1 & -\lambda & 0 & -80 \\ 0 & 1 & -\lambda & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -10 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$-(32) \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-\lambda) \left\{ (-\lambda) \text{Det} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -80 \\ 1 & -\lambda & -40 \\ 0 & 1 & -10 - \lambda \end{bmatrix} + 80 \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$(-32) \left\{ \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \text{Det} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \lambda^2 [-\lambda(-\lambda^3 - 10\lambda^2 - 40\lambda - 80) + 80] + (-32)[1 + \lambda(0)]$$

$$\text{Det}(A - \lambda I) = -\lambda^5 - 10\lambda^4 - 40\lambda^3 - 80\lambda^2 - 80\lambda - 32$$

$$\rightarrow p(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)^5$$

Luego: $p(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = -2$ es el único valor propio (de multiplicidad algebraica 5)

Teorema 7. Sea A una matriz cuadrada y λ un escalar, entonces

$$\{x \in R^n / Ax = \lambda x\}$$

es un subespacio lineal de R^n .

Demostración:

1. No es vacío pues: $A \cdot 0 = 0 = \lambda 0$. Es decir 0 es un elemento del conjunto.

2. Si $Ax_1 = \lambda x_1$, $Ax_2 = \lambda x_2$:

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2)$$

Es decir, que si x_1, x_2 son elementos del conjunto, la suma de ellos también es

un vector del conjunto.

3. Si $Ax_1 = \lambda x_1$ y Si $k \in R$, entonces

$$A(kx_1) = kA(x_1) = k(\lambda x_1) = \lambda(kx_1)$$

Esto prueba que $\{x \in R^n / Ax = \lambda x\}$ es un espacio lineal de R^n .

Definición 18. (Multiplicidad Geométrica de un valor propio). Por el resultado

anterior: Siendo λ_0 un valor propio el conjunto $\{x \in R^n / Ax = \lambda x\}$ es un espacio

lineal diferente de $\{0\}$ así tiene dimensión mayor que cero: la dimensión del espacio

anterior se llamara **multiplicidad geométrica** del valor propio λ_0 [10].

Teorema 8. La dimensión geométrica de un valor propio es menor o igual que la dimensión algebraica.

Teorema 9. Si los vectores v_1, v_2, \dots, v_k son vectores propios asociados a valores propios diferentes, entonces el conjunto formado por ellos es linealmente independiente.

Demostración:

Sea λ_i el valor propio el cual está asociado el vector v_i . Supongamos que el conjunto de vectores es linealmente dependiente. Puesto que ningún vector propio puede ser el vector cero, de esta suposición deducimos entonces que un vector v_i debe ser combinación lineal de los anteriores. Escojamos aquel que tiene el menor índice posible, digamos j , así: v_j es combinación lineal de los anteriores para $i = 2, 3, \dots, j-1$. Tenemos

$$v_j = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{j-1} v_{j-1}$$

Multiplicando por, y utilizando que cada v es vector propio, obtenemos

$$A v_j = c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + \dots + c_{j-1} A v_{j-1}$$

$$\lambda_j v_j = c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_{j-1} \lambda_{j-1} v_{j-1}$$

Si multiplicamos la primera de estas ecuaciones por λ_j y se la restamos por la segunda obtenemos:

$$0 = c_1 (\lambda_1 - \lambda_j) v_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_j) v_2 + \dots + c_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) v_{j-1}$$

Como el conjunto formado por v_1, v_2, \dots, v_{j-1} es linealmente independiente, se tiene que

$$c_i (\lambda_i - \lambda_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, j-1$$

Como los valores propios son diferentes entre sí. $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$.

Así $c_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, j-1$.

Luego:

$$v_j = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{j-1} = 0.$$

Pero esto es imposible, pues ningún vector propio es cero. Esta contradicción afirma que el conjunto formado por los vectores es linealmente independiente.

Nota. Si $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ es el polinomio característico de una matriz A , se tiene que

$$a_i = (-1)^i \sum M_i(A)$$

donde $M_i(A)$ representa a los menores principales de orden 1 de la matriz A .

En particular se verifica que:

El producto de los valores propios es igual al determinante de la matriz:

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = Det(A)$$

Ejemplo 14. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, su polinomio característico es

de la forma $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ donde:

$$a_1 = (-1)^1 \sum M_1(A) = -(1-1+0) = 0.$$

$$a_2 = (-1)^2 \sum M_2(A) = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right\} = -1 - 2 - 6 = -9$$

$$a_3 = (-1)^3 \sum M_3(A) = - \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right\} = -(-6 + 10) = -4$$

Luego: el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda - 4$.

Ejemplo 15. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ su polinomio característico es de la

forma $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ donde:

$$a_1 = (-1)^1 \sum M_1(A) = -(1+2+3) = -6$$

$$a_2 = (-1)^2 \sum M_2(A) = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right\} = 2 + 4 + 5 = 11$$

$$a_3 = (-1)^3 \sum M_3(A) = - \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array} \right\} = -(4+0+2) = -6$$

Luego: el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$.

Teorema 10. Toda matriz cuadrada A satisface su ecuación característica, es decir:

Si $p(\lambda)$ es su polinomio característico, entonces

$$p(A) = 0 \text{ (matriz cero)}$$

Este teorema es conocido como Teorema de Hamilton-Cayley.

Demostración:

Para la matriz cuadrada A , consideramos la matriz característica $C = A - \lambda I$ de

orden n , entonces $Det(C) = p(\lambda) = k_n \lambda^n + k_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + k_0$ es el polinomio característico de la matriz A .

También $Adj(C)$ contendrá polinomios en λ de grado no mayor que $(n-1)$. Por tanto $Adj(C)$ se puede desarrollar en un polinomio con coeficientes matriciales de grado cuando más $(n-1)$, es decir

$$Adj(C) = C_{n-1} \lambda^{n-1} + C_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + C_1 \lambda + C_0$$

Donde cada C_i es una matriz con elementos escalares. Usando la propiedad

$$C \cdot Adj(C) = Adj(C) \cdot C = Det(C) \cdot I$$

Tenemos

$$Adj(C) \cdot C = p(\lambda) \cdot I$$

$$Adj(C) \cdot (A - \lambda I) = p(\lambda) \cdot I$$

$$p(\lambda) \cdot I = Adj(C) \cdot A - (Adj(C)) \lambda$$

$$(k_n \lambda^n + k_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + k_0) I = [C_{n-1} \lambda^{n-1} + C_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + C_1 \lambda + C_0] A -$$

$$[C_{n-1} \lambda^{n-1} + C_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + C_1 \lambda + C_0] \lambda$$

$$\begin{aligned}
& k_n I \lambda^n + k_{n-1} I \lambda^{n-1} + \dots + k_1 I \lambda + k_0 I = \\
& [C_{n-1} A \lambda^{n-1} + C_{n-2} A \lambda^{n-2} + \dots + C_1 A \lambda + C_0 A] - \\
& [C_{n-1} \lambda^n + C_{n-2} \lambda^{n-1} + \dots + C_1 \lambda^2 + C_0 \lambda] \\
& k_n I \lambda^n + k_{n-1} I \lambda^{n-1} + \dots + k_1 I \lambda + k_0 I = \\
& -C_{n-1} \lambda^n - C_{n-2} \lambda^{n-1} - \dots - C_0 \lambda + C_{n-1} A \lambda^{n-1} + \dots + C_1 A \lambda + C_0 A
\end{aligned}$$

Las expresiones en los dos miembros de esta igualdad son matrices polinomiales de orden n . Puesto que las matrices polinomiales son iguales si y solo si los coeficientes correspondientes son iguales. Luego

$$\begin{aligned}
k_n I &= -C_{n-1} \\
k_{n-1} I &= -C_{n-2} + C_{n-1} A \\
&\dots \\
k_1 I &= -C_0 + C_1 A \\
k_0 I &= C_0 A
\end{aligned}$$

Multiplicando cada una de estas ecuaciones por $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$, tenemos

$$\begin{aligned}
k_n A^n &= -C_{n-1} A^n \\
k_{n-1} I &= -C_{n-2} A^{n-1} + C_{n-1} A^n \\
&\dots \\
k_1 A &= -C_0 A + C_1 A^2 \\
k_0 I &= C_0 A
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, se tiene:

$$k_n A^n + k_{n-1} A^{n-1} + \dots + k_0 I = p(A) = 0 \text{ (matriz nula)}$$

Teorema 11. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son todos los valores característicos (con su multiplicidad) de una matriz A y si $g(u)$ es un polinomio escalar, entonces $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$ son los valores característicos de $g(A)$.

Demostración:

Si λ_i es un valor propio de A , entonces, existe un vector $x \neq 0$ tal que

$$Ax = \lambda_i x$$

Multiplicando esta igualdad por la matriz A , se tiene

$$A(Ax) = A(\lambda_i x)$$

$$A^2 x = \lambda_i (Ax) = \lambda_i (\lambda_i x) = \lambda_i^2 x$$

Es decir: λ_i^2 , es valor propio de A^2 . Por inducción se tiene:

$$A^k = \lambda_i^k, k \in \mathbb{Z}_+$$

Es decir: λ_i^k , es valor propio de A^k .

Luego para cualquier polinomio $g(u)$ se cumple:

$$g(A)x = g(\lambda_i)x$$

Lo cual demuestra la afirmación del teorema.

3.1.5. SEMEJANZA DE MATRICES

Definición 19. Se dice que dos matrices cuadradas A y B son semejante, si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$ [11].

Ejemplo 16. Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$ son semejantes, pues

existe la matriz invertible $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tal que $B = P^{-1}AP$. Se tiene:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

En efecto: $B = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$

Ejemplo 17. Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ son semejantes,

pues existe la matriz invertible $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tal que

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$

Teorema 12. Matrices semejantes tiene el mismo polinomio característico.

Demostración: Sean A y B dos matrices semejantes, entonces, existe una matriz

$$\text{invertible } P \text{ tal que } B = P^{-1}AP$$

Luego:

$$\text{Det}(B - \lambda I) = \text{Det}(P^{-1}AP - \lambda I)$$

$$\text{Det}(B - \lambda I) = \text{Det}(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P)$$

$$\text{Det}(B - \lambda I) = \text{Det}[P^{-1}(A - \lambda I)P]$$

$$\text{Det}(B - \lambda I) = \text{Det}(P^{-1})\text{Det}(A - \lambda I)\text{Det}(P)$$

$$\text{Det}(B - \lambda I) = \text{Det}(A - \lambda I)$$

Por tanto los polinomios característicos de A y B son iguales.

Definición 20. Una matriz cuadrada A de orden “ n ” se dice diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D , es decir, si existe una matriz P de orden “ n ” no singular tal que [11].

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

En este caso se dice que D es una forma diagonal de A y que P es la matriz de paso.

$P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD$ y si P_i representa la columna i -ésima de P tenemos

$$AP_i = d_i P_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Por lo que los elementos $d_i, i = 1, 2, \dots, n$ de la igualdad de D son los auto valores de la matriz A . Por tanto, salvo reordenación de los elementos diagonales, la matriz D está determinada.

Definición 21. (Potencia de matrices)

Si A es una matriz diagonalizable, existe una matriz no singular P tal que

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}. \text{ Entonces}$$

$$A^m = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) \Rightarrow A^m = PD^mP^{-1}.$$

Ejemplo 18. Si $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$

Vector Propio:

$$\text{Para } \lambda = 2: \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Luego: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es el vector propio asociado a } \lambda = 2.$$

$$\text{Para } \lambda = -1: \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$\text{Luego: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es el vector propio asociado a } \lambda = -1.$$

Se forma la matriz $P = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\text{Luego: } A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2^n & 2^{n+1} \\ (-1)^n & -(-1)^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 19. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$

Vector Propio:

$$\text{Para } \lambda_1 = -2: \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$\text{Luego: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es el vector propio asociado a}$$

$$\lambda_1 = -2.$$

$$\text{Para } \lambda_2 = 4: \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Luego: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es el vector propio asociado a } \lambda_2 = 4.$$

$$\text{Se forma la matriz } P = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^n \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 2^{2n} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -(-2)^n & 2^{2n} \\ (-2)^n & 2^{2n} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-2)^n + 2^{2n} & -(-2)^n + 2^{2n} \\ -(-2)^n + 2^{2n} & (-2)^n + 2^{2n} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-2)^n + 2^{2n} & -(-2)^n + 2^{2n} \\ -(-2)^n + 2^{2n} & (-2)^n + 2^{2n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 20. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$,

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Vector Propio:

$$\text{Para } \lambda = 1: (A - I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 2$:

$$(A - 2I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 4x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 4x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 3$:

$$(A-3I)x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 4x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se forma la matriz:

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego: } A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -1 & -2^{n+1} & -3^n \\ 1 & 2^n & 3^n \\ 2 & 2^{n+2} & 4 \cdot 3^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{n+2} - 2 \cdot 3^n & -4 + 2^{n+2} & 1 - 3^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n & 4 - 2^{n+1} & -1 + 3^n \\ -2^{n+3} + 8 \cdot 3^n & 8 - 2^{n+3} & -2 + 4 \cdot 3^n \end{bmatrix}$$

3.2. METODOS ITERATIVOS PARA EL CÁLCULO DEL POLINOMIO

CARACTERISTICO DE UNA MATRIZ.

En diversos campos de la ingeniería y las matemáticas surge el problema de calcular los valores escalares λ y los vectores x no nulos tales que para la matriz cuadrada A se cumple $Ax = \lambda x$.

Algunos de estos campos de aplicación son:

Ecuaciones diferenciales

Estabilidad de sistemas lineales

Sistemas eléctricos (componentes simétricas)

Polos y ceros de funciones transferencia

Diagonalización de matrices.

Desarrollamos los siguientes métodos de cálculo para este polinomio.

3.2.1. EL MÉTODO DE DANILEVSKY

Consideremos una matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. El método consiste en transformar la matriz: [12].

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a la matriz semejante

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

llamada la matriz de FROBENIUS y donde $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$, son los coeficientes de

$$p(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_{n-1}\lambda - p_n$$

La mencionada transformación se realiza del modo siguiente:

La penúltima columna se divide por $a_{n,n-1}$, supuesto que es diferente de cero, luego mediante operaciones elementales columnas (matrices elementales) se transforma la última fila a una fila de la forma $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$, El producto de todas las matrices elementales (operaciones elementales columnas) dan como resultado la matriz

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$b_{n-1,i} = -\frac{a_{ni}}{a_{n,n-1}}; i \neq n-1$$

$$b_{n-1,n-1} = \frac{1}{a_{n,n-1}}$$

Puesto que M_{n-1} es el producto de matrices elementales entonces es no singular

(regular) y

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$C = M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1(n-1)} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2(n-1)} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} & c_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es semejante a la matriz A y por lo tanto tiene el mismo polinomio característico.

Si $c_{(n-1)(n-2)} \neq 0$, entonces aplicamos el proceso anterior a la matriz C y

obtenemos

$$D = M_{n-2}^{-1} A M_{n-2}$$

la cual es semejante a la matriz A.

Por consiguiente, de esta manera obtenemos P,

$$P = M_1^{-1}M_2^{-1} \dots M_{n-2}^{-1}M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}M_{n-2} \dots M_2M_1$$

Ejemplo de aplicación 1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Aquí $n = 4$, $a_{43} = 2 \neq 0$

Entonces $M_{n-1} = M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donde

$$b_{31} = -\frac{a_{41}}{a_{43}} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$b_{32} = -\frac{a_{42}}{a_{43}} = -\frac{3}{2}$$

$$b_{33} = \frac{1}{a_{43}} = \frac{1}{2}$$

$$b_{34} = -\frac{a_{44}}{a_{43}} = -\frac{1}{2}$$

Entonces:

$$M_{n-1} = M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{n-1}^{-1} = M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$C = M_3^{-1}AM_3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -5 & -5/2 & 3/2 & 5/2 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ -24 & -15 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí: $c_{32} = -15 \neq 0$

Para la matriz C repetimos el proceso:

Dividimos la penúltima columna entre $c_{32} = -15$.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{n-2,i} = -\frac{c_{n-1,i}}{c_{(n-1)(n-2)}}; i \neq n-2$$

$$b_{(n-2)(n-2)} = \frac{1}{c_{(n-1)(n-2)}}$$

Luego:

$$b_{21} = -\frac{c_{31}}{c_{32}} = -\frac{-24}{-15} = -\frac{24}{15}$$

$$b_{22} = \frac{1}{c_{32}} = \frac{1}{-15} = -\frac{1}{15}$$

$$b_{23} = -\frac{c_{33}}{c_{32}} = -\frac{11}{-15} = \frac{11}{15}$$

$$b_{24} = -\frac{c_{34}}{c_{32}} = -\frac{19}{-15} = \frac{19}{15}$$

Luego:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -24/15 & -1/15 & 11/15 & 19/15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -15 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces:

$$D = M_2^{-1} A M_2$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1/6 & -1/3 & -2/3 \\ 6 & 5 & 34 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

También se calcula:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1/6 & -/6 & -34/6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 34 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$P = M_1^{-1} D M_1$$

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 34 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1/6 & -1/3 & -2/3 \\ 6 & 5 & 34 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & -/6 & -34/6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 40 & 56 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20$$

3.2.2. MÉTODO DE KRYLOV

El método de Krylov requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los coeficientes del polinomio característico. Este sistema se conforma a partir de la aplicación del teorema 9 al polinomio característico [12].

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + p_{n-3}\lambda^{n-3} + \dots + p_1\lambda + p_0$$

$$p_n(A) = A^n + p_{n-1}A^{n-1} + p_{n-2}A^{n-2} + p_{n-3}A^{n-3} + \dots + p_1A + p_0I$$

Si a la expresión del polinomio característico, evaluado para la matriz A (segunda expresión del párrafo anterior) se le multiplica por la derecha por un vector arbitrario $Y^{(0)}$ se tiene

$$A^n Y^{(0)} + p_{n-1}A^{n-1}Y^{(0)} + p_{n-2}A^{n-2}Y^{(0)} + \dots + p_1AY^{(0)} + p_0Y^{(0)} = 0$$

Donde

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Llamando $Y^{(1)}$ al producto de la matriz A por el vector $Y^{(0)}$ se tiene

$$Y^{(1)} = AY^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

$Y^{(2)}$ al producto de la matriz A por el vector $Y^{(1)}$ lo que implica la aplicación A^2 sobre $Y^{(0)}$

$$Y^{(2)} = A^2 Y^{(0)} = AY^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \\ \vdots \\ y_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

En general

$$Y^{(k)} = A^k Y^{(0)} = AY^{(k-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ \vdots \\ y_n^{(k)} \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots, n$$

Con estos vectores se forma el sistema lineal

$$p_{n-1} \begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} \\ y_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} + p_{n-2} \begin{bmatrix} y_1^{(n-2)} \\ y_2^{(n-2)} \\ \vdots \\ y_n^{(n-2)} \end{bmatrix} + \dots + p_1 \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} \end{bmatrix} + p_0 \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \vdots \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Expresando en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-3)} & \dots & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n-3)} & \dots & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(n-1)} & y_3^{(n-2)} & y_3^{(n-3)} & \dots & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n-3)} & \dots & y_n^{(1)} & y_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \\ p_{n-3} \\ \vdots \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ y_3^{(n)} \\ \vdots \\ y_{n-1}^{(n)} \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Resuelto este sistema por alguno de los métodos conocidos, se tienen los coeficientes del polinomio característico.

Cabe señalar que, siendo el vector $Y^{(0)}$ arbitrario se toma como tal el que menos trabajo implica, por ejemplo, se toma el vector

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo posible elegir otro si el sistema resulta mal condicionado.

Ejemplo de aplicación: Para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Se toma como el vector arbitrario el vector

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se calcula

$$Y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(3)} = Ay^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ -14 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(4)} = Ay^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ -14 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41 \\ -30 \\ -50 \\ -72 \end{bmatrix}$$

El sistema lineal a resolver, es:

$$\begin{bmatrix} -9 & -1 & 1 & 1 \\ -8 & -2 & 0 & 0 \\ -14 & -4 & -2 & 0 \\ -18 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41 \\ -30 \\ -50 \\ -72 \end{bmatrix}$$

En forma equivalente:

$$-9p_3 - p_2 + p_1 + p_0 = 41 \quad (1)$$

$$-8p_3 - 2p_2 = 30 \quad (2)$$

$$-14p_3 - 4p_2 - 2p_1 = 50 \quad (3)$$

$$-18p_3 - 4p_2 = 72 \quad (4)$$

Podemos resolver las ecuaciones (2) y (4)

$$\begin{cases} -8p_3 - 2p_2 = 30 \\ -18p_3 - 4p_2 = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4p_3 - p_2 = 15 \\ 9p_3 + 2p_2 = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8p_3 - 2p_2 = 30 \\ 9p_3 + 2p_2 = -36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_3 = -6 \\ p_2 = 9 \end{cases}$$

Luego: $p_1 = -1$, $p_0 = -3$

con lo cual el polinomio característico, es:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 3$$

3.2.3. MÉTODO DE LE VERRIER

Consideramos el polinomio característico en su forma mónica (coeficiente de λ^n igual a la unidad) [12], [13].

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + p_1\lambda + p_0$$

Si las raíces de este polinomio son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, valores propios de la matriz A ,

se tiene

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\dots(\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n)$$

Se calcula la derivada

$$p'(\lambda) = n\lambda^{n-1} + (n-1)p_{n-1}\lambda^{n-2} + (n-2)p_{n-2}\lambda^{n-3} + \dots + p_1$$

Se considera ahora

$$\frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)} = \frac{n\lambda^{n-1} + (n-1)p_{n-1}\lambda^{n-2} + (n-2)p_{n-2}\lambda^{n-3} + \dots + p_1}{\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + p_1\lambda + p_0}$$

$$\frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)} = \frac{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\dots(\lambda - \lambda_n) + (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3)\dots(\lambda - \lambda_n) + \dots + (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_{n-1})}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\dots(\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n)}$$

$$\frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_{n-1})}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\dots(\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n)}$$

$$\frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)} = \frac{1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda - \lambda_2} + \frac{1}{\lambda - \lambda_3} + \dots + \frac{1}{\lambda - \lambda_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - \lambda_k}$$

Tomando $|\lambda| > \max_{k=1, n} |\lambda_k|$, la sumatoria se puede escribir

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{\lambda_k}{\lambda} + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^3 + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^4 + \dots \right]$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda_k}{\lambda^2} + \frac{\lambda_k^2}{\lambda^3} + \frac{\lambda_k^3}{\lambda^4} + \frac{\lambda_k^4}{\lambda^5} \dots \right]$$

Por tratarse de una serie geométrica de razón $\frac{\lambda_k}{\lambda} < 1$.

Llamando:

$$s_1 = \sum_{k=1}^n \lambda_k \text{ y por propiedad, } \sum_{k=1}^n \lambda_k = \text{Tr}(A)$$

$$s_2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = \text{Tr}(A^2), \quad s_3 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^3 = \text{Tr}(A^3)$$

.....

$$s_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k^n = \text{Tr}(A^n)$$

Resulta:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - \lambda_k} = \frac{n}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \frac{s_2}{\lambda^3} + \frac{s_3}{\lambda^4} + \frac{s_4}{\lambda^5} + \dots \}$$

Entonces

$$\begin{aligned} n\lambda^{n-1} + (n-1)p_{n-1}\lambda^{n-2} + (n-2)p_{n-2}\lambda^{n-3} + \dots + p_1 = \\ = (\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-2}\lambda^{n-2} + p_0) \left(\frac{n}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \frac{s_2}{\lambda^3} + \frac{s_3}{\lambda^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

Desarrollando el producto del segundo miembro e igualando los coeficientes de las distintas potencias de λ resulta que, siendo el polinomio mónico característico

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + p_1\lambda + p_0$$

Sus coeficientes vienen dados por

$$p_{n-1} = -s_1$$

$$p_{n-2} = -\frac{s_2 + s_1 p_{n-1}}{2}$$

$$p_{n-3} = -\frac{s_3 + s_2 p_{n-1} + s_1 p_{n-2}}{3}$$

.....

$$p_{n-r} = -\frac{s_r + s_{r-1}p_{n-1} + s_{r-2}p_{n-2} + \dots + s_1 p_{n-r+1}}{r}$$

Ejemplo de aplicación: Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Como primer paso se calculan las potencias segunda, tercera y cuarta de la matriz dada. Se obtiene las matrices

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -9 & 8 & 16 & 23 \\ -8 & 11 & 11 & 13 \\ -14 & 13 & 18 & 25 \\ -18 & 18 & 27 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -41 & 39 & 61 & 85 \\ -30 & 35 & 40 & 51 \\ -50 & 51 & 67 & 90 \\ -72 & 73 & 101 & 137 \end{bmatrix}$$

A continuación se calculan las trazas de estas matrices que con la notación adoptada se corresponden a los valores s, s_2, s_3, s_4

$$s_1 = Tr(A) = Tr \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 6$$

$$s_2 = Tr(A^2) = Tr \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} = 18$$

$$s_3 = Tr(A^3) = Tr \begin{bmatrix} -9 & 8 & 16 & 23 \\ -8 & 11 & 11 & 13 \\ -14 & 13 & 18 & 25 \\ -18 & 18 & 27 & 17 \end{bmatrix} = 57$$

$$s_4 = Tr(A^4) = Tr \begin{bmatrix} -41 & 39 & 61 & 85 \\ -30 & 35 & 40 & 51 \\ -50 & 51 & 67 & 90 \\ -72 & 73 & 101 & 137 \end{bmatrix} = 198$$

Con estos valores se tiene:

$$p_3 = -s_1 = -6$$

$$p_2 = -\frac{s_2 + s_1 p_3}{2} = 9$$

$$p_1 = -\frac{s_3 + s_2 p_3 + s_1 p_2}{3} = -1$$

$$p_0 = -\frac{s_4 + s_3 p_3 + s_2 p_2 + s_1 p_1}{4} = -3$$

El polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 3$$

IV. DISCUSION

Los resultados son de gran importancia en el cálculo de los coeficientes del polinomio característico de una matriz. Sin embargo, en el estudio que se hace en este trabajo, existen matrices que no se adecuan al empleo del método de Danilevsky, por ejemplo matrices que tiene el término $a_{n,n-1}$ de la matriz igual a cero. Estas matrices se dejan al estudio posterior de otros trabajos de investigación. En realidad, estas matrices al inicio no se adecuan al método de Danilevsky, pero si se puede aplicar una operación elemental y se convierten una matriz que se adecua al método de Danilevsky.

Cabe decir que estos métodos solo dan el polinomio característico de la matriz, mas no los vectores propios (estos valores propios son las raíces del polinomio característico), este problema del cálculo de los valores propios también es motivo de otro trabajo de investigación.

Obviamente, estos tres métodos estudiados, tampoco dan los vectores propios de la matriz. Claramente si se conoce un valor propio, se podría calcular uno o más vectores propios.

V. CONCLUSIONES

Se tienen las siguientes conclusiones

1. El método de Danilevsky consiste en efectuar $(n-1)$ transformaciones de semejanza de matrices (Operaciones elementales fila), a partir de la matriz A , encontrando matrices no singulares $M_i; 1, 2, \dots, n-1$ tales que el producto $M_1^{-1}, \dots, M_{n-1}^{-1}M_{n-1} = C_\lambda$, es decir, la matriz A va siendo sustituida sucesivamente por matrices cuyas filas van siendo reducidas a partir de la fila n hasta la fila 2 , esta última matriz es la matriz compañera, y es la que da los coeficientes del polinomio característico.
2. En el método de Krylov se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los coeficientes del polinomio característico. Este sistema se conforma a partir de la aplicación del teorema 9 al polinomio característico

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + p_{n-3}\lambda^{n-3} + \dots + p_1\lambda + p_0$$

3. En el método de Le Verrier, es de gran importancia las trazas de las matrices A, A^2, A^3, \dots, A^n con los cuales se pueden calcular los coeficientes del polinomio característico de la matriz considerada.

VI. RECOMENDACIONES

Se tiene las siguientes recomendaciones.

1. En el método de Danilevsky se recomienda tener conocimiento de las operaciones elementales filas y columnas en una matriz (estas operaciones elementales son equivalentes a multiplicar la matriz A por matrices elementales).
2. En el método de Krylov se recomienda leer un poco de la teoría de sistemas de ecuaciones lineales, así como algunos métodos de solución.
3. Para el cálculo de las matrices A, A^2, A^3, \dots, A^n en el método de Le Verrier se recomienda utilizar el programa de Matlab, derive, ya que estos cálculos son tediosos.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Trabajos citados

- [1] W. Castillo E, Algebra Lineal, Costa Rica, 2013.
- [2] L. M. Merino Gonzalez y E. Santos Alaez, Álgebra lineal con métodos elementales, 3 ed., Paraninfo, 2021.
- [3] R. E. Larson, Introducción al Algebra Lineal, Limusa , 2016.
- [4] R. Larson, Fundamentos de álgebra lineal, 7 ed., Cengage, 2015.
- [5] E. Mendoza Sandoval, Análisis teórico de los operadores lineales diagonalizables con base en la teoría de APOE, Guerrero, México, 2019.
- [6] R. Larson, Matemática IV álgebra lineal, 2 ed., cengage, 2019.
- [7] . M. N. Sandoval Rodríguez, Localización de regiones que incluyen valores propios de matrices cuadradas, Trujillo, Perú, 2022.
- [8] E. Aranda Ortega, Algebra lineal con aplicaciones, Lulu.com, 2013.
- [9] E. Espinoza Ramos, «Álgebra Lineal para estudiantes de ciencias e ingeniería,» Lima, cuzcano, 2006.
- [10] N. Ferre, A. C. Galli y E. B. Guzmán Mattje, Álgebra y geometría una manera de pensar, Universidad nacional de la plata, 2018.
- [11] D. Poole, Álgebra lineal una introducción moderna, 4 ed., cengage, 2017.
- [12] L. Huamán Rmirez, «III Coloquio de matemática,» de *III Coloquio de matemática*, Lima, 1985.
- [13] J. A. Palomino Hernández , Transformaciones lineales con Geogebra, una propuesta para profesores en formación continua, Lima, Perú, 2017.

VIII. ANEXOS

MÉTODO PARA EL CÁLCULO SIMULTÁNEO DE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO Y DE LA MATRIZ ADJUNTA

Este método conocido como el método de Faddeev, considera una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. La

matriz característica de A es $(\lambda I - A)$. El

determinante de la matriz característica

$$p(\lambda) = \text{Det}(\lambda I - A) = \text{Det}(\lambda \delta_{ik} - a_{ik})$$

Es un polinomio escalar en λ y se llama polinomio característico de A .

La matriz $B(\lambda) = [b_{ik}(\lambda)]$, donde $b_{ik}(\lambda)$ es el complemento algebraico (cofactor) del elemento

$(\lambda \delta_{ik} - a_{ik})$ en el determinante $\Delta(\lambda)$ se llama matriz adjunta de $(\lambda I - A)$. Es decir:

$$B(\lambda) = [b_{ik}(\lambda)] = \text{Adj}(\lambda I - A)$$

Ejemplo 1. Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \text{Det}(\lambda I - A)$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{21} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31})\lambda +$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} - a_{21}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - (a_{22} + a_{23})\lambda + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & * & * \\ a_{21}\lambda + a_{22}a_{31} - a_{21}a_{33} & * & * \\ a_{31}\lambda + a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & * & * \end{bmatrix}$$

Estas definiciones implican las siguientes identidades en λ :

$$(\lambda I - A)B(\lambda) = p(\lambda)I$$

$$B(\lambda)(\lambda I - A) = p(\lambda)I$$

Formula efectiva para expresar la matriz adjunta $B(\lambda)$

Consideremos el polinomio característico de la matriz $A \in M(n, n)$.

$$p(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n$$

La matriz adjunta se puede expresar de la siguiente manera:

$$B(\lambda) = I\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + B_2\lambda + \dots + B_{n-1}$$

donde

$$B_1 = A - p_1I$$

$$B_2 = A^2 - p_1A - p_2I$$

y en general

$$B_k = A^k - p_1A^{k-1} - p_2A^{k-2} - \dots - p_kI \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Las matrices B_1, B_2, \dots, B_{n-1} se pueden calcular en sucesión partiendo de la relación de recurrencia

$$B_k = AB_{k-1} - p_kI \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; B_0 = I)$$

Además

$$B_n = p(A) = AB_{n-1} - p_nI = 0 \quad (\text{matriz cero})$$

$$B_k = AB_{k-1} - p_kI \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; B_0 = I)$$

Si A es no singular, entonces

$$p(0) = \text{Det}(-A) = -p_n$$

$$(-1)^n \det(A) = -p_n$$

$$p_n = (-1)^{n+1} \det(A) \neq 0$$

Y se sigue que:

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1}$$

Ejemplo 2. Para $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, tenemos

$$p(\lambda) = \text{Det}(\lambda I - A) = \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \text{ y } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 \text{ (raíz doble)}$$

$$B_1 = A - p_1 = A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = AB_1 + 5I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \\ -1 & \lambda^2 - 3\lambda + 3 & \lambda - 2 \\ -\lambda + 1 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = 2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} B_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$