



Universidad Nacional

**SAN LUIS GONZAGA**



## **Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional**

Esta licencia es la más restrictiva de las seis licencias principales Creative Commons, permitiendo a otras solo descargar sus obras y compartirlas con otras siempre y cuando den crédito, pero no pueden cambiarlas de forma alguna ni usarlas de forma comercial.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0>



**UNIVERSIDAD NACIONAL SAN LUIS GONZAGA**  
**EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD**

**CONSTANCIA**

El que suscribe, deja constancia que se ha realizado el análisis con el software de verificación de similitud al documento cuyo título es:

**“FUNCIÓN DE BESSEL GENERALIZADA APLICADO A LAS VIBRACIONES  
DE UNA MEMBRANA CIRCULAR”**

Presentado por:

Dr. ALBERTO ERNESTO GUTIERREZ BORDA

Dr. ORLANDO EUGENIO BERROCAL NAVARRO

Mag. CARLOS LUIS GASPAS AYQUIPA

Mag. MARIA ESTEFANÍA MOQUILLAZA URIBE

El resultado obtenido es el **7% de Similitud**, por el cual se otorga el calificativo de:

**APROBADO, según Reglamento de Evaluación de la Originalidad**

Se adjunta al presente el reporte de evaluación con el software de verificación de originalidad.

Ica, 20 de Diciembre del 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"  
FACULTAD DE CIENCIAS  
  
Dr. ALBERTO ERNESTO GUTIERREZ BORDA  
DIRECTOR DE LA UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN



## **FUNCIÓN DE BESSEL GENERALIZADA APLICADO A LAS VIBRACIONES DE UNA MEMBRANA CIRCULAR**

ÁREA ACADÉMICA:  
CIENCIAS E INGENIERÍAS

LINEA DE INVESTIGACIÓN:  
CIENCIAS NATURALES, INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS SOSTENIBLES

PRODUCTO FINAL DE LA INVESTIGACIÓN:  
PUBLICACIÓN DE ARTÍCULO CIENTÍFICO

DR. ALBERTO ERNESTO GUTIERREZ BORDA (autor principal)

 <https://orcid.org/0000-0001-6260-2419>

DR. ORLANDO EUGENIO BERROCAL NAVARRO (coautor)

 <https://orcid.org/0000-0002-6151-6540>

MG. CARLOS LUIS GASPAS AYQUIPA (coautor)

 <https://orcid.org/0009-0000-8429-0823>

MG. MARIA ESTEFANÍA MOQUILLAZA URIBE (coautor)

 <https://orcid.org/0009-0003-5406-7075>

## ÍNDICE

Resumen	03
Abstract	04
I. Introducción	05
II. Estrategia metodológica	06
III. Resultados	07
3.1. Ecuación diferencial de Bessel	07
3.2. Funciones de Bessel	09
3.3. Propiedades de las funciones de Bessel	11
3.4. Ecuación del movimiento	19
3.5. Problema de la membrana circular	21
IV. Discusión	25
V. Conclusiones	26
Referencias	27

## RESUMEN

Se trata de un problema de geometría circular del límite con análisis de parámetros físicos, interviene factores como el espesor, radial de una membrana y densidad, consiste en estudiar el movimiento vibratorio utilizando funciones de Bessel con análisis y formulación de ecuaciones diferenciales parciales que describen la vibración de una membrana circular. El objetivo es analizar y aplicar la función de Bessel para sistematizar el movimiento que se produce debido a la restauración de fuerzas creadas por deformaciones. Los resultados demuestran que a medida que complicamos la ecuación con datos en la frontera, surge la necesidad de nuevos conceptos matemáticos.

**Palabras claves:** Ecuación de Bessel, funciones de Bessel, membrana circular, problemas de contorno.

## **ABSTRACT**

It is a problem of circular geometry of the limit with analysis of physical parameters, factors such as the thickness, radial of a membrane and density are involved, it consists of studying the vibratory movement using Bessel functions with analysis and formulation of partial differential equations that describe the vibration of a circular membrane. The objective is to analyze and apply the Bessel function to systematize the movement that occurs due to the restoration of forces created by deformations. The results show that as we complicate the equation with data on the boundary, the need for new mathematical concepts arises.

**Keywords:** Bessel equation, Bessel functions, circular membrane, boundary problems.

## I. INTRODUCCIÓN

Las vibraciones de una membrana circular, que está fijada a un marco circular rígido y es principalmente elástica de espesor uniforme, se formulan como una ecuación de onda, que cumple condiciones de frontera. Una membrana puede vibrar de diferentes maneras dependiendo de la forma de la deformación dada en un intervalo de tiempo inicial, mediante el método de separación de variables, es posible encontrar un conjunto de modos de vibración simple [1, 2],

El problema de la membrana vibrante puede ayudar explicar cómo funcionan los instrumentos de percusión; sin embargo, hay otras aplicaciones, como el caso biológico que explica cómo funciona el tímpano o cuando se estudia el significado de los nodos o los números cuánticos o para comprender la estructura de los átomos.

Por vibraciones se entiende la propagación de ondas clásicas, que provocan deformaciones y tensiones en un medio continuo; es decir, las vibraciones pueden considerarse movimientos repetitivos alrededor de una posición de equilibrio. La posición de equilibrio es el lugar que alcanza cuando la fuerza que actúa sobre él sea cero; este movimiento no provoca necesariamente una deformación interna de todo el cuerpo [4, 5].

Para Asmar [1] le resulta conveniente separar los términos vibración y oscilación porque la amplitud de la oscilación es mucho mayor. Las vibraciones producen movimientos de menor amplitud que las oscilaciones alrededor del punto de equilibrio, los movimientos vibratorios se pueden linealizar fácilmente, mientras que en las oscilaciones la energía cinética suele convertirse en potencial gravitacional y viceversa, mientras que en las vibraciones hay un intercambio entre energía cinética y energía potencial elástica.

Por otro lado, las ecuaciones diferenciales modelan muchos procesos de la vida real, está vinculada con la ciencia e ingeniería; mientras que, las funciones de Bessel están en el grupo de las funciones especiales con múltiples aplicaciones en la física matemática, aparece como resultado de resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes variables [6, 7, 8].

El matemático Daniel Bernoulli (1700 – 1782) fue el primero en llegar a las funciones de Bessel sobre la base del estudio de las vibraciones de una cadena colgante, más tarde vuelve a parecer en los estudios de Euler (1707 – 1782) en cuanto a las vibraciones de una membrana circular; de la misma forma cuando Bessel estudia el movimiento de planetas. La ecuación de Bessel, surge de manera natural al tratar con problemas de contorno en teoría potencial para dominio cilíndricos [9, 10, 11].

En Spiegel [12], analiza la singularidad y la analiticidad de sus coeficientes; pero, no es muy explícito en la fundamentación respecto de las condiciones de sus coeficientes para obtener la función de Bessel de orden  $p$  y no enfatiza el papel que juega la función gamma, el teorema de reducción de orden ante la necesidad de encontrar dos soluciones linealmente independientes, mientras que, en los trabajos de Dehestani [13], lo sustancial son el estudio de las funciones de Bessel esféricas, asociadas a la ecuación de ondas en coordenadas esféricas; no obstante, Liouville logró demostrar que  $J_{p+\frac{1}{2}}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  es elemental, y que son los únicos funciones de Bessel elementales. Otro problema son los ceros de las funciones de Bessel, aunque se pueden encontrar tablas en muchos libros, sobre todo para  $J_0(x), J_1(x)$ , es necesario formular teoremas afines para determinar ceros de cualquier función no trivial y formular la existencia de ceros [14]; sobre todo poner atención en las propiedades de ortogonalidad utilizando cambio de variable, formular nuevas proposiciones relacionados con la integración de las funciones de Bessel [15].

De la revisión de [15, 16], se puede advertir, que las funciones de Bessel se inicia a través de una serie de potencias. En general una expresión de este tipo nos proporciona sólo información local, pero ante la escasa información global sobre  $J_p(t)$ , surge la interrogante, ¿sería mejor una representación mediante una integral oscilatoria? La respuesta pone en alerta aspectos de su forma de representación. Para Córdoba [17] hay algunas estimaciones uniforme en  $p$ , esto por la preocupación de la dependencia de este parámetro, aunque no sólo es suficiente estudiar el comportamiento de las funciones de Bessel para valores grandes; de acuerdo con Kreyszig [11], en atención a las funciones de Bessel en sus diversas especies y orden, hacemos modificaciones específicas propiciamos su aplicación hacia la interpretación de la membrana circular con ajuste a las condiciones de frontera.

## II. MATERIAL Y MÉTODOS

Corresponde a una investigación fundamental, que es soporte de otras presentadas en referencias confiables, de nivel exploratoria, siendo el objetivo aplicar funciones de tipo Bessel que requiere establecer relaciones entre fórmulas y conceptos que se interconectan, teoremas asociados con definiciones, durante todo el proceso se manifiesta lo deductivo-inductivo.

El diseño corresponde a una investigación cualitativa, se enmarca a detectar un problema, interpretar, aplicar teorías, particularizar y profundizar su comprensión. Su aplicación, gira entorno del análisis exhaustivo de situaciones nuevas, donde los aspectos teóricos y la situación práctica se articulan con un conjunto de teoremas siendo guías en diferentes momentos del trabajo. Para organizar la investigación, se pasa por diferentes momentos: acopio de información, fundamentación, criterio de selección de datos valiosos que muestren situaciones relevantes para la solución; confiabilidad, alta complejidad en la que caracteriza a la ecuación de Bessel asociado a una vibración.

Los argumentos que se utilizan en este trabajo son: demostrables; además, aplicables dentro del contexto investigativo; la valoración de criterios, transferencia y dependencia, son parte de un conjunto de premisas y conceptos. El rigor será lo suficientemente consistente para que los resultados sean publicados en una revista indexada.

### III. RESULTADOS

#### 3.1 Ecuación diferencial de Bessel

En casos reducidos, la solución de una ecuación lineal con coeficientes variables de segundo orden, se puede determinar por medio de funciones elementales. Antes de resolver un problema de frontera se analiza la ecuación diferencial de Bessel, que se presenta en la forma canónica

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (1)$$

en su forma autoadjunta,  $(xy')' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0$ .

Uno de los métodos más empleados para resolver la ecuación Bessel (1) es el de Frobenius [18, 19], al utilizar una serie de la forma  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}$  entorno de un punto 0 que es singular regular. Se busca la solución en forma de series de potencias

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

es evidente que no se tiene la seguridad de que esta serie inicie con el término independiente. Consideramos el primer coeficiente diferente de cero, si  $a_0 = b_m$ . Por tanto,

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \dots + a_n x^{m+n} + \dots$$

siendo  $m \geq 0$ ,  $a_0 \neq 0$ , al reemplazar se obtiene,

$$a_0 m^2 x^{m-1} + a_1 (m+1)^2 x^m + a_2 (m+2)^2 x^{m+1} + \dots + a_n (m+n)^2 x^{m+n+1} + \dots \\ - a_0 p^2 x^{m-1} - a_1 (p)^2 x^m - a_2 (p)^2 x^{m+1} - \dots - a_n (p)^2 x^{m+n+1} + \dots$$

Igualando coeficientes a la misma potencia para un polinomio cero, todos sus coeficientes deben ser cero,

$$a_0(m^2 - p^2) = 0 \\ a_1[(m+1)^2 - p^2] = 0 \\ a_2[(m+2)^2 - p^2] + a_0 = 0 \\ a_3[(m+3)^2 - p^2] + a_1 = 0 \\ \dots \\ a_n[(m+n)^2 - p^2] + a_{n-2} = 0.$$

de esta parte se obtiene una fórmula de recurrencia y son

$$m^2 = p^2, m = p \\ a_1[(p+1)^2 - p^2] = 0$$

$$\begin{aligned}
a_2[(p+2)^2 - p^2] + a_0 &= 0 \\
a_3[(p+3)^2 - p^2] + a_1 &= 0 \\
&\dots \\
a_n[(p+n)^2 - p^2] + a_{n-2} &= 0,
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
a_1(2p+1) &= 0, \quad 2p+1 \neq 0, \quad a_1 = 0 \\
a_2(2p+4) + a_0 &= 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{2(p+2)} \\
a_3(6p+9) + a_1 &= 0, \quad a_3 = -\frac{a_1}{3(2p+3)} = 0 \\
&\dots \\
a_n(2np+n^2) + a_{n-2} &= 0, \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2p+n)}
\end{aligned}$$

en esta construcción  $p \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $a_1 = 0, a_3 = 0, a_5 = 0, \dots, a_{2k+1} = 0$ , sólo quedan los pares

$$a_{2k} = \frac{a_0 p! (-1)^k}{2^{2k} k! (p+k)!},$$

es el término genérico y se puede reemplazar en la solución haciendo  $m = p$ , con algunos ajustes se escribe,

$$y = a_0 2^p p! \left[ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{p!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!(p+2)!} - \dots + \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!} - \dots \right]$$

cada parte en corchetes se denomina la función de Bessel que se denota por,

$$J_p(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{p!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!(p+2)!} - \dots + \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!} - \dots,$$

queda claro, que la solución del problema para la ecuación de Bessel es cualquier función de la forma  $AJ_p(x)$ , donde  $A$  está reflejando un factor  $A = a_0 2^p p!$ , siendo  $a_0$  arbitrario, incluso se podría elegir  $a_0 = 1$ , luego la función de Bessel es acotado para valores de  $x, x \rightarrow 0^+$ , positivos por la derecha, sin perder de vista que esto sale del problema de la membrana circular que tiene simetría axial o cilíndrica. Existen muchos problemas que se resuelven de la física matemática que tienen pre-supuesto de esta simetría. Por tanto, la solución de la ecuación de Bessel es

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 N_p(x). \quad (2)$$

en (2),  $N_p(x)$  es la función de Weber o también conocida como la función de Newmann, esto no se utiliza en el trabajo, en vista que esta función tiende al infinito, es decir  $N_p(x) \rightarrow -\infty$ , cuando  $x \rightarrow 0^+$ , solo se trabaja con  $J_p(x)$ , en el caso en que no  $x \rightarrow -\infty$ , puede ser si consideramos la membrana agujereada y se puede trabajar como superposición de ambos.

Para la forma normal de la ecuación de Bessel, primero se escribe

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^2-p^2)}{x^2}y = 0, \quad (3)$$

en (39, haciendo un cambio de variable apropiado  $u(x) = \sqrt{x}y(x)$ , de manera que  $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}u(x)$ , también,  $y'(x) = u'(x)\frac{1}{\sqrt{x}} - u(x)\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ,  $y''(x) = u''(x)\frac{1}{\sqrt{x}} - 2u'(x)\frac{1}{2x\sqrt{x}} + u(x)\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$ , al sustituir se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{x}}u'' + \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{2x\sqrt{x}}\right)u' + \left(\frac{3}{4x^2\sqrt{x}} + \frac{(x^2-p^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2\sqrt{x}}\right)u = 0,$$

$$u'' + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u = 0.$$

Por tanto, la función de Bessel de primera clase,  $J_p(x)$ , de orden  $p$ , es

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p\Gamma(p+1)} \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} + \dots \right]$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \dots$$

Si  $p \notin \mathbb{N}$ , entonces  $J_p(x)$  y  $J_{-p}(x)$  son linealmente independientes y forman una base del espacio de soluciones de la ecuación de Bessel, la solución general es la combinación lineal de ambos. Si  $p \in \mathbb{N}$ , en este caso  $J_p(x)$  y  $J_{-p}(x)$  son linealmente dependientes, se cumple entonces  $J_p(x) = (-1)^p J_{-p}(x)$ . Si  $p \notin \mathbb{N}$  y  $x \rightarrow 0$ , entonces  $J_p(x) \approx \frac{x^p}{2^p\Gamma(p+1)}$  y  $J_{-p}(x) \approx \frac{x^{-p}}{2^p\Gamma(-p+1)}$ .

La función modificada de Bessel de primera clase,  $I_p(x)$ , de orden  $p$ , es

$$I_p(x) = i^{-p}J_p(ix) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!\Gamma(p+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!\Gamma(p+3)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+6}}{3!\Gamma(p+4)} + \dots$$

La función de Bessel de segunda clase,  $N_p(x)$ , de orden  $p$ , es

$$N_p(x) = \begin{cases} \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\text{sen}(p\pi)}, & p \neq 0, 1, 2, 3, \dots \\ \lim_{\lambda \rightarrow p} \frac{J_\lambda(x)\cos(\lambda\pi) - J_{-\lambda}(x)}{\text{sen}(\lambda\pi)} = N_\lambda(x), & p = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

La función modificada de Bessel de segunda clase de orden  $K_p(x)$ , es

$$K_p(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\text{sen}(p\pi)} \right], & p \neq 0, 1, 2, 3, \dots \\ \lim_{\lambda \rightarrow p} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-\lambda}(x) - I_\lambda(x)}{\text{sen}(\lambda\pi)} \right], & p = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Las funciones  $J_p(x)$  y  $N_p(x)$  son linealmente independientes, luego la solución general de la ecuación de Bessel en el caso  $p = \lambda \in \mathbb{N}$  es combinación lineal de  $J_p(x)$  y  $N_p(x)$ . Si  $p \in \mathbb{N}$  y  $x \rightarrow 0$ , entonces  $N_p(x) \approx \frac{(p-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p}$ ,  $p \geq 1$  y  $N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{x}{2}\right)$

### 3.2 Las Funciones de Bessel

Existen ecuaciones diferenciales que generan nuevas funciones, tal como las ecuaciones diferenciales de Bessel, la particularidad es que estas funciones se aplican al campo de física. Se escribe de modo genérico

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \frac{1}{n!(p+n)!},$$

esta es la función de Bessel de orden  $p \in \mathbb{Z}^+$ . Se generaliza esta expresión utilizando la función gamma definida como,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

$z$  es el argumento complejo, en este caso no sólo en los reales, se extiende también a los complejos, antes había presencia del factorial, lo cual está definido para enteros positivos. En el caso de generalizar para  $z$  complejo, se destaca que  $Re(z) > 0$  [20, 21].

Entonces,

$$J_{\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda+n+1)}$$

La definición que se dio sobre la función de Bessel para  $p$  enteros positivos lo generalizamos a cualquier número real,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , incluso complejos, para que se entienda, tener en cuenta algunos resultados,

- (i)  $\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$
- (ii)  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$  si  $z = n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$
- (iii)  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)}$
- (iv) Una representación integral de la función sobre frontera denominado contorno de Riemann-Hanke

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dt$$

tenemos que  $\gamma$  es cualquier contorno del plano complejo que envuelve al punto  $t = 0$ , en el sentido antihorario y que tiende al infinito a lo largo del eje real. Es decir, se ha pasado a una integral compleja, también es útil

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-t} t^{-z-1} dt,$$

donde la frontera es cualquiera que termina en el punto  $t = 0$ , en el sentido antihorario, si la integración es en el sentido contrario obtenemos negativo, la integración puede ser en coordenadas polares o cualquier coordenadas más cómoda en la variable compleja.

Regresando a la función de Bessel, en particular si  $\lambda = -m$  y cambiar el signo a  $n' = n - m = 0, 1, 2, \dots$ , la suma va iniciar en  $n'$ , entonces

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_n(x),$$

lo cual lleva a una serie de expresiones o fórmulas para las funciones de Bessel, asociado a las formas en la que fueron construidas, se escribe fórmulas asociadas a las funciones de Bessel y muchos reciben el nombre de recurrencia porque nos pone en términos de las funciones de Bessel [13],

$$\begin{aligned}
 J_{-n}(x) &= (-1)^n J_n(x), n \in \mathbb{Z} \\
 \frac{d}{dx} \left( \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \right) &= -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x), \\
 \frac{d}{d\lambda} (x^\lambda J_\lambda) &= x^\lambda J_{\lambda-1}(x) \\
 -J_{\lambda+1}(x) &= -\frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) + J'_\lambda(x) \\
 J_{\lambda-1}(x) &= \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) + J'_\lambda(x) \\
 J_{\lambda+1}(x) &= \frac{2\lambda}{x} J_\lambda(x) + J_{\lambda-1}(x) \\
 J_{\lambda-1}(x) - J_{\lambda+1}(x) &= 2J'_\lambda(x) \\
 \int x^\lambda J_{\lambda-1}(x) dx &= x^\lambda J_\lambda(x) + c \\
 \int x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x) dx &= -x^{-\lambda} J_\lambda(x) + c \\
 \int x J_0(x) dx &= x J_1(x) + c \\
 \int x^2 J_0(x) dx &= -x^2 J_0(x) + 2x J_1(x) + c \\
 \int x^3 J_0(x) dx &= 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x) + c
 \end{aligned}$$

aunque algunas integrales terminan siendo impropia, es infinito a lo largo del eje X, a la hora de aplicar derivadas es para

$$\begin{aligned}
 J_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{x}{2} \right)^{2n+p} \frac{1}{n!(p+n)!} \\
 J_\lambda(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{x}{2} \right)^{2n+\lambda} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda+n+1)}.
 \end{aligned}$$

### 3.3 Propiedades de las funciones de Bessel,

La complejidad matemática de las mismas requiere de un análisis al momento de aplicar conceptos a situaciones concretas. Primero la ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

la solución por ser de segundo orden es la superposición de dos funciones que son linealmente independiente entre sí,

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 N_p(x).$$

Por ahora interesa las funciones de Bessel con algunas propiedades, el interés de esta función responde a un problema que viene de una ecuación diferencial de segundo orden, en la cual se requiere que la solución en esencia sea acotado finita, y las funciones de Newmann no son finitas (son infinitas), entonces no pueden ser soluciones de nuestro problema físico, razón de su interés

es su consistencia. Para el caso que se requiera una función de Newmann se puede aplicar para otro problema.

$$J_p(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{p!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!(p+2)!} - \dots + \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!} - \dots,$$

se observa que las funciones de orden par son par y de orden impar son impares,

$$J_p(x) = x^p \left[ \frac{1}{p!2^p} - \frac{x^2}{1!(p+1)!2^{p+2}} + \frac{x^4}{2!(p+2)!2^{p+4}} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!(p+k)!2^{p+2k}} - \dots \right].$$

Todas las funciones de Bessel son continuas y definida en la recta numérica, la continuidad viene del hecho de ser una serie de potencia y es derivable infinitas veces, luego es continua y tiene derivadas de cualquier orden, su analiticidad viene por la extensión analítica de la función real.

Cada función de Bessel tiene un conjunto de raíces reales, se considera sólo los positivos en semieje positivo, pueden ser numerados con los números naturales en forma ascendentes. Si  $J_0(x) = 0$ , las raíces están en el eje X, estas son  $u_1, u_2, \dots$ , de la misma forma pueden ser numeradas para  $J_1(x)$  y  $J_2(x)$ . La igualdad asintótica y otros, son resultados importantes y son expresiones muy utilizadas,

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x), p = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x), p = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{d}{dx} [J_0(x)] = -J_1(x), \frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x)$$

Para todo  $p \in \mathbb{R}$ , existe una constante  $c_p > 0$  tal que si  $x \geq 1$ , entonces

$$J_p(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + E_p(x), |E_p(x)| \leq \frac{c_p}{x^{3/2}}$$

$$J_{-p}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \text{ y } N_p(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), x \rightarrow \infty.$$

En cuanto a la función trigonométrica amortiguadas, esta igualdad es cada vez más cercano conforme tiende a  $x$ , lo cual es más precisas mientras mayor sea  $x$ , su periodicidad ayuda a explicar el problema, es asintótica si  $x \rightarrow \infty$ , la vibración es más pequeña hacia el eje  $x$ , para  $x$  negativo se cumple por ser par o impar, las raíces están separados por el periodo  $\pi$ , sin embargo, mientras más cerca al infinito está  $\pi$  con más decimales.

Las funciones de Bessel esféricas son funciones de la forma  $J_{p+\frac{1}{2}}(x)$ . Estas aparecen al resolver la ecuación de ondas en coordenadas esféricas, de lo anterior, las fórmulas,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}(x) \text{ y } J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x),$$

Si queremos  $J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\text{sen}x}{x} - \text{cos}x\right)$ , incluso obtener otras como  $J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\frac{3}{x}J_{-\frac{3}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\text{cos}x}{x} - \text{sen}x\right)$ , se puede observar que este proceso de obtener ondas puede continuar indefinidamente; por tanto, toda  $J_{p+\frac{1}{2}}(x)$  con  $p$  entero es elemental. Liouville demostró que estas eran las únicas funciones de Bessel elementales.

**Ceros de las funciones de Bessel.** Los ceros de algunas funciones de Bessel se encuentran en muchas referencias, el teorema es de utilidad.

Teorema 1. Sea  $u(x)$  cualquier solución no trivial de  $u'' + p(x)u = 0$ , con  $p(x) > 0$ , para todo  $x > 0$ . Si

$$\int_0^1 p(x)dx = \infty,$$

entonces  $u(x)$  tiene infinitos ceros en el semieje positivo.

Teorema 2. Sean  $y(x)$  y  $v(x)$  soluciones no triviales de las ecuaciones  $y'' + p(x)y = 0$  y  $v'' + q(x)v = 0$ , donde  $p(x), q(x)$  son funciones positivas tales que  $p(x) > q(x)$ . Entonces  $y(x)$  se anula al menos una vez entre dos ceros sucesivos de  $v(x)$ .

Es el teorema de comparación de Sturm, ahora analizamos el comportamiento de los ceros de las funciones de Bessel.

Proposición 3. Toda solución no trivial de la ecuación de Bessel tiene infinitos ceros positivos.

En efecto, sea  $u(x)$ , una solución no trivial de la ecuación de Bessel, en la forma normal  $u'' + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u = 0$ , cuando  $x$  es grande  $p(x) = 1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}$  es mayor que cero, al calcular la integral, y por el teorema 1,  $u(x)$  tiene infinitos ceros en el semieje positivo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x)dx &= \int_1^\infty \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[x - \frac{1-4p^2}{4x}\right]_1^b = \infty. \end{aligned}$$

Teorema 4. Sea  $u(x)$  una solución no trivial de la ecuación de Bessel  $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ , sobre el semieje positivo. Se cumple: (a) Si  $0 \leq p < \frac{1}{2}$ , entonces todo intervalo de longitud  $\pi$  contiene al menos un cero de  $u(x)$ , (b) si  $p = \frac{1}{2}$ , la distancia entre dos ceros sucesivos de  $u(x)$  es exactamente  $\pi$ , (c) si  $p > \frac{1}{2}$ , entonces todo intervalo cerrado de longitud  $\pi$  contiene a lo más un cero de  $u(x)$ .

En efecto, de la ecuación normal de Bessel  $u'' + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u = 0$ ; (a) si  $0 \leq p < \frac{1}{2}$ , entonces  $p(x) = 1 + \frac{1-4p^2}{4x^2} > 1$ . Sean  $u(x)$  una solución no trivial de  $u'' + p(x)u = 0$  y  $v(x)$

una solución no trivial de  $v'' + v = 0$ , como  $p(x) > q(x) = 1$ , por el teorema 2,  $u(x)$  se anula al menos una vez entre dos ceros sucesivos de  $v(x)$ . Mientras que las soluciones de  $v'' + v = 0$  son  $\text{sen}x$  y  $\text{cos}x$ , de forma que la distancia entre dos ceros de  $\text{sen}x$  y la distancia entre dos ceros de  $\text{cos}x$  es  $\pi$ , por tanto,  $u(x)$ , se anula al menos una vez en un intervalo de longitud  $\pi$ .

Por otro lado (b), cuando  $p = \frac{1}{2}$ , la ecuación es  $u'' + u = 0$ , cuyas soluciones son las funciones  $\text{sen}x$  y  $\text{cos}x$ . Entonces  $y_h(x)$  se anula exactamente una vez en un intervalo de longitud  $\pi$ . Sin embargo (c), si  $p > \frac{1}{2}$ ,  $p(x) = 1 + \frac{1-4p^2}{4x^2} < 1$ . Sean  $u(x)$  una solución no trivial de  $u'' + p(x)u = 0$  y  $v(x)$  una solución no trivial de  $v'' + v = 0$ , como  $1 = q(x) > p(x)$ , por el teorema 2, se tiene que  $v(x)$  se anula al menos una vez entre dos ceros de sucesivos de  $u(x)$ , se precisa que la distancia entre dos ceros sucesivos de  $v(x)$  es  $\pi$ , luego  $v(x)$  se anula al menos una vez entre dos ceros sucesivos de  $u(x)$ . Por tanto,  $u(x)$  se anula a lo más una vez entre dos ceros de  $v(x)$ ; de esta forma, un intervalo de longitud  $\pi$  contiene a lo más un cero de  $u(x)$ .

En física, tenemos un límite asociado con la medición, no podemos medir más de la exactitud de la medición de nuestros instrumentos; por lo tanto, a partir de la cuarta raíz ya prácticamente el valor real de la diferencia en  $\pi$ , no es significativo pero se utiliza con frecuencia. En efecto para  $x$  grande la diferencia entre dos raíces consecutivas es aproximadamente igual a  $\pi$ , con datos de la tabla 1 se puede evidenciar estas aproximaciones,  $\Delta_1 = 5,52 - 2,40 = 3,12 \cong \pi$ , en general si  $u_n$  son las raíces, entonces se tiene  $u_{n+1} \approx u_n + \pi$ , para efectos prácticos utilizamos la estimación, a partir del séptimo decimal ya casi es exacto a  $\pi$ .

Tabla 1: ceros de las funciones de Bessel

X	Valore de $x$ cuando $J_p(x) = 0$						
	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$
Primer cero	2,40	3,83	5,14	6,38	7,59	8,87	9,93
Segundo cero	5,52	7,02	8,42	9,76	11,06	12,34	13,59
Tercer cero	8,65	10,17	11,62	13,02	14,37	15,70	17,00
Cuarto cero	11,79	13,32	14,80	16,22	17,62	18,98	20,32
Quinto cero	14,93	16,47	17,96	19,41	20,83	22,21	25,59
Sexto cero	18,07	19,61	21,12	22,58	24,02	25,43	26,82
Séptimo cero	21,21	22,76	24,27	25,75	27,20	28,63	30,03
Octavo cero	24,35	25,90	27,42	28,91	30,37	31,81	33,23

Los gráficos 1, 2 muestran una oscilación amortiguada. Al comparar los gráficos de las funciones de Bessel con los gráficos de las funciones de Newmann, cuando  $x \rightarrow 0^+$ , esto significa una ruptura, en la derecha ambos son parecido.

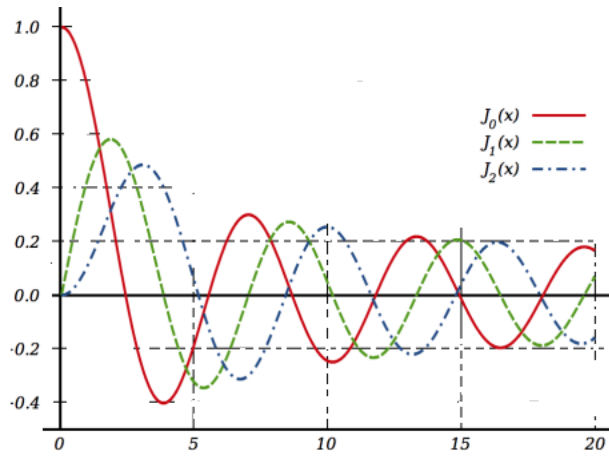


Figura 1: Funciones de Bessel de segunda para  $p = 0,1,2$

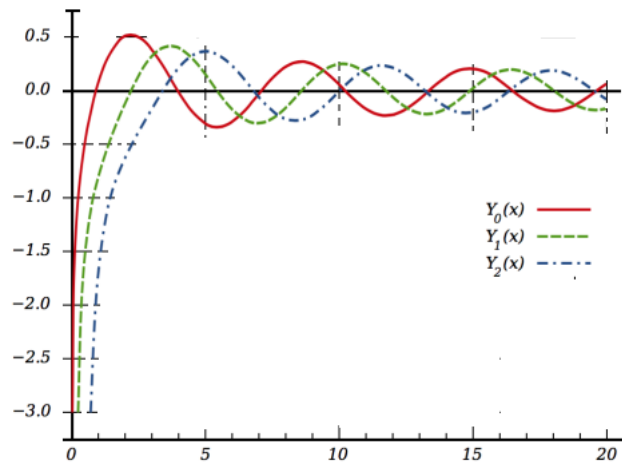


Figura 2: Funciones de Bessel de segunda especie

Proposición 5. Entre dos ceros de  $J_p(x)$  hay al menos un cero de  $J_{p+1}(x)$ .

En efecto, por la proposición 3,  $J_p(x)$  tiene infinitos ceros positivos, por otro lado, los ceros positivos de  $x^{-p}J_p(x)$  y los ceros positivos de  $J_p(x)$  son los mismos. Se asume que  $u_1$  y  $u_2$  son dos ceros positivos de  $x^{-p}J_p(x)$ , siendo  $u_1 < u_2$ ; la función  $x^{-p}J_p(x)$  es continua en el intervalo  $[u_1, u_2]$ , derivable en  $]u_1, u_2[$  y se tiene  $u_1^{-p}J_p(u_1) = u_2^{-p}J_p(u_2)$ . El teorema de Rolle afirma existe un punto  $r \in ]u_1, u_2[$  que cumple,

$$\left(\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)]\right)_{x=r} = 0,$$

sin embargo,

$$\left(\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)]\right)_{x=r} = -r^{-p}J_{p+1}(r),$$

Por tanto,  $J_{p+1}(r) = 0$ . En consecuencia entre dos ceros positivos sucesivos de  $J_p(x)$  existe al menos un cero positivo de  $J_{p+1}(x)$ .

Proposición 6. Entre dos ceros  $J_{p+1}(x)$  existe al menos un cero de  $J_p(x)$ .

En efecto, conforme a la proposición 3,  $J_{p+1}(x)$  tiene infinitos ceros positivos, además, los infinitos ceros de  $J_{p+1}(x)$  son los mismo ceros positivos de  $x^{p+1}J_{p+1}(x)$ . Sea  $u_1$  y  $u_2$  son dos ceros positivos de  $x^{p+1}J_{p+1}(x)$ , siendo  $u_1 < u_2$ ; la función  $x^{p+1}J_{p+1}(x)$  es continua en el intervalo  $[u_1, u_2]$ , derivable en  $]u_1, u_2[$  y se tiene  $u_1^{p+1}J_{p+1}(u_1) = u_2^{p+1}J_{p+1}(u_2)$ . El teorema de Rolle afirma existe un punto  $s \in ]u_1, u_2[$  que cumple,

$$\left(\frac{d}{dx}[x^{p+1}J_{p+1}(x)]\right)_{x=s} = 0,$$

sin embargo,

$$\left(\frac{d}{dx}[x^{p+1}J_{p+1}(x)]\right)_{x=s} = s^{p+1}J_p(s),$$

Por tanto,  $J_p(s) = 0$ . En consecuencia entre dos ceros positivos sucesivos de  $J_{p+1}(x)$  existe al menos un cero positivo de  $J_p(x)$ , luego entre dos ceros positivos sucesivos de  $J_{p+1}(x)$  existe al menos un cero positivo de  $J_p(x)$ . De la proposición 5 y 6, los resultados son inmediatos, los ceros positivos  $J_p(x)$  y de  $J_{p+1}(x)$  se presentan alternadamente, esto es, entre cada par de ceros sucesivos de una ellas hay exactamente un cero de la otra. Esto se ve en la figura 1, donde se muestra representado la función  $J_0(x)$  y  $J_1(x)$ .

**Ortogonalidad.** Los valores propios y las funciones propias que se tiene son heredados de los problemas de Sturm Liouville y cumplen propiedades. A cada valor propio  $\lambda_k = \frac{u_k^2}{L}$  le corresponde solo una función propia  $J_p\left(\frac{u_k x}{L}\right)$ , dos funciones propias diferentes son ortogonales con peso  $x$ .

Proposición 7. Sean  $x \in [0, L]$ ,  $u_k$  y  $u_m$  los ceros positivos de alguna función de Bessel fija  $J_p(x)$  con  $p \geq 0$ , se cumple,

$$\int_0^L J_p\left(\frac{u_k x}{L}\right) J_p\left(\frac{u_m x}{L}\right) x dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m \\ \frac{L^2}{2} [J'_p(u_k)]^2 & \text{si } k = m \end{cases}$$

La afirmación es casi una herencia del problema de Sturm Liouville, sin embargo, vamos a demostrar, primero tenemos, para  $L = 1$ , esto hace perder generalidad, después se puede hacer un cambio de variable en la ecuación de Bessel, si reemplazamos la función de Bessel, se obtiene la identidad

$$\left[x \frac{d}{dx} J_p(\varepsilon x)\right]' + \left(\varepsilon^2 x^2 - \frac{p^2}{x}\right) J_p(\varepsilon x) \equiv 0 \quad (4)$$

ahora si  $\varepsilon = u_k$  se tiene,

$$\left[ x \frac{d}{dx} J_p(u_k x) \right]' + \left( u_k^2 x^2 - \frac{p^2}{x} \right) J_p(u_k x) \equiv 0 \quad (5)$$

siendo  $\varepsilon$  un valor genérico,  $u_k$  ya es específico. Ahora, la ecuación (4) por  $xJ_p(u_k x)$ , la ecuación (5) por  $xJ_p(\varepsilon x)$ , en consecuencia al restar de ambos se obtiene,

$$J_p(\varepsilon x) \left[ x \frac{d}{dx} J_p(u_k x) \right]' - J_p(u_k x) \left[ x \frac{d}{dx} J_p(\varepsilon x) \right]' + (u_k^2 - \varepsilon^2) x J_p(u_k x) J_p(\varepsilon x) = 0,$$

luego se integra de 0 a 1, la integración es por partes

$$J_p(\varepsilon x) \left[ x \frac{d}{dx} J_p(u_k x) \right]' = \left[ J_p(\varepsilon x) x \frac{d}{dx} J_p(u_k x) \right]' - x \frac{dJ_p(\varepsilon x)}{dx} \frac{dJ_p(u_k x)}{dx}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} &= \left[ J_p(\varepsilon x) x \frac{d}{dx} J_p(u_k x) - J_p(u_k x) x \frac{d}{dx} J_p(\varepsilon x) \right]_0^1 \\ &= (\varepsilon^2 - u_k^2) \int_0^1 x J_p(u_k x) J_p(\varepsilon x) dx, \end{aligned}$$

es decir,

$$\left[ J_p(\varepsilon x) x J_p'(u_k x) u_k - J_p(u_k x) x J_p'(\varepsilon x) \varepsilon \right]_0^1 = (\varepsilon^2 - u_k^2) \int_0^1 x J_p(u_k x) J_p(\varepsilon x) dx$$

evaluando límites,

$$u_k J_p(\varepsilon) J_p'(u_k) = (\varepsilon^2 - u_k^2) \int_0^1 x J_p(u_k x) J_p(\varepsilon x) dx$$

de donde se obtiene,

$$\int_0^1 x J_p(u_k x) J_p(\varepsilon x) dx = \frac{u_k J_p(\varepsilon) J_p'(u_k)}{(\varepsilon^2 - u_k^2)},$$

lo cual es una forma indeterminada, se aplica L'Hôpital,

$$\int_0^1 x [J_p(u_k x)]^2 dx = \frac{1}{2} [J_p'(u_k x)]^2$$

para un cambio de variable  $\frac{x}{L} = z$ , se llega a la ortogonalidad de la función de Bessel,

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[ J_p \left( \frac{u_k x}{L} \right) \right]^2 x dx &= L^2 \int_0^1 [J_p(u_k z)]^2 z dz \\ &= \frac{L^2}{2} [J_p'(u_k)]^2. \end{aligned}$$

**Serie de Bessel.** Para muchas investigaciones en física matemática resulta apropiado obtener una función en términos de Bessel. Se considera una serie de la forma [22, 23],

$$b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(u_n x) = a_1 J_p(u_1 x) + a_2 J_p(u_2 x) + \dots \quad (6)$$

donde  $b(x)$  está definida en el intervalo  $[0,1]$  y los  $u_n$  son los ceros de una función de Bessel fija  $J_p(x)$ , con  $p \geq 0$ , analizamos en el intervalo  $[0,1]$  y mediante cambio de variable es posible extender al intervalo  $[0, L]$ .

En el caso que es posible escribir la función  $b(x)$  como un desarrollo de la forma (6), entonces multiplicamos en ambos miembros por  $xJ_p(u_m x)$  resulta,

$$x b(x) J_p(u_m x) = \sum_{n=1}^{\infty} x a_n J_p(u_m x) J_p(u_n x).$$

Integrando cada termino en  $[0,1]$ , aplicando la ortogonalidad se obtiene,

$$\begin{aligned}\int_0^1 xb(x)J_p(u_mx)dx &= \int_0^1 [\sum_{n=1}^{\infty} xa_n J_p(u_mx)J_p(u_nx)]dx \\ &= \int_0^1 xa_m (J_p(u_mx))^2 dx = \frac{1}{2} a_m J_{p+1}(u_m)^2,\end{aligned}$$

cambiamos  $m$  por  $n$ , se obtiene la fórmula de los  $a_n$  y con propiedad es la serie de Fourier-Bessel,

$$a_n = \frac{2}{J_{p+1}(u_m)^2} \int_0^1 xa_m (J_p(u_mx))^2 dx.$$

Respecto de la convergencia, existen condiciones bajo las cuales converge la serie de Bessel con suma  $b(x)$ .

**Teorema 8.** Si  $b(x)$  y  $b'(x)$  tienen a lo más un número finito de discontinuidades de salto en el intervalo  $[0,1]$ . Si  $x \in ]0,1[$ , entonces la serie de Bessel converge a  $b(x)$  cuando  $x$  es un punto de continuidad de esta función, y a  $\frac{1}{2}[b(x^-) + b(x^+)]$  cuando  $x$  es un punto de discontinuidad.

Sin embargo, en el extremo  $x = 1$  la serie converge a cero independientemente de cualquier función  $J_p(u_n)$ , también converge a cero en  $x = 0$ , si  $p > 0$  y a  $b(0^+)$  si  $p = 0$ .

**Integral de Bessel.** Se trata de deducir la integral de Bessel, encontrar las funciones  $J_p(x)$  en la una fórmula integral. De la expresión,  $\frac{x}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = ix\text{sen}\varphi$ , con la generación de la función generatriz se convierte en la suma [16],

$$e^{ix\text{sen}\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\varphi},$$

igualamos las partes reales, se tiene  $\cos(x\text{sen}\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\varphi)$ , por la relación  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ , considerando la paridad del coseno, se escribe

$$\begin{aligned}\cos(x\text{sen}\varphi) &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\cos(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\varphi) \\ \cos(x\text{sen}\varphi) &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] J_n(x)\cos(n\varphi) \\ &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\varphi).\end{aligned}$$

En cuanto  $\varphi = 0$ , queda la serie  $1 = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = J_0(x) + 2J_2(x) + \dots$ , mientras que cuando  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , es la serie  $\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(n\pi) = J_0(x) - 2J_2(x) + \dots$ . Cuando se iguala la parte imaginaria, se tiene  $\text{sen}(x\text{sen}\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\text{sen}(n\varphi)$ , por la relación  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ , considerando que seno es impar, se escribe

$$\begin{aligned}\text{sen}(x\text{sen}\varphi) &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\text{sen}(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{sen}(-n\varphi) \\ \text{sen}(x\text{sen}\varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^{n+1}] J_n(x)\text{sen}(n\varphi) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\text{sen}((2n-1)\varphi).\end{aligned}$$

Cuando  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  es la serie  $\text{sen } x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \cos(n\pi) = 2J_1(x) - 2J_3(x) + \dots$ . Estos resultados muestran la estrecha relación de las funciones de Bessel con las funciones trigonométricas seno y coseno.

Proposición 9. Sea  $p$  un entero,  $J_p(x)$  la función de Bessel de orden  $p$  y  $\varphi \in [0, \pi]$ , entonces se cumple la integral  $J_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(p\varphi - x \text{sen}\varphi) d\varphi$ .

En efecto, al multiplicar  $\cos(x \text{sen}\varphi)$  por  $\cos(m\varphi)$  y  $\text{sen}(x \text{sen}\varphi)$  por  $\text{sen}(m\varphi)$ , se obtiene,

$$\cos(m\varphi) \cos(x \text{sen}\varphi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x) \cos(p\varphi) \cos(m\varphi)$$

$$\text{sen}(m\varphi) \text{sen}(x \text{sen}\varphi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x) \text{sen}(p\varphi) \text{sen}(m\varphi).$$

Aplicar la suma miembro a miembro, con aplicación de identidades trigonométricas para obtener,

$$\cos(m\varphi - x \text{sen}\varphi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x) \cos(p - m)\varphi,$$

el término  $p = m$  es  $J_m(x)$ . Por tanto, podemos escribir de la forma,

$$\cos(m\varphi - x \text{sen}\varphi) = J_m(x) + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq m}}^{\infty} J_p(x) \cos(p - m)\varphi,$$

integrando entre  $\varphi = 0$  y  $\varphi = \pi$  en ambos miembros, se tiene,

$$\int_0^{\pi} \cos(m\varphi - x \text{sen}\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} \left[ J_m(x) + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq m}}^{\infty} J_p(x) \cos(p - m)\varphi \right] d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} \cos(m\varphi - x \text{sen}\varphi) d\varphi = J_m(x)\pi,$$

es decir,

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m\varphi - x \text{sen}\varphi) d\varphi,$$

al cambiar  $m$  por  $p$ , resulta la integral de Bessel,

$$J_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(p\varphi - x \text{sen}\varphi) d\varphi.$$

### 3.4 La ecuación del movimiento

Para esta investigación, una membrana, es una fina lámina uniforme de un material flexible en un estado de tensión uniforme y sujeta a lo largo de una curva cerrada del plano  $xy$ . La membrana se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio y se suelta.

Se trata de formular una ecuación en derivadas parciales que describa el movimiento. En tal caso, sólo se considera pequeñas oscilaciones de una membrana libre. Asumiendo que las vibraciones son muy pequeñas y que la membrana sólo se mueve en la dirección  $u$  con desplazamiento dado en tiempo  $t$  por una función  $u = u(x, y, t)$ . Se toma un pequeño trozo de membrana limitado por los planos verticales que pasan por los puntos  $(x, y)$ ,  $(x + \Delta x, y)$ ,  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ,  $(x, y + \Delta y)$  del plano  $xy$ . Entonces, la masa del trozo considerado es  $m\Delta x\Delta y$ ,

siendo la masa por unidad de área. Mediante la segunda ley de Newton, la fuerza que actúa sobre él en la dirección de  $u$  es

$$m\Delta x\Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

Si la membrana se encuentra en la posición de equilibrio, el significado físico de la tensión  $T$  es: a lo largo de cualquier segmento de longitud  $\Delta s$ , el material de un lado ejerce una fuerza sobre el material del otro lado. Esta fuerza tiene magnitud  $T\Delta s$  y es normal al segmento  $\Delta s$ . De esta manera, las fuerzas sobre aristas opuestas en el pequeño trozo de membrana son paralelas al plano  $xy$ , luego, se anulan entre sí.

Por otro lado, si la membrana está ligeramente curvada, aunque la deformación es muy pequeña y la tensión es aún  $T$ , pero no actúa paralelamente al plano  $xy$ , sino que actúa paralelamente al plano tangente; por tanto, presenta componente vertical apreciable. La curvatura de nuestro trozo de membrana produce magnitudes diferentes para las componentes verticales sobre aristas opuestas y es responsables de las fuerzas de recuperación que produce el movimiento [22].

Sea un fragmento de membrana que notamos por PQRS está sólo ligeramente curvado. Sobre las aristas PQ Y SR las fuerzas son perpendiculares al eje  $x$  y casi paralelas al eje  $y$ , sus pequeñas componentes en los puntos  $(x, y)$ ,  $(x, y + \Delta y)$  son aproximadamente a

$$-T\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y \text{ y } T\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y+\Delta y},$$

cuya suma es,

$$T\Delta x \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y \right],$$

de manera similar para las aristas PS Y QR, entonces las componentes en los puntos  $(x, y)$ ,  $(x + \Delta x, y)$  son aproximadamente a

$$-T\Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \text{ y } T\Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x},$$

cuya suma es,

$$T\Delta y \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \right].$$

Por tanto, la fuerza total en la dirección de  $u$ , despreciando todas las fuerzas externas, es aproximadamente

$$F = T\Delta y \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \right] + T\Delta x \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y \right],$$

de manera que (7) se puede expresar,

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} + T \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y}{\Delta y}$$

tendiendo al límite,  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  se obtiene las derivadas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y}{\Delta y}.$$

Por último, si se denota  $c^2 = \frac{T}{m}$ , se llega a la ecuación de onda bidimensional,

$$c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

### 3.5 Problema de la membrana circular

Para resolver se tiene un círculo, la imaginación es lo siguiente, que se tiene un tambor, se encuentra sujeto a esa membrana de cuero, sujeto a uno de sus dos extremos, analizar que va pasar con ese tambor al darle un golpe en el centro, como resultado comenzará a oscilar, con radio del tambor  $r$ . El problema de las oscilaciones pequeñas de una membrana circular de radio  $r$  con extremos fijos, pues el borde está fijado y se expresa como,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0,$$

con la condición en el borde  $u(r, \varphi, t) = 0$ , otra condición adicional el valor que forma  $u$  con el centro  $|u(r, \varphi, t)| < M$ , el valor absoluto porque es una vibración hacia arriba y hacia abajo; es decir, forma un valor finito, puede ser ínfima la vibración. El problema junto con las condiciones de contorno se formula así [14]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0$$

$$u(r, \varphi, t) = 0$$

$$|u(r, \varphi, t)| < M$$

En el problema, aun no se está señalando que coordenadas son, aunque lo razonable sería utilizar coordenadas cilíndricas, pues resulta más cómodo a la hora de iniciar con el análisis. La membrana se ve de un lado donde los extremos están fijos y va a tener que estar oscilando alrededor de esos extremos, significa que al elegir un eje  $u$  que depende de la distancia al centro  $r$ , del ángulo  $\varphi$ , del tiempo  $t$ . La ecuación formulada es cuando la distancia al centro o en cualquier punto de membrana, eso depende de la forma como se plantea el problema, normalmente señalar donde lo tocamos, va estar asociado con las condiciones iniciales, en ese instante se da un pulso, imaginarse por un momento que se tiene una tapa de olla, luego golpeamos con una cuchara, esas son las condiciones iniciales, le podemos dar velocidad, una deformación inicial, eso es relativo.

Por otro lado, la ecuación es cero,  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0$  porque no hay una fuente vibrante, es decir, fuerza externa. No se trabajará la parte de condiciones iniciales, más bien si las condiciones de contorno de segundo orden y que lleva a un problema de Sturm Liouville.

Se quiere ver de dónde salen algunos datos, digamos la magnitud  $c$  que representa la velocidad del sonido, pues en una vibración genera un sonido y considerando coordenadas polares, de manera que será útil conocer el laplaciano en diferentes coordenadas,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

Se podría señalar que son coordenadas cilíndricas, pero sólo se toma la parte bidimensional. Es importante que el operador diferencial  $\nabla$ , hay muchos problemas que resultan en otras coordenadas distintas al cartesiano, para nuestro caso la simetría es axial, es decir, todo lo que pasa alrededor de este punto del eje vertical es lo mismo alrededor de ese eje, conviene utilizar un tipo de coordenada que tenga simetría axial, en este caso cilíndrica o polar. En otras, pueden ser esférica, caso de un toroide o hiperboloide.

Respecto de la tercera condición, debe ser acotado. Se puede estirar pero no infinitamente, pues para que tenga solución se requiere que sea limitado. Si es infinito se asume que se rompió, en este caso se trata de otro problema. Para el problema del tambor, se asume que el golpe no es muy fuerte para que no se rompa. El valor de  $M$  puede ser muy grande, pero estamos viendo el caso de oscilaciones pequeñas, para oscilaciones grandes el problema planteado cambia un poco, debe entenderse pequeño en el sentido del radio.

El interés es por las oscilaciones que tiene un comportamiento armónico; por lo tanto, se busca una solución de la forma,

$$u(r, \varphi, t) = U(r, \varphi) e^{-i\omega t},$$

en vista que tiene ver con seno y cosenos toma la forma exponencial,  $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t)$ , dependiendo del problema se podría tomar seno o coseno, es la representación de una oscilación armónica de modo general. Al reemplazar en el operador nabra, al tener en cuenta  $e^{-i\omega t} \neq 0, \forall t, \omega$ , se tiene,

$$\nabla^2 u = -k^2 U, k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \text{ y } u(a, \varphi) = 0,$$

la otra condición es la misma  $|u(a, \varphi)| < N$ , no es la misma  $M$  o puede ser, lo que interesa es que sea acotado. Hemos obtenido el problema del contorno para la ecuación de onda, basado en la ecuación de Helmholtz  $\nabla^2 u = -k^2 U$ , se va resolver utilizando el método de separación de variables. Sea la ecuación de separación de variables,

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

sustituyendo en

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

de la forma explícita

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0$$

haciendo cambio de función

$$R'' \varphi + \frac{1}{r} R' \Phi + \frac{1}{r^2} R \Phi'' + K^2 R \Phi = 0,$$

al hacer una división entre  $U = R\Phi$  se tiene

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r} \frac{\Phi''}{\Phi} + K^2 = 0,$$

es decir,

$$\frac{rR'' + R'}{rR} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = -k^2$$

separando variables

$$\frac{(rR)'}{rR} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = -k^2$$

$$\frac{(rR)'}{rR} + k^2 = -\frac{\Phi''}{r^2\Phi},$$

es decir,

$$\frac{r(rR)'}{R} + r^2 k^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = m.$$

Para  $\Phi$  resulta  $\Phi'' + m\Phi = 0$ , es la ecuación de un movimiento armónico simple, siendo  $m$  un parámetro de separación de variables, lo cual se toma como positivo, tener en cuenta que el valor del parámetro  $w$  se va definir a la hora de utilizar las condiciones iniciales. Para la parte radial, se tiene

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0,$$

el cambio de variable  $\delta = kr$ , permite hacer  $R(r) = Y(\delta)$ , es como

$$R_r = Y_r = y_\delta \cdot y_r = \frac{\partial y}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial r} = ky''.$$

En cuanto a la segunda derivada,

$$\begin{aligned} R_{rr} &= (R_r)_r = (y_\delta \cdot k)_r \\ &= (R_\delta)_r = k^2 Y_{\delta\delta} = k^2 Y'', \end{aligned}$$

es decir,

$$k^2 Y'' + \left( \frac{k^2}{\delta} \right) Y' + \left( k^2 - \frac{K^2}{\delta^2} m \right) Y = 0,$$

$$Y'' + \left( \frac{1}{\delta} \right) Y' + \left( 1 - \frac{1}{\delta^2} m \right) Y = 0.$$

Al cual se debe aumentar condiciones apropiadas para obtener un problema de contorno de la forma,

$$Y'' + \left(\frac{1}{\delta}\right)Y' + \left(1 - \frac{m^2}{\delta^2}\right)Y = 0$$

$$Y(ka) = 0, |Y(0)| < N,$$

lo cual representa un problema de Sturm Liouville, donde la ecuación diferencial de Bessel es

$$Y'' + \left(\frac{1}{\delta}\right)Y' + \left(1 - \frac{m^2}{\delta^2}\right)Y = 0.$$

Entonces vemos que el problema de la membrana circular y en general en la mayoría de los problemas que utilizamos el operador de Laplace en coordenadas cilíndricas o polares nos suele llevar a una ecuación diferencial de Bessel, es un problema de contorno, se tiene una ecuación diferencial de Bessel bajo condiciones de frontera o el problema de Sturm Liouville.

Respecto al criterio para el cambio de variable  $\delta = kr$  tiene que ver con la simetría circular, una dependencia del radio, un cambio frecuente cuando se tiene dependencias radiales y es el camino para llegar a la ecuación de Bessel, [18].

**Problema de contorno: valor propio y función propia.** Tenemos la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (8)$$

con las condiciones en el intervalo  $\langle 0, L \rangle$  con  $y(x)$  finita  $x \rightarrow 0^+$ ,  $y(L) = 0$ , es el problema de contorno a resolver. Si  $p \geq 0$ , es un número fijo, entonces es un problema de valor propio, el problema cumple las condiciones de Sturm Liouville; por tanto, los valores propios son mayores que cero y ordenado de forma decreciente,

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots$$

hasta el infinito  $\lambda$ , nuestro problema de contorno implica primero hallar que valores de  $\lambda$  que son soluciones del problema, son las soluciones correspondientes a esos  $\lambda$ . Analizamos casos, para  $\lambda = 0$ , es la ecuación,

$$x^2y'' - xy' - p^2y = 0,$$

aquí vamos a solucionar esta ecuación en dos casos, si  $p = 0$ , entonces  $x^2y'' - xy' = 0$ , es decir,  $xy'' - y' = 0$ , con solución general,

$$y(x) = c_1 + c_2 \ln x.$$

Cuando se toma las condiciones  $y(L) = 0$ , se tiene  $0 = c_1 + c_2 \ln L$ , lo cual exige  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ , implica que sólo hay una solución trivial  $y(x) = 0$ , en este caso no existe solución, pues se requiere soluciones no triviales.

Si en (8)  $p > 0$ , se construye la ecuación característica, luego se escribe con dos soluciones linealmente independientes,

$$y(x) = c_1 x^p + c_2 x^{-p}.$$

En el caso  $x \rightarrow 0^+$ , para que sea finita de nuevo se tiene una solución trivial, luego no existe solución. Por tanto, descartamos el hecho que  $\lambda = 0$ , solo pueden ser positivas, por tanto todos los valores propios son positivos. Haciendo  $\lambda = \varepsilon^2$ , donde  $\varepsilon > 0$ , luego

$$x^2 y'' + xy' + (\varepsilon^2 x^2 - p^2)y = 0,$$

hay que tener en cuenta que  $x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - p^2)y = 0$  no es la ecuación de Bessel, la ecuación de Bessel no tiene el factor de separación de variables  $\lambda x$ . La ecuación en su forma autoadjunta

$$(xy')' - \frac{p^2}{x}y + (\varepsilon^2 x)y = 0,$$

ahora, llevamos la ecuación a otra forma convencional haciendo el cambio de variable,  $\varepsilon x = t$  se tiene,

$$t^2 y_{tt} + ty_t + (t^2 - p^2)y = 0,$$

lo cual es una ecuación de Bessel de orden  $p$ , cuya solución general es,

$$y = c_1 J_p(t) + c_2 N_p(t),$$

es decir, tomando en cuenta el cambio se escribe,

$$y = c_1 J_p(\varepsilon x) + c_2 N_p(\varepsilon x)$$

de  $y(L) = 0$ , se obtiene  $c_1 J_p(\varepsilon L) = 0$ , dado que  $c_1$  debe ser diferente de cero, entonces  $J_p(\varepsilon L) = 0$ , pero, al ser  $\varepsilon L$  raíces de la función de Bessel, entonces  $\varepsilon L = u_k$ , así  $\varepsilon = \frac{u_k}{L}$ , de donde tenemos los valores propios  $\lambda = \varepsilon^2 = \frac{u_k^2}{L^2}$ . Por tanto, los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{u_1^2}{L^2}, \lambda_2 = \frac{u_2^2}{L^2}, \lambda_3 = \frac{u_3^2}{L^2}, \dots, \lambda_k = \frac{u_k^2}{L^2},$$

de esta forma cobra importancia las raíces de la ecuación de Bessel y las funciones propias quedan establecidas,

$$y_1 = J_p\left(\frac{u_1}{L}x\right), y_2 = J_p\left(\frac{u_2}{L}x\right), y_3 = J_p\left(\frac{u_3}{L}x\right), \dots, y_k = J_p\left(\frac{u_k}{L}x\right),$$

de esta forma se ha encontrado los valores propios, asociados a las funciones propias, del problema de contorno de las funciones de Bessel.

#### IV. DISCUSIÓN

En el problema de la membrana circular, se tiene  $u(r, \varphi, t) = U(r, \varphi)e^{-i\omega t}$ , por separación de variables, se obtuvo una función para  $\Phi$  y  $R$ , donde se obtienen soluciones para  $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$

$$u(r, \varphi, t) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)e^{-i\omega t},$$

mientras que  $R(r)$  es función de Bessel, y son soluciones radiales,  $R(r) = J_m(u_k^m r)$ . La solución general del problema es

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{m,k} A_{mk} e^{-i\omega_{mk} t} e^{im\varphi} J_m(u_k^m r).$$

En adelante, todo lo demás depende del problema específico, tener en cuenta que se está trabajando sobre una membrana que es una superficie plana, lo consideramos armónico, por eso  $w$ ,  $A_{mk}$  es la mayor amplitud, después de eso todo va decayendo.

En el caso de utilizar las condiciones iniciales, respecto al caso de una membrana que está desplazada a una  $u = f(r)$ , independientemente de la variable  $\varphi$  y que en el momento  $t = 0$  se suelta partiendo del reposo; es decir, con la condición inicial  $u(r, \varphi, 0) = f(r)$  y  $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0$ . Se tiene que determinar la forma de  $u(r, \varphi, t)$  en cualquier instante posterior a  $t > 0$ , [7].

Conforme a la condición, la forma inicial es independiente de  $\varphi$ ; luego  $\Phi(\varphi)$  tiene que ser constante y  $p$  tiene que ser cero. Por tanto, denotando los ceros positivos de  $J_0(x)$  por  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, \dots$ , luego

$$J_0(u_k r)[c_1 \cos(u_k a t) + c_2 \sen(u_k a t)], k = 1, 2, 3, \dots$$

por  $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0$ , se tiene que  $c_2 = 0$  y entonces, las soluciones particulares son los múltiplos constantes de las funciones  $J_0(u_k r)[c_1 \cos(u_k a t)]$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , las sumas de soluciones forman también el espacio de soluciones, luego la solución general es la serie infinita,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(u_k r) \cos(u_k a t).$$

Para satisfacer la condición inicial  $u(r, \varphi, 0) = f(r)$ , haciendo  $t = 0$  en, igualamos los resultados a  $f(r)$ . El teorema 9, asegura el comportamiento estable de  $f(r)$ , entonces la serie converge a  $f(r)$ . Los coeficientes  $a_k$  pueden ser definidos por la expresión

$$a_k = \frac{2}{[J_1(u_k)]^2} \int_0^1 r f(r) J_0(u_k r) dr \quad (9)$$

de esta forma, (9) es solución formal del problema de la membrana, que satisface la condición de frontera y las condiciones iniciales planteadas.

## V. CONCLUSIONES

La función de Bessel es una solución matemática para resolver problemas en coordenadas cilíndricas. Se usa en campos como la ingeniería y se originó en la astronomía. Aunque puede ser complicada de entender, su interpretación correcta es muy útil para encontrar soluciones en distintas situaciones.

La vibración hace que se formen diferentes tipos de ondas, cuando se empuja algo, lo mueve de su lugar y cuando estudiamos el ruido, la vibración y la severidad en un sistema, lo hacemos con algunas características específicas. Las formas de controlar las vibraciones

son distintas a las formas de controlar el ruido, aunque las vibraciones y el ruido a menudo tienen las mismas causas y pueden causar ruido, pero se propagan de manera diferente.

Al final se logra hacer unos cálculos para describir cómo vibra una membrana circular, se utiliza fórmula que involucra el tiempo y la posición en la membrana, estas cumplen con reglas específicas en los bordes de la membrana. La solución se puede escribir como una suma de funciones donde los detalles corresponde a condiciones puntuales dada; así, las funciones de Bessel actúa para organizar el movimiento causado por la recuperación de fuerza causadas por cambios en la deformación.

## REFERENCIAS

- [1] H. Asmar, Nakhle, *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*. Upper Saddle River, N.J., Pearson Prentice Hall, 2005.
- [2] Arfken and Weber. *Mathematical Methods for physicists*. Elseive Academy, 2005.
- [3] N.N. Levedev, *Special funtions and their applications*, Dover publications, New York, 1972.
- [4] J. D. Jackson. *Electrodinámica Clásica*. Jhon Wiley, 1998
- [5] David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Second Edition, Pearson Education Inc., 2005,
- [6] R. E. O' Malley, *Thining about Ordinary Differential Equations*, Cambridge University Press, 1997.
- [7] P. W. Davis, *Differential Equations for Mathematics, Science, and Engineering*. Prentice Hall, Inc,1992.
- [8] V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*. Springer, Berlin, 1992.
- [9] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [10] F. Brauer and J. A Nohel, *Ordinary Differential Equations*. Benjamin, New York, 1967.
- [11] E. H. Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Limusa, Grupo Noriega, México, D. F., 2016.
- [12] M. R. Spiegel, *Matemáticas avanzadas para ingenieros*, Indo Latinoamericana, Buenos Aires, Argentina, 2011.
- [13] H. Dehestani: Y. Ordokhani and M. Razzaghi, *Fractional-order Bessel wavelet functions for solving variable order fractional optimal control problems with estimation error*, International Journal of Systems Science, 2020.

- [14] J. M. T. S. Cruz and D. Sevcovic, *On solutions of a partial integro-differential equation in Bessel potential space with applications in option pricing models*, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2020.
- [15] J. A. Barceló, A. Ruiz and L. Vega, *Weighted estimates for the Helmholtz equation and some applications*, J. Funct. Anal, 1997.
- [16] D. Muller and A. Seeger, *Regularity properties of wave propagation on conic manifolds and applications to spectral multipliers*, Adv. Math, 2001.
- [17] A. Córdoba, *The disc multiplier*, Duke Math. J., 1989.
- [18] George F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw Hill, Madrid, 1993.
- [19] G. H., Simmons. *Matemática con modelamiento matemático elemental y aplicaciones prácticas*. Ed. Reverte. México, D. F. 2018.
- [20] W. Leighton, *Ordinary Differential Equations*, Wadsworth, Belmont, California, 1996.
- [21] D. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Mc Graw Hill, 2003.
- [22] M. L. Brito-Vallina, I. Alemán-Romero, et al, *Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros*, Ingeniería Mecánica vol.14, La Habana, 2011, [online]  
Recuperado de [http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S1815-59442011000200005&script=sci\\_arttext](http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S1815-59442011000200005&script=sci_arttext)
- [23] Mark A. Pinsk, *Introducción al Análisis de Fourier y las Ondoletas*. Editorial Thomson. México, 2003.