Universidad Nacional
SAN LUIS GONZAGA

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN LUIS GONZAGA
EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

CONSTANCIA

El que suscribe, deja constancia que se ha realizado el análisis con el software de verificación de similitud al documento cuyo título es:

"PERSPECTIVA DIDÁCTICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL NO LINEAL DE RICCATI"

Presentado por:

DR. ALBERTO ERNESTO GUTIERREZ BORDA
DR. ORLANDO EUGENIO BERROCAL NAVARRO

El resultado obtenido es el **7% de Similitud,** por el cual se otorga el calificativo de:

APROBADO, según Reglamento de Evaluación de la Originalidad

Se adjunta al presente el reporte de evaluación con el software de verificación de originalidad.

Ica, 28 de Diciembre del 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"
FACULTAD DE CIENCIAS
DR. CARLOS APARCANA AQUIJE
Director (e) de la Unidad de Investigación

UNIVERSIDAD NACIONAL “SAN LUIS GONZAGA”

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

PERSPECTIVA DIDÁCTICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL NO LINEAL DE RICCATI

ÁREA ACADÉMICA:
CIENCIAS E INGENIERÍAS

LINEA DE INVESTIGACIÓN:
CIENCIAS NATURALES, INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS SOSTENIBLES

PRODUCTO FINAL DE LA INVESTIGACIÓN:
PUBLICACIÓN DE ARTÍCULO CIENTÍFICO

DR. ALBERTO ERNESTO GUTIERREZ BORDA (autor principal)
https://orcid.org/0000-0001-6260-2419

DR. ORLANDO EUGENIO BERROCAL NAVARRO (coautor)
https://orcid.org/0000-0002-6151-6540

ICA - 2023

ÍNDICE

RESUMEN

En general, las ecuaciones diferenciales no lineales son no resolubles y no es común encontrar una solución de forma cerrada; dentro de este grupo está la ecuación diferencial de Riccati $\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x^2 + C(t)x + D(t)$, cuya integración tiene mucho que ver entre las relaciones de B, C y D. El objetivo principal es proponer una perspectiva didáctica bajo el modelo Van Hiele, dosificar los niveles para el estudio de este problema, ya en el último nivel, aplicar un proceso de solución con métodos algebraicos que permitan resolver la ecuación de Riccati y generalizar casos especiales. Los resultados son propuestas viables dirigidos a estudiantes de ciencias e ingenierías, al descubrir nuevos métodos de solución con ayuda del álgebra y análisis.

Palabras claves: Ecuación de Riccati, ecuación diferencial no lineal, solución algebraica, modelo Van Hiele.

ABSTRACT

In general, nonlinear differential equations are not solvable and it is not common to find a closed-form solution; Within this group is the Riccati differential equation $\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x^2 + C(t)x + D(t)$, whose integration has a lot to do between the relations of B, C and D. The main objective is to propose a didactic perspective under the Van Hiele model, to dose the levels for the study of this problem, already at the last level, to apply a solution process with algebraic methods that allow solving the Riccati equation and generalizing special cases. The results are viable proposals aimed at science and engineering students, by discovering new solution methods with the help of algebra and analysis.

Keywords: Riccati equation, nonlinear differential equation, algebraic solution, Van Hiele model.

I. INTRODUCCIÓN

Los conceptos de ecuaciones diferenciales, forman parte del análisis matemático que describen muchos procesos de la vida real, está vinculada con la ciencia e ingeniería, donde destaca que los primeros métodos de solución fueron los algebraicos y numéricos, [1]. Cuando un problema es complejo, los métodos analíticos, tal como hacer cambios de variables pueden resultar adecuados; sin embargo, cuando se trata de una ecuación diferencial, no todas las soluciones se expresan por funciones elementales, [2].

Desde la perspectiva de la enseñanza, las ecuaciones diferenciales constituyen una asignatura de exigencia obligatorio para las carreras de ciencias, esto obliga prestarles atención y proponer nuevas formas de solución del problema [3, 4]. Al revisar el contexto de la evolución del cálculo, la integración y la diferenciación son herramientas fundamentales para el desarrollo de las ciencias; en consecuencia, tiene repercusiones en el aspecto sistémico de las ecuaciones diferenciales y sus métodos de solución, [5].

Según [6] señala que las ecuaciones diferenciales no lineales presentan dificultades para obtener una solución de forma cerrada; en particular, se tiene la ecuación formulada por Jacobo Riccati [7]), y que desde el principio esta ecuación, mantuvo ocupado a muchos matemáticos de la época como Leibniz, Goldbach y Bernoulli [8].

La ecuación de Riccati, corresponde a una de las tantas ecuaciones no lineales no resolubles por cuadraturas; sin embargo, durante la segunda mitad del siglo XX se dio auge investigativo a este problema, incluso hay artículos donde utilizan la teoría de Galois diferencial y otros optan como herramienta el álgebra, [9, 10].

En principio la ecuación de Riccati, requiere que se disponga de alguna información suplementaria, si se conoce una solución particular, utilizando un cambio apropiado de una función incógnita transforma la ecuación diferencial en otra lineal de primer orden en la nueva función incógnita; sin embargo, cuando no se conoce una solución particular, sigue siendo un problema abierto, [11-14].

En los resultados de esta investigación se analiza la ecuación de Riccati mediante los niveles propuesto por los Van Hiele. En 1957, los esposos Van Hiele, en los resultados de su tesis doctoral hablan de un desarrollo teórico y experimental, ponen en discusión los niveles de pensamiento, cuyo propósito tiene que ver con el mejoramiento de la enseñanza de la geometría. Uno de los principales objetivos que se busca en la elaboración de niveles, es de conocer los obstáculos que se les presenta a los estudiantes a la hora resolver un problema, [15].

Los antecedentes al estudio de los Van Hiele, se pueden encontrar en los trabajos elaborados por Polya, Bloom, Piaget, Watson, Brownell, Vinner y Hershkowitz y Dubinaky, todos en el mismo sentido geométrico, pero ya existen investigaciones recientes en la cual se aplica esta propuesta fuera del estudio geométrico donde han utilizado el modelo Van Hiele [16].

II. MATERIAL Y MÉTODOS

Es una investigación en matemática dentro del paradigma cualitativo, los fundamentos de la parte teórica conceptual se apoyan en el concepto matemático de las ecuaciones diferenciales aplicados a una situación concreta, sigue la secuencia análisis, síntesis y deducción. El método que se pone énfasis es el estudio por niveles, [17].

Se aplica una estrategia metodológica que ayude a los estudiantes de ecuaciones diferenciales a formular conceptos más profundos desde una perspectiva didáctica sobre todo desde la óptica del Modelo Van Hiele y que ayude hacer modelización matemática en su campo de formación, para este trabajo la base es la ecuación diferencial no lineal de Riccati. Es preciso tomar en cuenta que el uso de los problemas que encuentra el docente al fomentar conceptos matemáticos, es la complicación intrínseca de estos. Dentro de los obstáculos está del tipo genético y psicológico: esto es, el desarrollo personal del alumno y el otro obstáculo es del tipo didáctico y tiene que ver con el docente y su forma de enseñanza, mientras que los obstáculos del tipo epistemológico son asociados con la naturaleza de los conceptos, [18, 19].

Aplicamos los niveles de pensamiento presentados por los Van Hiele, y son cinco: Nivel 1: pre-descriptivo; Nivel 2: de reconocimiento visual; Nivel 3: de análisis; Nivel 4: de clasificación y relación; nivel 5: de deducción formal. La dimensión epistemológica, está formado por argumentos matemáticos de ecuaciones diferenciales; la dimensión cognitiva está asociado con las características cognitivas del estudiante, nivel de instrucción, formación matemática; la dimensión didáctica está asociado con las características del sistema de funcionamiento del sistema de enseñanza, [20, 21].

III. RESULTADOS

3.1 Nivel 1: pre-descriptivo

El nombre de la ecuación de Riccati (1676 – 1754), se le da a una ecuación que tiene la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x^2 + C(t)x + D(t)$$

con $B(t), C(t)$ y $D(t)$ funciones continuas en un cierto intervalo. La forma dada por D' Alembert en 1763 fue $t^m\, dz = dx + x^2 \frac{dt}{dz}$, su mérito tiene que ver con haber planteado el problema de la dificultad de separar variables cuando $z = t^m$; sin embargo, fue Daniel Bernoulli, que considera la ecuación $at^m + x^2 = b\frac{dx}{dt}$, precisando que la ecuación es posible resolverlo cuando $m = -2$, $m = -\frac{4n}{2n+1}$ y $m = -\frac{4n}{2n-1}$ con $n \in \mathbb{Z}$, [22, 23].

3.2 Nivel 2: reconocimiento visual

En este nivel se da la acción de clasificar, categorizar o conceptualizar, recibir información del entorno del problema. La ecuación diferencial no lineal de Riccati al tener la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x^2 + C(t)x + D(t) \qquad (n_{1.1})$$

con $B(t) \neq 0$, la sustitución

$$x(t) = \frac{1}{B(t)}\left[y(t) - \frac{C(t) + \frac{B'(t)}{B(t)}}{2}\right]$$

proporciona la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + u(t), \qquad (n_{1.2})$$

lo cual es un caso particular de la ecuación estudiada por Riccati; por tanto, una solución de esta ecuación, proporciona una solución general de Riccati. En efecto, el reconocimiento visual de llevar de ($n_{1.1}$) a ($n_{1.2}$) derivando en $x(t)$ reduce a la forma $\frac{dy(t)}{dt} = y^2 + u(t)$, [24].

3.3 Nivel 3: de análisis

A este nivel se puede examinar y comprender partes del conjunto de sistemas asociados con la solución del problema. Sea la ecuación diferencial $\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x^2 + C(t)x + D(t)$, se tiene algunos casos particulares:

(i) Si $B(t) = 0$, la ecuación de Riccati se transforma $\frac{d(t)}{dt} = C(t)x + D(t)$ y es una ecuación diferencial lineal.

(ii) Si $D(t) = 0$ la ecuación de Riccati se transforma en una ecuación diferencial de tipo Bernoulli $\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x^2 + C(t)x$.

En ambos casos, se conoce como obtener una solución general [25].

(iii) Cambio de variable independiente. Si f es continuamente diferenciable, con derivada no nula, el cambio de variable $t = f(u)$ conduce a la ecuación de Riccati

$$\frac{dx(t)}{dt} = B\big(f(u)\big)f'(u)x^2 + (C(f(u))f'(u))x + f'(u)D(f(u)) .$$

(iv) Cambio de variable dependiente. Haciendo

$$x(t) = \frac{a(t)y(t)+b(t)}{c(t)y(t)+d(t)},$$

resulta $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{(cy+b)\big(a'y+ay'+b\big)-(ay+b)\big(c'y+cy'+d\prime\big)}{(cy+d)^2}$ con algunas simplificaciones.

Casos especiales que analizan:

(a) si $x(t) = a(t)y(t)$ se obtiene la ecuación $\frac{dy(t)}{dt} = y^2 + \left(C(t) + \frac{B\prime(t)}{B(t)}\right)y + B(t)D(t)$.

(b) si $x(t) = y(t) + b(t)$ resulta la ecuación

$$\frac{dy(t)}{dt} + b'(t) = B(t)\big(y(t) + b(t)\big)^2 + C(t)\big(y(t) + b(t)\big) + D(t),$$

es la ecuación diferencial es de Riccati. Hay otros casos en los cuales la ecuación de Riccati son resolubles, llevando bajo transformación a la ecuación diferencial de tipo Bernoulli:

(b_1) si $x_1(t)$ es una solución, entonces la ecuación diferencial ordinaria de Riccati se linealiza

$$\frac{dv}{dt} + [2B(t)x_1(t) + C(t)]v = -B(t).$$

(b_2) Si se conocen tres soluciones de la ecuación de Riccati, $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ entonces

$$v(t) = \frac{1}{x_2(t)-x_1(t)} + k\left(\frac{1}{x_3(t)-x_1(t)} - \frac{1}{x_2(t)-x_1(t)}\right).$$

(b_3) Si se tiene cuatro soluciones $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ y $x_4(t)$ de la ecuación diferencial de Riccati, entonces se cumple

$$k = \frac{\frac{x_4(t)-x_2(t)}{x_4(t)-x_1(t)}}{\frac{x_3(t)-x_2(t)}{x_3(t)-x_1(t)}}.$$

(b_4) Cuando $B(t) = a\beta(t)$, $C(t) = b\beta(t)$, $D(t) = c\beta(t)$ la ecuación de Riccati es integrable; es decir, si $B(t), C(t), D(t)$ son proporcionales, entonces la ecuación es separable $\frac{dx(t)}{dt} = \beta(t)(ax^2 + bx + c)$.

3.4 Nivel 4: clasificación y relación

Las relaciones llevan equivalencias, similitud o diferencias, mientras que la clasificación, siendo un proceso mental permiten agrupar concepto matemático en base a su similitud. Hasta esta parte, el análisis realizado, nos permite clasificar adecuadamente algunas ecuaciones diferenciales de Riccati y su relación con ecuaciones diferenciales de segundo orden y otros. Como bien señala Henri Poincaré "las matemáticas no estudian objetos, si no relaciones entre objetos", por ejemplo, el método ideado por Darboux y Lie a finales del siglo XIX llevó a una caracterización intrínseca de las curvas a través de la ecuación diferencial de primer orden no lineal de Riccati, [26].

Existe una relación entre la ecuación diferencial de segundo orden y la de Riccati, más precisamente, la solución de esta última, es la que permite decidir si la de segundo orden tiene o no solución por medio de cuadratura.

Las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden, permite además obtener soluciones de la adjunta de tercer orden; es preciso, al solucionar la ecuación de Riccati mediante grupo de Lie, se requiere resolver una ecuación de tercer orden adjunta. La ecuación diferencial de tercer orden [27], tiene la forma general

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} + B(t)\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + C(t)\frac{f(t)}{dt} + D(t)f(t) = 0$$

siendo $B(t), C(t), D(t)$ son funciones continuas en el intervalo I. Considerando La transformación $f(t) = xe^{-\frac{1}{3}\int_{t_0}^{t} B(t)dt}$, se observa que ha desaparecido el término x'' lo cual lleva a la forma

$$x''' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

y es una adjunta general. Estos argumentos permiten formular varios teoremas para su nivel de formalización.

Teorema 1. Sea u, v un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $\frac{d^2s}{dt^2} + ns = 0$ [14], entonces la solución general de la adjunta viene dada por

$$x = c_1u^2 + c_2uv + c_3v^2.$$

La ecuación diferencial de orden dos puede escribirse en la forma general $f'' + p(t)f' + q(t)f = 0$, Pero, el cambio $exp\left\{-\frac{1}{2}\int p(t)dt\right\}$ transforma la ecuación a su forma reducida

$$x'' + n(t)x = 0, \qquad (t_1)$$

mientras que se si aplica a (t_1) el cambio $v = -\frac{x'}{x}$ se tiene la ecuación diferencial de Riccati

$$v' = v^2 + n(t). \qquad (t_2)$$

Por tanto, resolviendo la ecuación (t_2), se obtiene una solución de la general de segundo orden, y con ello la solución de la adjunta de tercer orden

$$x''' + 4nx' + 2n'x = 0.$$

Ecuación de segundo orden asociado a la ecuación de Riccati

En esta parte el propósito es buscar una relación de una ecuación diferencial lineal de segundo orden y una ecuación diferencial ordinaria no lineal de Riccati. Sea la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left[\frac{B'(t)}{B(t)} + C(t)\right]\frac{dx}{dt} + B(t)D(t)x = 0 \qquad (1)$$

asociada a la ecuación diferencial no lineal de Riccati

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y^2 + C(t)y + D(t). \qquad (2)$$

Se puede fundamentar las afirmaciones:

(a) Si $x(t)$ es solución de (1), entonces $y(t) = -\frac{x\prime(t)}{B(t)x(t)}$ es solución de (2).

(b) Si $y(t)$ es solución de (2), entonces $x(t) = e^{-\int \frac{x\prime(t)}{B(t)x(t)}dt}$ es solución de (1).

(c) Si las funciones $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ son continuas y $B(t) > 0$, entonces la solución general de (2) es $y(t) = \frac{f(t)+Mg(t)}{F(t)+MG(t)}$, $M \in \mathbb{R}$.

Ecuación de Riccati asociado a la ecuación de Bernoulli

Daremos un enfoque para determinar la solución general de la ecuación diferencial no lineal de Riccati, se va encontrar la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de este tipo. Sea la ecuación Riccati de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(t)[x(t)]^2 + C(t)x(t) + D(t). \qquad (b_1)$$

La idea principal para resolver (b_1) es ofrecer un enfoque, para utilizar un método donde $B(t), C(t)$ y $D(t)$ cumplan ciertas condiciones que permitan llevarlo a la ecuación diferencial ordinaria no lineal tipo Bernoulli, [5, 7].

Teorema 2. Si los coeficientes de la ecuación diferencial (b_1) están asociadas mediante la siguiente expresión

$$D(t) = -\frac{d}{dt}\left[\frac{C(t)}{B(t)}\right], \qquad (b_2)$$

entonces la solución general viene dada por $x(t) = -\frac{C(t)}{B(t)} + u(t)[\int B(t)u(t)dt + k]^{-1}$ siendo la función $u(t) = exp\{\int C(t)dt\}$ y $k \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si los coeficientes satisfacen la expresión (b_2) entonces la ecuación diferencial dada en (b_1) se escribe por

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) + \frac{C(t)}{B(t)}\right) = B(t)x(t)\left[x(t) + \frac{C(t)}{B(t)}\right] \qquad (b_3)$$

proponemos el cambio de variables

$$y(t) = x(t) + \frac{C(t)}{B(t)} \qquad (b_4)$$

reemplazando (b_4) en (b_3) se obtiene $\frac{dy(t)}{dt} = B(t)y(t)\left[y(t) - \frac{C(t)}{B(t)}\right]$ de donde

$$\frac{dy(t)}{dt} = B(t)[y(t)]^2 - Q(t)y(t).$$

La ecuación corresponde a una ecuación diferencial ordinaria no lineal de tipo Bernoulli. Por tanto, $x(t) = -\frac{C(t)}{B(t)} + u(t)[\int B(t)u(t)dt + k]^{-1}$.

Teorema 3. Si los coeficientes de la ecuación diferencial (b_1) están asociadas mediante la siguiente expresión $B(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{C(t)}{D(t)}\right]$ entonces la solución general viene dada por

$$(x(t))^{-1} = -\frac{C(t)}{D(t)} + u(t)[\int B(t)u(t)dt + k]^{-1}$$

siendo la función $u(t) = exp\{\int C(t)dt\}$ y $k \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si los coeficientes satisfacen la condición, entonces la ecuación diferencial dada en (b_1) se divide por $(x(t)^2$

$$\frac{1}{(x(t))^2}\frac{dx(t)}{dt} = B(t) + \frac{C(t)}{x(t)} + \frac{D(t)}{(x(t))^2}$$

haciendo cambio de variables $g(t) = \frac{1}{x(t)}$ y $g'(t) = -\frac{x\prime(t)}{(x(t))^2}$ reemplazando se obtiene

$$-\frac{d}{dt}\left[g(t) + \frac{C(t)}{D(t)}\right] = D(t)g(t)\left[g(t) + \frac{C(t)}{D(t)}\right]$$

haciendo el cambio de variable $y(t) = g(t) + \frac{C(t)}{D(t)}$ y reemplazando se tiene

$$\frac{dy(t)}{dt} = -D(t)\big(y(t)\big)^2 + C(t)y(t),$$

la ecuación corresponde a una ecuación diferencial ordinaria no lineal de tipo Bernoulli. Por tanto, $(x(t))^{-1} = -\frac{C(t)}{D(t)} + u(t)[\int D(t)u(t)dt + k]^{-1}$, siendo $u(t) = exp\{\int C(t)dt\}$ y k es constante arbitraria.

Teorema 4. Si los coeficientes de la ecuación diferencial ordinaria no lineal dada en (b_1) satisfacen la siguiente expresión

$$-2\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}} = \frac{1}{B(t)}\frac{d}{dt}[ln\{\int B(t)v(t)dt\}] \qquad (c_1)$$

siendo $v(t) = exp\{\int C(t)dt\}$, entonces la solución general viene dada por

$$x(t) = \sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}\left[1 + \left(k - \int B(t)\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}dt\right)^{-1}\right],$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si los coeficientes satisfacen la expresión (c_1), entonces la ecuación diferencial dada en (b_1) se puede escribir como

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(t)\left(x(t) - \sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}\right)^2 + C(t)x(t) + 2\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}B(t)x(t)\ ,$$

haciendo cambio de variable

$$y(t) = x(t) - \sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}} \quad \text{y } x'(t) = y'(t) + \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}\right)$$

reemplazando se obtiene

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}\right) = B(t)\big(y(t)\big)^2 + \left(C(t) + 2\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}B(t)\right)y(t) + 2D(t) +$$

$$+\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}C(t)$$

al simplificar se obtiene

$$\frac{dy(t)}{dt}=B(t)\big(y(t)\big)^2+\left(C(t)+2\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}B(t)\right)y(t)\ .$$

La ecuación diferencial no lineal es del tipo Bernoulli. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t)=\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}\left[1+\left(c+\int\sqrt{\frac{D(t)}{B(t)}}\ B(t)dt\right)^{-1}\right],$$

con $c\in\mathbb{R}$.

Teorema 5. Si los coeficientes de la ecuación diferencial no lineal dada en (b_1) satisface la siguiente expresión

$$2\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}=\frac{1}{D(t)}\frac{d}{dt}[ln\{\textstyle\int D(t)v(t)dt\}] \qquad (d_1)$$

donde $v(t)=exp\{-\int C(t)dt\}$, entonces la solución general viene dada por

$$(x(t))^{-1}=\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}\left[1+\left(\int D(t)\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}dt+k\right)^{-1}\right]$$

para $k\in\mathbb{R}$.

Demostración. De la ecuación (b_1) dividir todo por $\big(x(t)\big)^2$ se tiene

$$\frac{1}{\big(x(t)\big)^2}\frac{dx(t)}{dt}=B(t)+\frac{C(t)}{x(t)}+\frac{D(t)}{\big(x(t)\big)^2},$$

haciendo el cambio de variable, sea $g(t)=\frac{1}{x(t)}$ y $\frac{dg(t)}{dt}=-\frac{1}{\big(x(t)\big)^2}\frac{dx(t)}{dt}$. Se tiene

$$-\frac{dg(t)}{dt}=D(t)\left[g(t)+\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}\right]^2+C(t)g(t)+2\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}D(t)g(t).$$

sea el cambio de variable $y(t)=g(t)-\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}$ y $\frac{dy(t)}{dt}=\frac{dg(t)}{dt}-\frac{d}{dt}(\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}})$ donde

$$-\left[\frac{dy(t)}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}\right)\right]=D(t)\big(y(t)\big)^2+C(t)\left(y(t)+\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}\right)+$$

$$+2\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}D(t)\left[y(t)+\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}\right]$$

$$-\frac{dy(t)}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}\right)=D(t)\big(y(t)\big)^2+\left[C(t)+2\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}D(t)\right]y(t)+$$

$$+\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}C(t)+2B(t)\ .$$

De (d_1),

$$2\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}} = \frac{1}{D(t)}\frac{d}{dt}\left[ln\{\int D(t)v(t)dt\}\right]$$

$$= \frac{1}{D(t)}\cdot\frac{D(t)v(t)}{\int D(t)v(t)dt}$$

$$2\int D(t)v(t)dt = \frac{V(t)}{\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}},$$

derivando en ambos miembros

$$2B(t)v(t) = \sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}v'(t) - v(t)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}\right)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -D(t)\big(y(t)\big)^2 - \left[C(t) + 2\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}D(t)\right]y(t)$$

lo cual corresponde a una ecuación diferencial no lineal del tipo Bernoulli, donde la solución general es

$$\frac{1}{x(t)} = \sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}\left[1 + \sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}\left(\int D(t)\sqrt{\frac{B(t)}{D(t)}}dt + k\right)^{-1}\right]$$

siendo $k \in \mathbb{R}$.

3.5 Nivel 5: deducción formal

En esta etapa lo formal aumenta, aparece una secuencia finita de fórmulas articulados de manera lógica donde el último elemento de la secuencia es la conclusión del razonamiento. Nos enfocamos en determinar la solución algebraica de la ecuación diferencial ordinaria de Riccati. Partimos del hecho en que las soluciones son restringidas, ya que puede integrarse solamente para algunos pocos casos especiales. En consecuencia, estudiamos casos particulares, una forma singular de esta ecuación se puede escribir por

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{a}{t}\right)x + \left(-\frac{b}{t}\right)x^2 + ct^{p-1}.$$

Es decir

$$t\,\frac{dx}{dt} - ax + bx^2 = ct^p \qquad (1)$$

siendo a, b, c y p constantes, al respecto formulamos el siguiente teorema.

Teorema 6. La ecuación diferencial de Riccati (1) escrita por $t\frac{dx}{dt} - ax + bx^2 = ct^p$ es integrable cuando $n = \frac{p\pm 2a}{2p} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Se propone varios casos.

Caso 1. Si $p = 2a$, $n = 0, n = 1$, en este caso la ecuación (1) es siempre integrable considerando la transformación, $x = t^a v$, reemplazando en la ecuación (1)

$$at^a v + t^{a+1}\frac{dv}{dt} - at^a v + bt^{2a}v^2 = ct^{2a}$$

que se reduce a $t^{1-a}\frac{dv}{dt} + bv^2 = c$, esta ecuación diferencial es de variable separable, luego $\frac{dv}{c-bv^2} = \frac{dt}{t^{1-a}}$ y su integral es

$$-\frac{1}{b}\int \frac{dv}{v^2-\frac{c}{b}} = \int t^{a-1}dt + k\ .$$

Si $bc > 0$ la integral es de la forma

$$-\frac{1}{b}\int \frac{dv}{\left(v-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)\left(v+\sqrt{\frac{c}{b}}\right)} = \frac{t^a}{a} + k$$

pero, $x = t^a v$, entonces

$$v(t) = \sqrt{\frac{c}{b}}\, t^a \left[\frac{k_1 e^{\frac{2\sqrt{bc}}{a}t^a}+1}{k_1 e^{\frac{2\sqrt{bc}}{a}t^a}-1}\right].$$

Si $bc < 0$ se tiene $-\frac{c}{b} > 0$, en este caso la integral se escribe,

$$-\frac{1}{b}\int \frac{dv}{v^2+\left(\sqrt{-\frac{c}{b}}\right)^2} = \frac{t^a}{a} + k$$

$$arctan\left(\frac{v}{\sqrt{-\frac{c}{b}}}\right) = -\frac{\sqrt{-bc}}{a}t^a - k\sqrt{-bc}\ ,$$

Aplicando la transformación dada $x = t^a v$, se tiene

$$x(t) = \sqrt{-\frac{c}{b}}\, t^a tan\left(k_1 - \frac{\sqrt{-bc}}{a}t^a\right).$$

Caso 2. La ecuación (1) es siempre integrable. Para ver esto, haremos varias sustituciones. Sea $x = \frac{t^p}{x_1} + B$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_1 p t^{p-1} - t^p\frac{dx_1}{dt}}{x_1^2}$$

reemplazando en (1)

$$t\left[\frac{x_1 p t^{p-1} - t^p\frac{dx_1}{dt}}{x_1^2}\right] - a\left[\frac{t^p}{x_1} + B\right] + B\left[\frac{t^p}{x_1} + B\right]^2 = ct^p$$

agrupando términos,

$$(-aB+bB^2)+(p-a+2bB)\frac{t^p}{x_1}+\frac{bt^{2p}}{x_1^2}-\frac{t^{p+1}}{x_1^2}\frac{dx_1}{dt}=ct^p\ . \qquad (2)$$

De (2), escogemos B de manera adecuada de modo que $-aB+bB^2=0$ tenemos dos opciones $B=0$ o $B=\frac{a}{b}$.

Analizaremos cada una de estas opciones. (i) Si $B=0$, la sustitución de $x=\frac{t^p}{x_1}$ en (1) resulta

$$\frac{p-a}{x_1}+\frac{bt^p}{x_1^2}-\frac{t}{x_1^2}\frac{dx_1}{dt}=c$$

lo cual quiere decir $t\frac{dx_1}{dt}=-(p-a)x_1+cx_1^2=bt^p$ y se observa una ecuación idéntica a (1).

(ii) Si $B=\frac{a}{b}$, para este caso la transformación $x=\frac{t^p}{x_1}+\frac{a}{b}$, ahora la ecuación diferencial (2) se reduce mucho a la ecuación $\left(-\frac{a^2}{b}+\frac{ba^2}{b^2}\right)+\left(p-b+\frac{2ab}{t}\right)\frac{t^p}{x_1}+\frac{bt^{2p}}{x_1^2}\ \frac{dx}{dt}=ct^p$ la ecuación diferencial es

$$t\frac{dx_1}{dt}-(a+p)x_1+cx_1^2=bt^b \qquad (3)$$

se obtiene una ecuación idéntica a (1), donde se observa que b y c han permutado, mientras que a es sustituido por $(a+p)$. Continuamos, haciendo $x_1=\frac{a+p}{c}+\frac{t^p}{x_2}$ con derivada

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{x_2pt^{p-1}-t^p\frac{dx_2}{dt}}{x_2^2}\ ,$$

sustituyendo en la ecuación (3),

$$t\frac{dx_2}{dt}-(a+2p)x_2\mp bx_2^2=ct^p\ . \qquad (4)$$

Continuamos de la misma forma, sea $x_2=\frac{a+2p}{b}+\frac{t^p}{x_3}$ resulta

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{x_3pt^{p-1}-t^p\frac{dx_2}{dt}}{x_3^2}$$

reemplazando en la ecuación (4), se reduce a la ecuación diferencial

$$t\frac{dx_3}{dt}-(a+3p)x_3+cx_3^2=bt^p\ .$$

Continuamos de la misma forma, luego de hacer n sustituciones como los anteriores, obtenemos las ecuaciones

$$t\frac{dx_n}{dt} - (a+np)x_n + cx_n^2 = bt^p \text{ , si } n \text{ es impar}$$

$$t\frac{dx_n}{dt} - (a+np)x_n + bx_n^2 = ct^p \text{ , } n \text{ si es par .}$$

Este resultado significa que las ecuaciones son resolubles o integrables si $p = 2(a + np)$, en este caso para n se podría hacer $n = \frac{p-2a}{2p}$. Por otro lado, si tomamos el caso I, cuando $B = 0$ donde la sustitución $x = \frac{t^p}{x_1}$ generó la ecuación,

$$t\frac{dx_1}{dt} - (p-a)x_1 + cx_1^2 = bt^p \qquad (5)$$

Si continuamos con la sustitución $x_1 = \frac{p-a}{c} + \frac{t^p}{x_2}$ reemplazando en la ecuación (5),

$$t\left[\frac{x_2 p t^{p-1} - t^p \frac{dx_2}{dt}}{x_2^2}\right] - (p-a)\left[\frac{p-a}{c} + \frac{t^p}{x_2}\right] + c\left[\frac{p-a}{c} + \frac{t^p}{x_2}\right]^2 = bt^p$$

de donde se deduce

$$t\frac{dx_2}{dt} - (3p-a)x_2 + bx_2^2 = ct^p. \qquad (6)$$

Continuamos, haciendo $x_2 = \frac{3p-a}{b} + \frac{t^p}{x_3}$ con derivada primera, reemplazando en la ecuación diferencial (6) se obtiene

$$t\frac{dx_2}{dt} - (4p-a)x_3 + cx_3^2 = bt^p \text{ .}$$

Si continuamos con la serie de sustituciones, implica que las ecuaciones obtenidas son integrables en cuanto $p = 2(np - a)$, es decir cuando $n = \frac{p+2a}{2p}$, lo cual demuestra el teorema.

Corolario. Dada la ecuación diferencial de Riccati

$$\frac{du}{dz} + au^2 = bz^r \qquad (c_1)$$

es integrable si $r = -\frac{4m}{2m \pm 1}$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Cambiamos la variable z y u por las variables $t, x = ut$ las cuales resultan $\frac{dx}{dt} = t\frac{du}{dt} + u$ de donde

$$\frac{du}{dt} = t^{-1}\frac{dx}{dt} - t^{-1}u \qquad (c_2)$$

reemplazando (c_2) en (c_1) obtenemos $t^{-1}\frac{dx}{dt} - \left(\frac{x}{t}\right)t^{-1} + a\left(\frac{x}{t}\right)^2 = bt^r$, $u = \frac{x}{t}$ y la ecuación resulta $t\frac{dx}{dt} - x + ax^2 = bt^{r+2}$, según el teorema inicial sabemos que esta ecuación diferencial es integrable cuando $\frac{(r+2)\pm 2}{2(r+2)} = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de donde se tiene $(r+2) \pm 2 = 2rm + 4m$ el resultado es $m = \frac{(4m-2)\pm 2}{1-2m}$. Es decir, hay dos opciones, $m = \frac{-4(m-1)}{2m-1}$ y $m = \frac{-4m}{2m-1}$. Por tanto, si cambiamos en la primera igualdad m por $m+1$, resulta $r = -\frac{4m}{2m+1}$, esto completa la prueba del corolario.

IV. DISCUSIÓN

Un nivel formal de rigor es trabajar en un contexto axiomático y epistemológico. Analizaremos la ecuación de Riccati de la forma $x' + x^2 = P(t)$ siendo $P(t)$ una función algebraica, es decir $P(t)$ satisface la relación polinomial siguiente y cumple la relación polinomial de la forma

$$a_0(t)u^n + a_1(t)u^{n-1} + a_2(t)u^{n-2} + \cdots + a_n(t) = 0,\ n > 0$$

donde $a_k(t)$ son polinomios en t, con coeficientes en $\mathbb{C}$ y con $a_0(t) \neq 0$.

La variable t se llamará monomial completa de orden 0. Toda función algebraica de t se llamará función de orden 0. Una función analítica uniforme que es la exponencial de una función algebraica o es la integral de una función algebraica, se llamará monomial completa de orden 1. Una combinación algebraica de t y de monomiales de orden 1 se denominará una función de orden 1. La exponencial o la integral de una función de orden 1 se llamará monomial de orden 2. Combinación algebraica de monomiales de orden 0, 1, 2 se denomina una función de orden 2. Continuando con este proceso obtenemos las funciones de orden r. Una función de orden $r > 0$, se llamará función de Liouville.

Teorema 7. Si la ecuación diferencial de Riccati

$$\frac{dx(t)}{dt} + x^2 = P(t) \qquad \text{(l)}$$

donde $P(t)$ es una función algebraica, tiene una solución la cual es una función de Liouville, entonces ella tiene una solución la cual es un función algebraica, [6].

Demostración. Si $P(t) \equiv 0$, entonces $x = t^{-1}$ es una solución la cual es una función algebraica. Supongamos que $P(t) \neq 0$ y que la ecuación tiene una solución, a cual es una función de Liouville que no es una función algebraica, lo cual quiere decir que la ecuación es satisfecha por una función de orden $r \geq 1$. Denotemos por $x = f(\theta, t)$ tal solución, donde θ expresa un r-monomial. Sustituyendo en la ecuación (l) se obtiene,

$$f_\theta \theta' + f_t + f^2 = P \qquad (l_1)$$

si θ es un monomial de la forma e^v, entonces la ecuación (l_1) es de la forma

$$f_\theta \theta v' + f_t + f^2 = P \qquad (l_2)$$

si θ es la integral de una función de , la ecuación (l_2) tomaría la forma

$$f_\theta v + f_t + f^2 = P\ . \qquad (l_3)$$

Considerando que la expresión para $f(\theta, t)$ es

$$f(\theta, t) = c_1(t)\theta^{P_1} + c_2(t)\theta^{P_2} + c_3(t)\theta^{P_3} + \cdots$$

con $P_1 > P_2 > P_3 > \cdots$, donde los $c_k(t)$ son algebraicos. Reemplazando la expresión para $f(\theta, x)$ en (l_2),

$$[(c'_1 + P_1 c_1 v')\theta^{P_1} + (c'_2 + P_2 c_2 v') + \cdots] + [c_1^2\theta^{2P_1} + c_2^2\theta^{2P_2} + \cdots] = P$$

si reemplazamos en la ecuación (l_3) se tiene

$$[c'_1\theta^{P_1} + c'_2\theta^{P_2} + \cdots] + [c_1^2\theta^{2P_1} + c_2^2\theta^{2P_2} + \cdots] = P,$$

pero, $P(t)$ es algebraica y como esa igualdad es una identidad, concluimos que $P_1 = 0$, de manera que obtenemos en ambas identidades, la ecuación $c'_1 + c_1^2 = P$ de manera que $c_1(t)$ es una solución de la ecuación (l). Lo cual es una contradicción. Por otro lado, cuando $P(t) = t^r$, tenemos la ecuación

$$x' + x^2 = t^r. \qquad (l_4)$$

Asumamos que $r \neq -2$ y pongamos $x = \frac{w'}{w}$, entonces la ecuación (l_4) se transforma en

$$\frac{ww'' - (w')^2 + (w')^2}{w^2} = t^r$$

de donde queda

$$w' = wt^r\ , \qquad (l_5)$$

Sea $r = 2q - 2$, con $q \neq 0$. Definimos entonces $z = \frac{t^q}{q}$, con esto, la ecuación (l_5) se transforma en $\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{q-1}{qz}.\frac{dw}{dz} - w = 0$, poniendo ahora $p = \frac{1-q}{2q}$ y $w = z^q u$, entonces

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \left(1 + \frac{p(p+1)}{z^2}\right)u\ . \qquad (l_6)$$

Por último, haciendo $v = \frac{u'}{u}$ se obtiene

$$\frac{dv}{dz} + v^2 = 1 + \frac{p(p+1)}{z^2} \qquad (l_7)$$

Teorema 8. Existe una solución algebraica para la ecuación (l_6) o (l_7) si solamente si $p \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Primero demostraremos que toda solución algebraica de (l_7) es una función racional. Una función algebraica de z la cual no es racional debe tener al menos dos puntos críticos, es decir para al menos dos valores de z la función debe tener puntos de ramificación. En un punto de ramificación una función presenta una expansión con potencias fraccionarias. Entonces, llegamos a las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1. Ninguna solución algebraica de (l_7) puede tener un punto de ramificación en ∞, ni un punto finito $c \neq 0$.

Asumamos, sea f esta solución y supongamos que f tiene un punto de ramificación en ∞. La expansión de f en ∞ es dada entonces por

$$f = a_1 z^{P_1} + a_2 z^{P_2} + a_3 z^{P_3} + \cdots$$

$$P_1 > P_2 > P_3 > \cdots, a_1 \neq 0,$$

reemplazando en la igualdad (l_7), vemos que P_1 debe ser igual a 0.

Sea entonces P_1 la más alta potencia fraccionaria, entonces en las igualdades (l_7), encontramos que la más alta potencia fraccionaria para f^2 se encuentra en el término $2a_1 a_i P_i$, el cual no puede ser cancelado por ningún término de f', cuya más alta potencia sucede en el término $P_i a_i z^{P_i - 1}$. Así que P_i no puede ser una fracción y en consecuencia ∞ no es un punto de ramificación.

Supongamos ahora que f tiene en $c \neq 0$ finito la siguiente expresión

$$f = a_1(z-c)^{P_1} + a_2(z-c)^{P_2} + a_3(z-c)^{P_3} + \cdots$$

y que P_1 es una fracción. El primer término de f' es $P_1 a_1 (z-c)^{P_1 - 1}$ y tiene exponente fraccionario. El segundo miembro de (l_7) es una función racional, lo cual implica que deben haber términos en f^2 que equilibren los términos de f'. Luego, para algún i, j debemos tener

$$P_1 - 1 = P_i + P_j$$

pero, $P_i + P_j > 2P_1$ de manera que $2P_1 \leq P_1 - 1$, esto es que $P_1 \leq -1$.

Ahora P_1 no puede ser menor que -1, de otro modo el primer término de f^2 es $a_1^2(z-c)^{2P_1}$ no podría ser igualado por ningún término de f' o el segundo miembro de (l_7). Por tanto, P_1 es entero. Supongamos ahora que algún P_i con $i > 1$ es fraccionario y es el menor fraccionario. Los menores exponentes fraccionarios de f y f^2 los encontramos en,

$$P_i a(z-c)^{P_i - 1} \text{ y } 2a_1 a_i (z-c)^{P_1 + P_i},$$

como estos términos deben igualarse, debemos tener $P_1 + P_i = P_i - 1$; $2a_1 a_i = P_i a_i$ de donde obtenemos que $P_i = -2a_1$ y $P_1 = -1$.

Los términos de menor potencia de f' y f^2 son $a_1(z-c)^{-2}$ y $a_1^2(z-c)^{-2}$. En el segundo miembro de (l_7), la expansión entorno de $z=c$ no tiene potencias negativas, pues $c \neq 0$, en consecuencia debe tener $-a_1 + a_1^2 = 0$. De manera que $a_1 = 0, P_i = -2$ y luego P_i no es fracción. Entonces una solución algebraica irracional de (l_7) tendría solamente un punto crítico en $z=0$. Por tanto, toda solución algebraica de (l_7) es racional.

Afirmación 2. Si (l_7) tiene una solución racional, entonces $p \in \mathbb{Z}$. Sea $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ una solución, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios sin ceros comunes. Como f satisface (l_7), entonces f no tiene polos en ∞ y los polos finitos de f son todas simples. Es cierto que $z = 0$ es un polo simple de f, y si hubiera un polo $c \neq 0$, el término $\frac{1}{z-c}$ tendría la unidad como coeficiente.

Sea $f(\infty) = h$ y $c_1, c_2, c_3, \dots, c_r$ son los ceros de $Q(z)$; de (l_7), observamos que $h \neq 0$. Luego

$$f = h + \frac{k}{z} + \frac{1}{z-c_1} + \frac{1}{z-c_2} + \cdots + \frac{1}{z-c_r},$$

reemplazando en (l_7), se obtiene $k^2 - k = p(p+1)$.

Luego, $k = p+1$ o $k = -p$. Por otro lado, el desarrollo de f entorno de ∞ es

$$f = h + \frac{k+r}{z} + \cdots$$

Ahora, el término $\frac{2h(k+r)}{z}$ aparece en f^2 y este no podrá ser cancelado por f' o el segundo miembro de (l_7), entonces $k + r = 0$ y luego k es un entero. Por tanto, p es un entero.

Afirmación 3. Si $p \in \mathbb{Z}$, entonces (l_7) tiene una solución racional.

Si $p = 0$ o $p = -1$, entonces $f = \pm 1$ satisface la ecuación (l_7).

Si $p < -1$, haciendo $p' = -p - 1 > 0$, obtenemos $p(p+1) = p'(p'+1)$ en consecuencia, podemos asumir que $p > 0$.

Consideremos la ecuación (l_6), esto es

$$w'' = \left(1 + \frac{p(p+1)}{z^2}\right) w$$

haciendo $w = e^z z^{-p} u$, se obtiene

$$u'' + 2\left(1 - \frac{p}{2}\right) u' - 2p . \frac{u}{z} = 0$$

determinamos la serie de potencia $u = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m + \cdots$, que satisface la ecuación anterior. Reemplazamos u en dicha ecuación obtenemos

$$-2pa_1 - 2pa_0 = 0$$
$$a_2(2-4p) + a_1(2-2p) = 0$$
$$\dots$$
$$a_m[m(m-1) - 2mp] + a_{m-1}[2m - 2 - 2p] = 0$$
esas expresiones dan a_m en función de a_{m-1} salvo que cuando $m-1 = 2p$, pero cuando m es $p+1$, el cual es menor que $2p+1$, encontramos $a_m = 0$. Si tomamos $a_m = 0$ para $m > p+1$, se obtiene un polinomio u el cual satisface nuestra ecuación, de esta forma $\frac{w'}{w}$ es racional y por tanto $\frac{w'}{w}$ satisface (l_7), ya que (l_6) se obtiene de (l_7) haciendo $v = \frac{w'}{w}$.

V. CONCLUSIONES

En el ámbito investigativo los docentes buscan abordar un problema desde diferentes ópticas. Hay problemas latentes en cuanto a la integración del contenido de una asignatura, tal como propone [20] de manera crítica y razonada, explorar y expandir nuevas formas de resolver problemas.

Al tratar de resolver un problema con algoritmos que funcionen para un mayor número de caso, proporciona una herramienta importante para la comprensión del comportamiento del proceso de solución, su atención es mayor por su aplicabilidad y, el enorme interés que despierta en el estudio de las ecuaciones no lineales en diversos campos de la ciencia.

Hay que advertir que la mayoría de los problemas de ecuaciones diferenciales, como señala [15], se centra en la creación e interpretación de sistemas; los estudiantes centran su atención en representación de campos direccionales, representación gráfica en la solución de los problemas; pero muy poco refuerzan la idea de enseñar hacer generalizaciones.

Ocuparse de la ecuación de Riccati, abre varios escenarios a investigar, en el sentido de introducir teorías necesarias que ayuden a determinar nuevos métodos de solución, sobre todo dando un enfoque moderno y continuo con ayuda de otras áreas como: el álgebra y el análisis armónico. El estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales es de importancia en las ciencias e ingenierías; por lo tanto, es necesario buscar nuevas transformaciones no convencionales que linealice esta ecuación. Los resultados de esta investigación, busca plantear una alternativa de trabajo que se puedan implementar para la enseñanza de la ecuación diferencial de Riccati y su generalización con perspectiva didáctica, como señala [17], detrás de todo exploración, descripción, explicación, interpretación o comprensión de cualquier realidad, es posible encontrar una serie de elementos epistemológicos que interactúan dando un soporte sistémico a la solución de un problema. Las disciplinas de ecuaciones diferenciales en las áreas de ciencias e ingenierías deben ser bien explicadas en su enseñanza y más aplicada en lo posible, dando oportunidad al estudiante a participar en la construcción de su conocimiento a través de niveles de la elaboración del modelado matemático y la propuesta del modelo de los Van Hiele que es viable.

REFERENCIAS

[1] G. Guerrero, *Interpretación de las soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Estrategias y Dificultades*. Temas de Maestría, Cinvestav, México, 2008.

[2] R. E. O' Malley, *Thining about Ordinary Differential Equations*. Cambridge University Press, 1997.

[3] C. Rasmussen. *New directions in differential equations: A framework for interpreting students understandings and difficulties*. Journal of Mathematical Behavior, 2001.

[4] M. Artigue. *Functions from and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices*, en Harel, G. y Dubinsky, E., The concept of function. Aspects of epistemology, 1992.

[5] P. W. Davis, *Differential Equations for Mathematics, Science, and Engineering*. Prentice Hall, Inc,1992.

[6] J. Liouville, *Remarques Sur L´ equations de Riccati*. Journal de mathematiques pure et appliquées, 1840.

[7] F. Brauer y J. A Nohel, *Ordinary Differential Equations*. Benjamin, New York, 1967.

[8] R. Duval, *Graphiques et Equations; L'Articulation de deux registres, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg, 1988.

[9] J. K. Hale y H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations*. Springer, Berlin, 1991.

[10] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[11] J. F. Ritt, *On the integration in finite terms of linear differential equations*. Bulletin of the American Mathematical Society, 1927.

12] W. Leighton, *Ordinary Differential Equations*, Wadsworth, Belmont, California, 1996.

[13] E. Sanchez, J. Gonzales y J. Gutiérrez, *Sistemas Dinámicos, una introducción a través de ejercicios*. Dextra Editorial S. L., Madrid, 2014.

[14] E. L. Jones. *A RT formulation of the Algebric Riccati Equation Problem*, IEEE Trams Automatic Control, 1976.

[15] W. Burguer y M. Shaugnessy. *Caracterización de los niveles de desarrollo en geometría, según Van Hiele.* Notas de Mtemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 1989.

[16] D. N., Burghes and M. R. Borrie. *Modelling with differential equations*. Gran Bretaña: Jhon Wiley and Sons, 1982.

[17] F. Hitt, *Intuición Primera Versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el paso de una Representación Gráfica a un Contexto real y viceversa*. Revista Educación Matemática, 1995.

[18] C. Guerrero, M. Camacho y H. *Mejía. Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema*. Enseñanza de las Ciencias, 2010.

[19] J. Nava Bedolla, *Filosofía y Teoría Educativa. Una relación epistemológica*. Religación Press, 2022. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.46652/ReligacionPress.5

[20] M. Artigue, R. Douady, y I. Moreno. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica y Editorial una Empresa Docente; Bogotá, 1995.

[21] A. Campos. *Consideraciones epistemológicas acerca de la ecuación de Riccati*, Memorias Encuentro Internacional de Epistemología, Cali Colombia, 2008.

[22] Klinchin, *Continued Fractions*, Dover, Mineola, 1997.

[23] D. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. 3nd ed., Mc Graw Hill, 2003.

[24] V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*. Springer, Berlin, 1992.

[25] E. W. Boyle. and R. C. DiPrima. *Elementary Differential Equations*. USA: Jhon Wiley and Sons, Inc, 1992.

[26] C. Gomez. *Ecuación de Riccati en Grupos de Lie*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, 1996.

[27] P. J. Olvert. *Application of Lie Groups to Differential Equations*. (2 ed.), New York: Springer Verlag, 1993.