



Universidad Nacional
SAN LUIS GONZAGA



[Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licencia permite a otras combinar, retocar, y crear a partir de su obra de forma no comercial, siempre y cuando den crédito y licencia a nuevas creaciones bajo los mismos términos.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>



UNIVERSIDAD NACIONAL SAN LUIS GONZAGA
EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

CONSTANCIA

El que suscribe, deja constancia que se ha realizado el análisis con el software de verificación de similitud al documento cuyo título es:

**“CONSTRUCCIÓN DE UNA GEOMETRÍA FUZZY BASADA EN ÓRDENES
ADMISIBLES”**

Presentado por:

Dr. ALDRYN OSCAR APARCANA ORELLANA

Dr. ROBERTO PEDRO YACTAYO RUIZ

Dr. MANUEL ISABEL FLORES MUÑOZ

Dr. JAVIER EDUARDO MAGALLANES YUI

Mag. NICOLÁS EDUARDO ZUMELZU CÁRCAMO

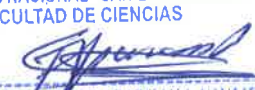
El resultado obtenido es el **8% de Similitud**, por el cual se otorga el calificativo de:

APROBADO, según Reglamento de Evaluación de la Originalidad

Se adjunta al presente el reporte de evaluación con el software de verificación de originalidad.

Ica, 03 de Enero del 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"
FACULTAD DE CIENCIAS



DR. CARLOS APARCANA AQUJE
Director (o) de la Unidad de Investigación

UNIVERSIDAD NACIONAL “SAN LUIS GONZAGA”
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN



**“Construcción de una Geometría Fuzzy basada en órdenes
Admisibles”**

Investigador Principal: Dr. Aldryn Oscar Aparcana Orellana, Docente asociado a tiempo completo de la Universidad Nacional “San Luis Gonzaga” Facultad de Ciencias

 [0000-0003-0380-7419](https://orcid.org/0000-0003-0380-7419)

Investigador Asociado: Dr. Roberto Pedro Yactayo Ruiz, Docente Principal a Dedicación Exclusiva de la Universidad Nacional “San Luis Gonzaga” Facultad de Ciencias

 [0000-0002-8359-2923](https://orcid.org/0000-0002-8359-2923)

Investigador Asociado: Dr. Manuel Isabel Flores Muñoz Docente Principal a Dedicación Exclusiva de la Universidad Nacional “San Luis Gonzaga” Facultad de Ciencias

 [0000-0003-0374-1747](https://orcid.org/0000-0003-0374-1747)

Investigador Colaborador: Dr. Javier Eduardo Magallanes Yui Docente Principal a Dedicación Exclusiva de la Universidad Nacional “San Luis Gonzaga” Facultad de Ciencias

 [0000-0003-0943-9186](https://orcid.org/0000-0003-0943-9186)

Investigador Colaborador: Mg. Nicolás Eduardo Zumelzu Cárcamo Docente Asociado jornada completa “ Universidad de Magallanes” - Chile

Línea de Investigación:

Ciencias naturales, ingeniería y tecnologías sostenibles

ÍNDICE

RESUMEN	i
ABSTRACT.....	ii
I. INTRODUCCIÓN	1
II. ESTRATEGIA METODOLÓGICA	2
III. RESULTADOS	3
1. PRELIMINARES.....	3
2. ORDEN ADMISIBLE EN TFN.....	4
3. ONI-ESPACIO VECTORIAL	7
4. ESPACIO TRIANGULAR FUZZY	8
5. FUNCIONES DE PROMEDIOS EN TFN.....	11
IV. DISCUSIÓN	13
V. CONCLUSIONES	14
VI. RECOMENDACIONES	15
VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	16

RESUMEN

Las órdenes admisibles en números difusos son órdenes totales que refinan un orden parcial básico y bien conocido en números difusos. En este trabajo, definimos un orden admisible en números difusos triangulares (i.e. TFN) y estudiamos algunas propiedades fundamentales con su aritmética y su relación con este orden admisible. También se propone una nueva estructura generalizada de los espacios vectoriales ordenados y, en particular, se considera el caso de los TFN. Además, también introducimos los conceptos de funciones de premediación en TFN, con énfasis en las funciones de promedio ponderado ordenadas en TFN equipados con un orden admisible. Finalmente, se plantea el problema de la unión de vértices centrales con un ejemplo ilustrativo donde se utiliza el concepto anterior.

Palabras clave. números difusos triangulares, órdenes sobre números difusos, órdenes admisibles

ABSTRACT

Allowable orders in fuzzy numbers are total orders that refine a basic and well-known partial order into fuzzy numbers. In this paper, we define an admissible order in triangular fuzzy numbers (i.e. TFN) and study some fundamental properties with their arithmetic and their relation to this admissible order. A new generalized structure of ordered vector spaces is also proposed, and in particular the case of TFNs is considered. In addition, we also introduce the concepts of averaging functions in TFN, with emphasis on weighted average functions ordered in TFN equipped with an allowable order. Finally, the problem of the union of central vertices is posed with an illustrative example where the previous concept is used.

Keywords. Triangular fuzzy numbers, orders on fuzzy numbers, permissible orders

I. INTRODUCCIÓN

ZADEH en [1] propuso el concepto de conjuntos fuzzy para formalizar y modelar las ambigüedades e imprecisiones del lenguaje como la temperatura, la edad y la velocidad. Una clase de números fuzzy, se introdujeron en [1] para modelar una cantidad que es imprecisa, en lugar de exacta, como lo es en todas las matemáticas tradicionales. Esta estructura ha sido estudiada en innumerables trabajos, y se ha dedicado a: operaciones aritméticas y otras nociones relacionadas con los números difusos y sus propiedades (ver [2], [3], [4]). Además, hay varias propuestas de órdenes parciales (totales y no totales) para números difusos o una subclase de los números difusos como por ejemplo en [5], [6], [7], [8]. Más recientemente, Zumelzu et al. en [9], a la luz de la noción de órdenes admisibles en el contexto de las extensiones de la teoría de conjuntos fuzzy como en [10], [11], [12], [13], propusieron la noción de órdenes admisibles para números fuzzy como órdenes totales que refina el orden de Ramík y Rámínek en [14]. En [17] se desarrollan diferentes conceptos cruciales en espacios vectoriales, como dependencia lineal, independencia lineal, entre otros, definiendo también el concepto de vector en términos de espacios vectoriales sin formalizar este último, por lo que en [18] se presenta de forma axiomática la definición formal de espacio vectorial. Hay varias extensiones de espacios vectoriales en lógica fuzzy llamadas espacios vectoriales fuzzy [19], [20], [21]. En cuanto a sus aplicaciones podemos encontrar, por ejemplo, la aplicación a la disonancia cognitiva y la toma de decisiones, el modelado del espacio vectorial difuso del tiempo (i.e. TFVS) de la emoción en la decisión de compra, la aplicación a la adicción al juego, el modelado del tiempo en las decisiones médicas [19], [20]. En cuanto a algunas generalizaciones de espacios vectoriales ordenados [22] podemos encontrar la de espacios semivectoriales ordenados sobre un semicampo débil [23], conjuntos fuzzy n-dimensionales sobre un conjunto no vacío, entre otros [23], [24], [25], [26], [27]. Las funciones de agregación desempeñan un papel importante en varias áreas, incluida la lógica fuzzy, la toma de decisiones, los sistemas expertos, el análisis de riesgos y el procesamiento de imágenes. Entre algunas de las clases a definir podemos encontrar, por ejemplo, la preagregación, variantes de la integral de Choquet y funciones OWA [34].

En este trabajo, iniciamos la construcción de una geometría fuzzy. El espacio estudiado aquí es el dado por el producto cartesiano de números triangulares fuzzy denotados por $T(\mathbb{R})^n$, considerando como un conjunto de escalares el cuerpo de números fuzzy crisp denotados por $\tilde{\mathbb{R}}$. Demostramos que este conjunto cumple propiedades como asociatividad, conmutatividad, aditivo neutro tanto por la suma de elementos de $T(\mathbb{R})^n$ como por el producto de escalares con elementos de $T(\mathbb{R})^n$. Introducimos el concepto de función de tipo promedio creciente probando propiedades en los números triangulares fuzzy mediante el estudio de las propiedades aritméticas.

II. ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Durante el desarrollo del trabajo se realizó la revisión de bibliografía especializada. Al tener recopilado toda la información en primer lugar nos enfocamos en los conceptos y propiedades sobre números fuzzy ,funciones de agregación y estructura tipo espacio vectoriales ordenados. Posteriormente, nos enfocamos en la aplicación de los conceptos y propiedades.

El tipo de investigación es no experimental, ya que nos centramos en definir nuevos conceptos sobre números fuzzy y a partir de ellos establecer propiedades y estructuras que tienen significado geométrico.

El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo más exhaustivo en la aplicación de los conceptos y propiedades.

III. RESULTADOS

1. PRELIMINARES

En esta sección, proporcionamos el contexto de los números fuzzy y los principales conceptos y resultados que son necesarios en el resto de este trabajo. Sea $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con \mathbb{R} el conjunto de los números reales, \mathbb{Q} y \mathbb{I} denotan el conjunto de números racionales e irracionales, respectivamente. La notación, \leq o \geq representa el orden habitual de \mathbb{R} , y $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ y $]a, b[$ los intervalos de \mathbb{R} cerrado, cerrado a la derecha, abierto a la derecha, y abiertos, respectivamente.

Definición 1.1. [4] Un conjunto fuzzy A sobre un conjunto no vacío de referencia X es una función $A : X \rightarrow [0, 1]$.

Definición 1.2. [4] Un conjunto fuzzy A sobre \mathbb{R} es llamado número fuzzy si satisface las siguientes condiciones.

(i) A es normal, i.e., $\sup_{x \in \mathbb{R}} A(x) = 1$;

(ii) $A/\alpha = \{x \in \mathbb{R} : A(x) \geq \alpha\}$ es un intervalo cerrado para cada $\alpha \in]0, 1]$;

(iii) $\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$ está acotado, donde A/α es el α -nivel (o α -corte) de A y $\text{supp } A$ es el soporte de A .

Por lo tanto, el α -nivel de un número fuzzy A es un intervalo cerrado, y denotaremos su extremo izquierdo y extremo derecho por $\underline{A/\alpha}$ y $\overline{A/\alpha}$, respectivamente, es decir $A/\alpha = [\underline{A/\alpha}, \overline{A/\alpha}]$.

Un número fuzzy A es un número fuzzy crisp o en resumen crisp si es que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $A(r) = 1$ y $A(x) = 0$ para cada $x \neq r$. En este caso denotaremos A por \check{r} . Finalmente, $F(\mathbb{R})$ denotará el conjunto de todos los números fuzzy y $\check{\mathbb{R}}$, $\check{\mathbb{Q}}$ y $\check{\mathbb{I}}$ denotará el conjunto para todos los números fuzzy crisp con $r \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{I}$, respectivamente.

Proposición 1.1. [2] Sea $A, B \in F(\mathbb{R})$ entonces los conjuntos fuzzy $A+B$, $A-B$, $A.B$ y $A \div B$ definido para cada $x \in \mathbb{R}$ por:

$$1) (A + B)(x) = \sup_{x=y+z} \min\{A(y), B(z)\}$$

$$2) (A - B)(x) = \sup_{x=y-z} \min\{A(y), B(z)\}$$

$$3) (A . B)(x) = \sup_{x=yz} \min\{A(y), B(z)\}$$

$$4) (A \div B)(x) = \sup_{x=\frac{y}{z}} \min\{A(y), B(z)\}, \text{ con } 0 \notin \text{supp} B$$

Es un número fuzzy.

Definición 1.3. [4] Un número fuzzy A , se llama número triangular fuzzy, en forma abreviada TFN, si existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $a \leq b \leq c$ y

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = b \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in]a, b[\\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } x \in]b, c[\\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

En este trabajo, representamos los números triangulares fuzzy por la terna $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $a \leq b \leq c$ y denotan el conjunto de todos los números triangulares fuzzy por $T(\mathbb{R})$, definido por $T(\mathbb{R}) = \{A \in F(\mathbb{R}) : A \text{ es un número triangular fuzzy}\}$.

Proposición 1.2. [2] Si $A = (a_1, b_1, c_1)$ y $B = (a_2, b_2, c_2)$ son elementos en $T(\mathbb{R})$ y $\tilde{r} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\begin{aligned} 1) A + B &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2); & 2) A - B &= (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2); \\ 3) \tilde{r}A &= \begin{cases} (ra_1, rb_1, rc_1), & \text{if } r \geq 0 \\ (ra_1, rb_1, rc_1), & \text{if } r < 0 \end{cases} & \text{son TFN.} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que $\widetilde{-1}A = (-a_1, -b_1, -c_1)$ pero, para mayor simplicidad, nosotros denotamos $\widetilde{-1}A$ por $-A$. Además, el producto $\tilde{r}A$ se llamará producto de los TFN A por el escalar \tilde{r} .

Corolario 1.1. Sea \tilde{r} y \tilde{s} en $\tilde{\mathbb{R}}$. entonces:

$$1) \tilde{r} + \tilde{s} = \widetilde{r + s}; \quad 2) \tilde{r} \cdot \tilde{s} = \widetilde{r \cdot s} \text{ son elementos de } \tilde{\mathbb{R}}.$$

Luego, $T(\mathbb{R})$ y $\tilde{\mathbb{R}}$ son cerrados para la adición, sustracción y producto escalar o multiplicación.

Corolario 1.2. Sea A un número fuzzy. Entonces $\underbrace{A + A + \dots + A}_{n\text{-times}} = \tilde{n}A$

Observación 1.1. El producto y la división, i.e., $A \cdot B$ y $A \div B$, de números triangulares fuzzy son TFN's sí y solo si A o B son números fuzzy crisp (Para $0 \notin \text{supp}B$ en el caso de la división).

Observación 1.2. La adición y el producto escalar en TFN son conmutativos, asociativo, sub-distributivo, y poseen identidades de producto aditivas y escalares (ver [4, pg. 104]). Tenga en

cuenta también que $\tilde{\mathbb{R}}$ con las operaciones de suma y multiplicación es isomorfo al cuerpo de los números reales y por lo tanto también son un campo. En [14] se introdujo un orden parcial en los números fuzzy, denotado aquí como \leq_{RR} , definido para cada $A, B \in F(\mathbb{R})$ de la siguiente manera: $A \leq_{RR} B \leftrightarrow \underline{A/\alpha} \leq \underline{B/\alpha}$ y $\overline{A/\alpha} \leq \overline{B/\alpha}$ para cada $\alpha \in (0, 1]$. Su restricción al conjunto de números triangulares fuzzy es equivalente al siguiente orden parcial.

Definición 1.4. Sea $A = (a_1, b_1, c_1)$ y $B = (a_2, b_2, c_2)$ sean dos TFN's. Definimos la relación \leq_L por $A \leq_L B$ sí y solo si $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$ y $c_1 \leq c_2$. Denotamos $A <_L B$ cuando $A \neq B$ y $A \leq_L B$.

La Definición 1.4 generaliza el orden habitual de los números reales, en el sentido de que ambos concuerdan cuando se restringen a $\tilde{\mathbb{R}}$.

2. ORDEN ADMISIBLE EN TFN

En esta sección, adaptamos la definición de órdenes admisibles sobre números fuzzy introducida en [9] en el contexto de TFN's. En particular, nos centramos en un orden

admisibles específicos sobre $T(\mathbb{R})$ y estudiar las propiedades que dichos órdenes lineales verifican en relación con las operaciones de suma, resta y producto escalar.

Definición 2.1. Sea \leq un orden en TFN's. El orden \leq se llama orden admisible en $T(\mathbb{R})$ si:

(i) \leq es un orden lineal en $T(\mathbb{R})$; (ii) Para todo A, B en $T(\mathbb{R})$, $A \leq B$ cuando $A \leq_L B$.

Por lo tanto, un orden \leq en $T(\mathbb{R})$ es admisible en $T(\mathbb{R})$ si es lineal y refina el orden parcial \leq_L . **Definición 2.2.** Sea $A = (a_1, b_1, c_1)$ y $B = (a_2, b_2, c_2)$ son dos TFN's. Definimos \leq_{OT} por:

$$A \leq_{OT} B \text{ sí y solo si } \begin{cases} b_1 < b_2 & o \\ b_1 = b_2, c_1 < c_2 & o \\ b_1 = b_2, c_1 = c_2 & y \ a_1 \leq a_2 \end{cases}$$

Denotamos $A <_{OT} B$ cuando $A \leq_{OT} B$ y $A \neq B$.

Proposición 2.1. La relación \leq_{OT} es un orden admisible en $T(\mathbb{R})$.

Prueba. Sea $A = (a_1, b_1, c_1)$, $B = (a_2, b_2, c_2)$, $C = (a_3, b_3, c_3) \in T(\mathbb{R})$.

1. Reflexiva: Se cumple a partir de la Definición 2.2.

2. Antisimétrica: Sea $A \leq_{OT} B$ y $B \leq_{OT} A$. Si $b_1 \neq b_2$ entonces $A <_{OT} B$ o $B <_{OT} A$ pero no ambas a la vez. Si $b_1 = b_2$ y $c_1 \neq c_2$ entonces $A <_{OT} B$ o $B <_{OT} A$ pero no ambas. Si $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$ y $a_1 \neq a_2$ entonces $A <_{OT} B$ o $B <_{OT} A$ pero no ambas. Por lo tanto $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$.

3. Transitiva: Si $A \leq_{OT} B$ y $B \leq_{OT} C$ entonces:

$$1) \ b_1 < b_2 \text{ o } (b_1 = b_2 \text{ y } c_1 < c_2) \text{ o } (b_1 = b_2 \text{ y } c_1 = c_2 \text{ y } a_1 \leq a_2),$$

$$2) \ b_2 < b_3 \text{ o } (b_2 = b_3 \text{ y } c_2 < c_3) \text{ o } (b_2 = b_3 \text{ y } c_2 = c_3 \text{ y } a_2 \leq a_3).$$

Esta prueba consta de seis casos.

Caso 1: Sea $b_1 < b_2$ entonces $b_1 < b_3$ y por lo tanto $(a_1, b_1, c_1) <_{OT} (a_3, b_3, c_3)$.

Caso 2: Sea $b_1 = b_2$ y $b_2 < b_3$ entonces $b_1 < b_3$, y por lo tanto $(a_1, b_1, c_1) <_{OT} (a_3, b_3, c_3)$. Caso 3: Sea $b_1 = b_2$, $c_1 < c_2$ y $b_2 = b_3$ entonces $b_1 = b_3$ y $c_1 < c_3$. Por lo tanto $(a_1, b_1, c_1) <_{OT} (a_3, b_3, c_3)$.

Caso 4: Sea $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$ y $b_2 = b_3$ y $c_2 < c_3$ entonces $a_1 \leq a_3$, $b_1 = b_3$ y $c_1 < c_3$.

Caso 5: Sea $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $a_1 < a_2$, $b_2 = b_3$ y $c_2 = c_3$ entonces $b_1 = b_3$, $c_1 = c_3$ y $a_1 < a_3$. Así que $(a_1, b_1, c_1) <_{OT} (a_3, b_3, c_3)$.

Caso 6: Sea $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $a_1 = a_2$, $b_2 = b_3$, $c_2 = c_3$ y $a_2 < a_3$ entonces $b_1 = b_3$, $c_1 = c_3$ y $a_1 < a_3$. Así que $(a_1, b_1, c_1) <_{OT} (a_3, b_3, c_3)$. Por lo tanto $(a_1, b_1, c_1) <_{OT} (a_3, b_3, c_3)$.

4. Orden Total: Sea $(a_1, b_1, c_1) \neq (a_2, b_2, c_2)$. Entonces $a_1 \neq a_2$ o $b_1 \neq b_2$ o $c_1 \neq c_2$. Por lo tanto, por Definición 2.2 y la ley de la tricotomía de los números reales se cumple que: $(a_1, b_1, c_1) <_{OT} (a_2, b_2, c_2)$ o $(a_2, b_2, c_2) <_{OT} (a_1, b_1, c_1)$.

5. Refinamiento: Sea $(a_1, b_1, c_1) \leq_L (a_2, b_2, c_2)$. Si $A = B$ entonces, dado que \leq_{OT} es reflexivo, tenemos que $(a_1, b_1, c_1) \leq_{OT} (a_2, b_2, c_2)$. Si $(a_1, b_1, c_1) <_L (a_2, b_2, c_2)$ entonces, por Definición 1.4, tenemos $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$ y $c_1 \leq c_2$ y ($a_1 \neq a_2$ or $b_1 \neq b_2$ or $c_1 \neq c_2$). Por lo tanto, si $b_1 \neq b_2$ entonces $b_1 < b_2$, pero, si $b_1 = b_2$ y $c_1 \neq c_2$ entonces $b_1 = b_2$ y $c_1 < c_2$. Por último, si $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$ y $a_1 \neq a_2$ entonces $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$ y $a_1 < a_2$. De este modo, en cualquiera de las tres situaciones, $A \leq_{OT} B$.

Definición 2.3. Sea $A \in T(\mathbb{R})$. Entonces,

1) A es OT-positiva si $A >_{OT} \tilde{0}$.

2) A es OT-negativa si $A <_{OT} \tilde{0}$.

En $T(\mathbb{R})$ los elementos de la forma $(-a, 0, a)$ con $a \leq 0$ nosotros los llamamos 0-isosceles triangulares fuzzy TFN's se denotará por $T(\mathbb{R})_0$. En particular, $\tilde{0} = (0, 0, 0)$ pertenece a $T(\mathbb{R})_0$.

Proposición 2.2. Si $A \in T(\mathbb{R})$ entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera: 1) A es OT-positiva; 2) A es OT-negativa; 3) $A = \tilde{0}$.

Prueba. Directamente, porque \leq_{OT} es un orden lineal en TFN.

Proposición 2.3. Sea (a, b, c) un TFN. Entonces, (a, b, c) es OT-positiva sí y solo si $b > 0$ o $(0 = b < c)$. Del mismo modo, (a, b, c) es OT-negativa sí y solo si $b < 0$ o $a < b = c = 0$.

Prueba. Inmediata a partir de las Definiciones 2.2 y 2.3.

Corolario 2.1. Sea $A \in T(\mathbb{R})$. Si A es OT-negativa entonces $-A$ es OT-positiva. Observamos que, en general, lo contrario no es cierto.

Ejemplo 2.1. Sea $(-1, 0, 1)$ es OT-positiva. Tenga en cuenta que $-(-1, 0, 1) = (-1, 0, 1)$ también es OT-positiva.

Corolario 2.2. Sea $A \in T(\mathbb{R})_0$. Si $A \neq \tilde{0}$ entonces $-A$ es OT-positiva.

Proposición 2.4. Si $A \in T(\mathbb{R})$ entonces $A - A \in T(\mathbb{R})_0$.

Prueba. Inmediata (véase Observación 1.2.)

Corolario 2.3. Sea A un TFN. Entonces $A - A \geq_{OT} \tilde{0}$. Se tiene, $A - A = \tilde{0}$ sí y solo si $A \in \tilde{\mathbb{R}}$.

Proposición 2.5. Sea A, B dos $T(\mathbb{R})$. Entonces, $A \leq_{OT} B$ sí y solo si $B - A \geq_{OT} \tilde{0}$.

Prueba. Sea $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in T(\mathbb{R})$ de tal manera que $(a_1, b_1, c_1) \leq_{OT} (a_2, b_2, c_2)$. Si $b_1 < b_2$ entonces $0 < b_2 - b_1$. Si $b_1 = b_2$ y $a_1 \leq c_1 < c_2$ entonces $0 < c_2 - a_1$. Si $b_1 = b_2, c_1 = c_2$ y $a_1 \leq a_2$ entonces $c_2 - a_1 \geq 0$. Obsérvese que si $c_2 - a_1 = 0$ entonces $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2$. Por lo tanto, si $A \leq_{OT} B$ entonces $B - A \geq_{OT} \tilde{0}$. No es difícil ver que la inversa es cierta a partir de las Definiciones 1.3 y 2.2.

Observación 2.1. El orden admisible \leq sobre TFN propuesta no satisface la propiedad anterior, ya que $(1, 2, 3) < (1, 2, 4)$, y $(1, 2, 4) - (1, 2, 3) = (-2, 0, 3) < \tilde{0}$.

Proposición 2.6. Sea A y B en $T(\mathbb{R})$. Si son OT-positivas, entonces $A + B$ es también OT-positiva.

Proposición 2.7. Sea A, B y C en $T(\mathbb{R})$. Si $A \leq_{OT} B$ entonces $A + C \leq_{OT} B + C$.

Prueba. Sea $A = (a_1, b_1, c_1)$, $B = (a_2, b_2, c_2)$ y $C = (a_3, b_3, c_3)$ son tres TFN's. Si $A \leq_{OT} B$ se tiene los siguientes casos:

- 1) $b_1 < b_2$ o
- 2) $b_1 = b_2$ y $c_1 < c_2$ o
- 3) $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ y $a_1 \leq a_2$.

Para el primer caso, tenemos: Si $b_1 < b_2$ entonces $b_1 + b_3 < b_2 + b_3$. Por lo tanto $A + C \leq_{OT} B + C$. Los otros casos son análogos. De esta manera se demuestra la Proposición.

Corolario 2.4. Si A, B, C y D son TFN's. Si $A \leq_{OT} B$ y $C \leq_{OT} D$ entonces $A + C \leq_{OT} B + D$.

La Proposición 2.7 revela que \leq_{OT} es compatible con la adición, tal como se define en [9]. Del mismo modo, en la siguiente proposición, demostraremos que \leq_{OT} también es compatible con la multiplicación.

Proposición 2.8. Sea A y B dos TFN y $\tilde{r} \in \tilde{\mathbb{R}}$.

- 1) Si $A \leq_{OT} B$ y $\tilde{r} \geq_{OT} \tilde{0}$ entonces $\tilde{r}A \leq_{OT} \tilde{r}B$,
- 2) Si $A \leq_{OT} B$ y $\tilde{r} \leq_{OT} \tilde{0}$ entonces $\tilde{r}A \geq_{OT} \tilde{r}B$.

Prueba. Inmediata.

La notación $\text{Max}_{\leq_{OT}}\{A, B\}$ y $\text{Min}_{\leq_{OT}}\{A, B\}$ se usará para denotar el máximo y el mínimo de A y B , respectivamente, en relación con el orden lineal \leq_{OT} .

3. ONI-ESPACIO VECTORIAL

Las hiperestructuras asociadas a los espacios vectoriales, que se presentan en [18], han sido ampliamente estudiadas y se les ha dado varios nombres en otros trabajos. A continuación, definimos una nueva hiperestructura para espacios vectoriales".

Definición 3.1. Un espacio vectorial sin inversos \mathcal{V} , escrito de manera corto como NI-espacio vectorial, sobre un cuerpo S de cero característico es un conjunto de elementos, llamados vectores con dos leyes de combinación, llamadas suma (o suma) de vectores y multiplicación escalar, que satisfacen las siguientes condiciones:

- 1) A cada par de vectores α, β en \mathcal{V} hay asociado un vector en \mathcal{V} llamada adición vectorial, que denotamos por $\alpha + \beta$;
- 2) La adición es asociativa, i.e. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ para todos α, β y γ en \mathcal{V} ;
- 3) Existe un vector, que denotamos por $0_{\mathcal{V}}$ tal que $0_{\mathcal{V}} + \alpha = \alpha + 0_{\mathcal{V}} = \alpha$ para todos $\alpha \in \mathcal{V}$;
- 4) La adición es conmutativa, i.e. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ para todos α y β en \mathcal{V} ;
- 5) Para cada $s \in S$ y cada vector $\alpha \in \mathcal{V}$ se asocia a un vector único llamado multiplicación escalar $s \cdot \alpha$ que se denota por $s\alpha$;

- 6) La multiplicación escalar es asociativa, i.e. $(sr)\alpha = s(r\alpha)$ para todos $\alpha \in \mathcal{V}$ y $s, r \in S$;
- 7) La multiplicación escalar es distributiva con respecto al vector adición, i.e. $s(\alpha + \beta) = s\alpha + s\beta$ para todos $s \in S$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$;
- 8) Para todos $\alpha \in \mathcal{V}$ se cumple $0_s\alpha = 0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ donde 0_s denota el elemento de identidad aditivo de S ;
- 9) Para todos $1_s\alpha = \alpha$ donde 1_s denota el elemento de identidad multiplicativa de S . Se denota NI-espacio vectorial por $(\mathcal{V}, +, \cdot, 0_{\mathcal{V}})$.

Ejemplo 3.1. Los cuatro NI-espacios vectoriales triviales sobre el campo de los números reales

son:

- 1) Para todos los enteros $n \geq 1$, el espacio vectorial \mathbb{R}^n es un NI-espacio vectorial.
- 2) Para todos los enteros $n \geq 1$, el espacio vectorial \mathbb{C}^n es un NI-espacio vectorial.
- 3) Cada espacio semivectorial en [26] es un NI-espacio vectorial cuando el semicampo es un campo.
- 4) Cada espacio cuasilineal es un NI-espacio vectorial.

Definición 3.2. Sea S un campo ordenado con respecto a un orden \leq_s . Un NI-espacio vectorial \mathcal{V} sobre S se dice que es un orden NI-espacio vectorial, en forma corta se escribe ONI-espacio vectorial, si existe una relación de orden \lesssim en \mathcal{V} , de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- 1) Si $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ y $\alpha \lesssim \beta$, entonces $\alpha + \gamma \lesssim \beta + \gamma$ para cualquier $\gamma \in \mathcal{V}$;
 - 2) Si $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ y $\alpha \lesssim \beta$, entonces $s\alpha \lesssim s\beta$ para cualquier $s \in S$
- Denotamos un ONI-espacio vectorial por $(\mathcal{V}, +, \cdot, 0_{\mathcal{V}}, \lesssim)$.

4. ESPACIO TRIANGULAR FUZZY

Un n -tuple de números triangulares fuzzy $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ para un entero $n \geq 1$ se denomina n -dimensional punto o un n -dimensional vector. En este caso, el TFN's $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ se llaman de coordenadas o componentes del vector. La colección de todos los n -dimensional vectores se denomina espacio vectorial de n -tuples, o simplemente n -space. Denotamos este espacio por $T(\mathbb{R})^n$. En este trabajo normalmente denotaremos los vectores por $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots$ y los componentes por las letras correspondientes A, B, C, \dots con un subíndice en $\{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, escribimos

$$\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

Para convertir $T(\mathbb{R})^n$, en un sistema algebraico, introducimos dos operaciones vectoriales llamadas suma y multiplicación por escalares. La palabra escalar se usa aquí como sinónimo de número fuzzy crisp.

Definición 4.1. Dos vectores \vec{A} y \vec{B} en $T(\mathbb{R})^n$. La suma $\vec{A} + \vec{B}$ se define como el vector que se obtiene mediante la adición de los componentes correspondientes:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n).$$

Si $\tilde{r} \in \tilde{\mathbb{R}}$, definimos $\tilde{r} \vec{A}$ o $\vec{A} \tilde{r}$ vector obtenido al multiplicar cada componente de \vec{A} por \tilde{r} :

$$\tilde{r}\vec{A} = (\tilde{r}A_1, \tilde{r}A_2, \dots, \dots, \tilde{r}A_n).$$

A partir de esta definición es fácil verificar las siguientes propiedades de estas operaciones.

Teorema 4.1.

El $(T(\mathbb{R})^n, +, \cdot, \vec{0})$ es un NI-espacio vectorial en el campo $(\tilde{\mathbb{R}}, +, \cdot)$.

Prueba. Sólo probaremos la ley distributiva porque las otras son inmediatas. Sea \vec{A} y \vec{B} dos $T(\mathbb{R})^n$ y $\tilde{r} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Para la distributividad del producto escalar con respecto a la adición de vectores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{r}(\vec{A} + \vec{B}) &= (\tilde{r}(A_1 + B_1), \tilde{r}(A_2 + B_2), \dots, \dots, \tilde{r}(A_n + B_n)) \\ &= (\tilde{r}A_1 + \tilde{r}B_1, \dots, \tilde{r}A_n + \tilde{r}B_n) \text{ por Observación 1.2} \\ &= \tilde{r}(A_1, \dots, A_n) + \tilde{r}(B_1, \dots, B_n) \\ &= \tilde{r}\vec{A} + \tilde{r}\vec{B}. \end{aligned}$$

Concluyendo nuestra prueba.

Observación 4.1. El álgebra $(T(\mathbb{R})^n, +, \cdot, \vec{0})$ no constituye un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Específicamente, la propiedad habitual de los espacios vectoriales, donde la multiplicación escalar distribuye con respecto a la suma escalar, generalmente no se cumple en este contexto; en otras palabras, $(\tilde{r} + \tilde{t})\vec{A} \neq \tilde{r}\vec{A} + \tilde{t}\vec{A}$ para algunos $\tilde{r}, \tilde{t} \in \tilde{\mathbb{R}}$ y $\vec{A} \in T(\mathbb{R})^n$.

Ejemplo 4.1. Considere $\vec{A} = (a, b, c) \in T(\mathbb{R})^n$ con $n = 1$.

$$(\tilde{3} + (-\tilde{1}))\vec{A} = (2a, 2b, 2c).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (\tilde{3} + (-\tilde{1}))\vec{A} &= \tilde{3}(a, b, c) + (-\tilde{1})(a, b, c) \\ &= (3a, 3b, 3c) + (-c, -b, -a) \\ &= (3a - c, 2b, 3c - a) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\tilde{3} + (-\tilde{1}))\vec{A} \neq \tilde{3}\vec{A} + (-\tilde{1})\vec{A}$.

Proposición 4.1. Sea $A \in T(\mathbb{R})^n$ y $\tilde{r}, \tilde{s} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Si $\tilde{r}, \tilde{t} \geq_{OT} \vec{0}$ o $\tilde{r}, \tilde{t} \leq_{OT} \vec{0}$ entonces

$$(\tilde{r} + \tilde{t})\vec{A} = \tilde{r}\vec{A} + \tilde{t}\vec{A}.$$

Prueba. Primero para el caso $\tilde{r}, \tilde{t} \geq_{OT} \vec{0}$ obtenemos

$$\begin{aligned} (\tilde{r} + \tilde{t})\vec{A} &= ((\tilde{r} + \tilde{t})A_1, \dots, (\tilde{r} + \tilde{t})A_n) \\ &= (\tilde{r}A_1 + \tilde{t}A_1, \dots, \tilde{r}A_n + \tilde{t}A_n) \text{ por Observación 1.2} \\ &= \tilde{r}\vec{A} + \tilde{t}\vec{A}. \end{aligned}$$

Caso cuando $\tilde{r}, \tilde{t} \leq_{OT} \vec{0}$ es análogo al caso anterior.

Para abreviar, escribimos $T(\mathbb{R})^n$ en lugar de $(T(\mathbb{R})^n, +, \cdot, 0)$ y $\tilde{\mathbb{R}}$ en lugar de $(\tilde{\mathbb{R}}, +, \cdot)$, i.e., $T(\mathbb{R})^n$ es un NI-espacio vectorial en el campo $\tilde{\mathbb{R}}$.

Corolario 4.1. De acuerdo con la definición de $T(\mathbb{R})^n$ también se puede considerar un espacio cuasilineal.

Observación 4.2. El vector con todos los componentes $\vec{0}$ se denomina vector cero y se denota por $\vec{0}$. Tiene la propiedad de que $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$ para cada vector \vec{A} ; en otras palabras, $\vec{0}$ es un elemento de identidad para la suma de vectores. El vector $(-\vec{1})\vec{A}$ también se denota por $-\vec{A}$ y se llama el opuesto de \vec{A} y se tiene que la ecuación $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$ no es siempre verdadera. Para ello, basta con considerar $\vec{A} \in T(\mathbb{R})^n$ que $\vec{A} - \vec{A} = (A_1 - A_1, \dots, A_n - A_n)$ del Corolario 2.3 se tiene $A_i - A_i >_{OT} \vec{0}$ cuando A_i no es crisp. Tenga en cuenta también que $\vec{A} \vec{0} = \vec{0}$ y que $\vec{A} \vec{1} = \vec{A}$ para todos $\vec{A} \in T(\mathbb{R})^n$. Por lo tanto, $T(\mathbb{R})^n$, dotado de la suma y el producto escalar de Definición 4.1, no es un espacio vectorial en el campo de números fuzzy crisp.

Con la idea de orden de producto definimos un orden parcial en $T(\mathbb{R})^n$ como sigue:

Definición. 4.2. Sea $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$ y $\vec{B} = (B_1, \dots, B_n)$ en $T(\mathbb{R})^n$. Definimos la relación \leq_{OT^n} por

$$\vec{A} \leq_{OT^n} \vec{B} \leftrightarrow \begin{cases} A_1 \leq_{OT} B_1 \\ \vdots \\ A_n \leq_{OT} B_n \end{cases}$$

Proposición 4.2. El $(T(\mathbb{R})^n, \leq_{OT^n})$ es un ONI-espacio vectorial en el campo $\tilde{\mathbb{R}}$.

Prueba. Por proposición 4.1 $(T(\mathbb{R})^n, +, \cdot, \vec{0})$ En un NI-espacio vectorial en el campo $(\tilde{\mathbb{R}}, +, \cdot)$. Sea $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$ y $\vec{B} = (B_1, \dots, B_n)$ en $T(\mathbb{R})^n$. Para la primera condición, si $\vec{A} \leq_{OT^n} \vec{B}$ entonces $A_1 \leq_{OT} B_1, \dots, A_n \leq_{OT} B_n$ por la Proposición 2.7 para cualquier C_1, \dots, C_n en $T(\mathbb{R})$ obtenemos A_1

$+ C_1 \leq_{OT} B_1 + C_1, \dots, A_n + C_n \leq_{OT} B_n + C_n$. Así que, $\vec{A} + \vec{C} \leq_{OT} \vec{B} + \vec{C}$ donde $\vec{C} = (C_1, \dots, C_n) \in T(\mathbb{R})^n$. Para la segunda condición la prueba es análoga a la anterior.

Para abreviar, escribimos $T(\mathbb{R})^n$ en lugar de $(T(\mathbb{R})^n, \leq_{OT^n})$ cuando no hay confusión con el orden \leq_{OT^n} y se dira que $T(\mathbb{R})^n$ es una ONI-espacio vectorial en el campo $\tilde{\mathbb{R}}$.

Proposición 4.3. Sea $\vec{A}, \vec{B} \in T(\mathbb{R})^n$ y $\tilde{r}, \tilde{s} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- 1) $\vec{A} - \vec{A} \geq_{OT^n} \vec{0}$
- 2) Si $\vec{A} \geq_{OT^n} \vec{0}$ y $\vec{B} \geq_{OT^n} \vec{0}$ entonces $\vec{A} + \vec{B} \geq_{OT^n} \vec{0}$
- 3) Si $\vec{A} \geq_{OT^n} \vec{0}$ y $\tilde{r} \geq_{OT^n} \vec{0}$ entonces $\tilde{r}\vec{A} \geq_{OT^n} \vec{0}$
- 4) Si $\vec{A} \leq_{OT^n} \vec{B}$ y $\tilde{r} \leq_{OT^n} \vec{0}$ entonces $\tilde{r}\vec{A} \geq_{OT^n} \tilde{r}\vec{B}$
- 5) Si $\vec{A} \geq_{OT^n} \vec{0}$ y $\tilde{r} \leq_{OT^n} \tilde{s}$ entonces $\tilde{r}\vec{A} \leq_{OT^n} \tilde{s}\vec{A}$
- 6) $\vec{A} \leq_{OT^n} \vec{B}$ sí y solo si $\vec{B} - \vec{A} \geq_{OT^n} \vec{0}$

Prueba. Inmediata de la Observación 4.2 y la Proposición 2.5.

Observación 4.3. Sea $\vec{A} = (-1, 0, 1) \in T(\mathbb{R})^n$ con $n = 1$. Obsérvese que $\vec{A} \geq_{OT^n} \vec{0}$ y $-\vec{A} \geq_{OT^n} \vec{0}$ pero $\vec{A} \neq \vec{0}$.

Definición 4.3. En un ONI-espacio vectorial $T(\mathbb{R})^n$ un elemento \vec{A} se dice que es OT^n -positiva si $\vec{A} \geq_{OT^n} \vec{0}$; se llama OT^n -negativa si $\vec{A} \leq_{OT^n} \vec{A}$.

Observación 4.4. La Propiedad 6 de la Proposición 4.3 depende del orden lineal que se considere, porque si se considera el orden \leq de la Observación 2.1 y al definir una \leq^n análogamente a \leq_{OT^n} el ONI-espacio vectorial $(T(\mathbb{R})^n, \leq^n)$ no satisface la Propiedad 6 de la Proposición 4.3.

5. FUNCIONES DE PROMEDIOS EN TFN

En esta sección consideraremos el ONI-espacio vectorial $(T(\mathbb{R})^n, \leq_{OT^n})$ en el campo ordenado $(\tilde{\mathbb{R}}, \leq_{OT})$, .i.e. $T(\mathbb{R})^n$ es un ONI-espacio vectorial en el campo ordenado $\tilde{\mathbb{R}}$.

Definición 5.1. Una función $E : T(\mathbb{R})^n \rightarrow T(\mathbb{R})$ es OT -creciente si $E(\vec{A}) \leq_{OT} E(\vec{B})$ cuando $\vec{A} \leq_{OT^n} \vec{B}$. Podemos definir de manera análoga la función OT -decreciente.

Sea la función $E : T(\mathbb{R})^n \rightarrow T(\mathbb{R})$. Nosotros decimos que E es una función promedio (escrita de manera corta OT -FTA) si es OT -creciente y, para cada $A_1, \dots, A_n \in T(\mathbb{R})$,

$$\underset{\leq_{OT}}{\text{Min}}\{A_k; k = 1, \dots, n\} \leq_{OT} E(\vec{A}) \leq_{OT} \underset{\leq_{OT}}{\text{Max}}\{A_k; k = 1, \dots, n\}$$

Definición 5.2. Una función $E : T(\mathbb{R})^n \rightarrow T(\mathbb{R})$ es idempotente si $E(A, \dots, A) = A$ para cada A en $T(\mathbb{R})$.

Proposición 5.1. Sea $E : T(\mathbb{R})^n \rightarrow T(\mathbb{R})$. Si E es OT -creciente entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) E es idempotente;

(ii) E es un OT -FTA.

Prueba. (i) \Rightarrow (ii) Tomando cada A_1, \dots, A_n en $T(\mathbb{R})$. Denotamos por $A_i = \underset{\leq_{OT}}{\text{Min}}\{A_k; k = 1, \dots, n\}$ y $A_j = \underset{\leq_{OT}}{\text{Max}}\{A_k; k = 1, \dots, n\}$. Por monotonicidad $A_i = E(A_i, \dots,$

$$A_i) \leq_{OT} E(\vec{A}) \leq_{OT} E(A_j, \dots, A_j) = A_j \text{ por lo tanto } \underset{\leq_{OT}}{\text{Min}}\{A_k; k = 1, \dots, n\} \leq_{OT} E(\vec{A}) \leq_{OT} \underset{\leq_{OT}}{\text{Max}}\{A_k; k = 1, \dots, n\}$$

(ii) \Rightarrow (i) Es inmediata.

Definición 5.3. Sea A_1, \dots, A_n en $T(\mathbb{R})$ y, para cada $i = 1, \dots, n$, $A_{(i)}$ el i -ésimo mayor triangular número fuzzy w.r.t. \leq_{OT} .

(i) Media aritmética: $M_a(A_1, \dots, A_n) = (\sum_{i=1}^n A_i) \left(\frac{1}{n}\right)$

(ii) Media aritmética ponderada: $M_w(A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i A_i$ donde $w = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$ es un vector de pesos, .i.e. $\tilde{a}_i \geq_{OT} \vec{0}$ para todos $i = 1, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i = \vec{1}$

(iii) Mediana: $Med(A_1, \dots, A_n) = \begin{cases} \tilde{m} (A_{(k)} + A_{(k+1)}) & \text{if } n = 2k \text{ es par} \\ A_{(k)}, & \text{if } n = 2k - 1 \text{ es impar} \end{cases}$ donde $\tilde{m} = \frac{1}{2}$

(iv) Funciones de promedio ponderadas ordenadas: $OWA_w(A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i A_{(i)}$ donde $w = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$ es un vector de pesos.

Lema 5.1. Si $w = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$ un vector de pesos y $A \in \text{TFN}$, entonces $\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i A = A$

Prueba. Sea $A = (a, b, c)$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i A = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i (a, b, c) = (\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i a, \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i b, \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i c) = (a, b, c)$$

Teorema 5.1. Sea $w = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$ es un vector de pesos. La función $OWA_w: T(\mathbb{R})^n \rightarrow T(\mathbb{R})$ es un OT-FTA.

Prueba. Claramente $A_{(n)} = \text{Min}_{\leq_{OT}} \{A_1, \dots, A_n\}$ y $A_{(1)} = \text{Max}_{\leq_{OT}} \{A_1, \dots, A_n\}$. Dado que, por la Proposición 2.8 $\tilde{a}_i A_{(n)} \leq_{OT} \tilde{a}_i A_{(i)} \leq_{OT} \tilde{a}_i A_{(1)}$ para cada $i = 1, \dots, n$, entonces, por la Proposición 2.7 y Lema 5.1 $A_{(n)} = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i A_{(n)} \leq_{OT} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i A_{(i)} \leq_{OT} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i A_{(1)} = A_{(1)}$. Por lo tanto

$$\text{Min}_{\leq_{OT}} \{A_1, \dots, A_n\} \leq_{OT} OWA_w(\vec{A}) \leq_{OT} \text{Max}_{\leq_{OT}} \{A_1, \dots, A_n\} .$$

Por otro lado, si $\vec{A} \leq_{OT} \vec{B}$ entonces $A_{(i)} \leq_{OT} B_{(i)}$ para cada $i = 1, \dots, n$ y por la Proposición 2.8, $\tilde{a}_i A_{(i)} \leq_{OT} \tilde{a}_i B_{(i)}$. Por lo tanto, por la Proposición 2.7, $\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i A_{(i)} \leq_{OT} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i B_{(i)}$ i.e.

$OWA_w(\vec{A}) \leq_{OT} OWA_w(\vec{B})$. Por lo tanto, obtenemos OWA_w es un OT-FTA.

Corolario 5.1. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- 1) Las funciones $M_a: T(\mathbb{R})^n \rightarrow T(\mathbb{R})$ y $Med: T(\mathbb{R})^n \rightarrow T(\mathbb{R})$ son OT-FTA.
- 2) Las funciones M_a , Med y OWA_w son idempotentes.

IV. DISCUSIÓN

En el presente trabajo se ha construido un espacio cuasi vectorial ordenado utilizando una cierta clase de números fuzzy llamados números triangulares fuzzy y un orden admisible esto hace que los elementos de esta estructura posean ciertas propiedades geométricas básicas. Sería interesante poder estudiar otros problemas que presenten mayor complejidad en cuanto a esta línea de trabajo.

V. CONCLUSIONES

Establecimos nuevos resultados sobre la existencia de estructuras de cuasi espacios vectoriales ordenados basados en una clase particular de números fuzzy y ordenes admisibles, obteniendo ciertas propiedades para los elementos de estos espacios con ciertas propiedades de tipo geométrica básicas.

VI. RECOMENDACIONES

Estudiar y proponer conceptos de métrica en estos espacios cuasi vectoriales ordenados basados en los ordenes admisibles para abordar problemas topológicos y geométricos de mayor complejidad.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.
- [2] D. Dubois and H. Prade, “Operations on fuzzy numbers,” *International Journal of Systems Science*, vol. 9, no. 6, pp. 613–626, 1978.
- [3] M. Hanss, *Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [4] G. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall New Jersey, 1995, vol. 4.
- [5] T. da Cruz Asmus, G. P. Dimuro, and B. R. C. Bedregal, “On twoplayer interval-valued fuzzy Bayesian games,” *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 32, no. 6, pp. 557–596, 2017.
- [6] P. Prokopowicz, J. M. Czerniak, D. Mikolajewski, L. Apiecioneck, and D. Slezak, Eds., *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers - A Tribute to Professor Witold Kosiński*, ser. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 356. Springer, 2017.
- [7] A. Roldán-López-de-Hierro, C. Roldán, and F. Herrera, “On a new methodology for ranking fuzzy numbers and its application to real economic data,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 353, pp. 86–110, 2018.
- [8] W. Wang and Z. Wang, “Total orderings defined on the set of all fuzzy numbers,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 243, pp. 131–141, 2014.
- [9] N. Zumelzu, B. Bedregal, E. Mansilla, H. Bustince, and R. Diaz, “Admissible orders on fuzzy numbers,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 30, no. 11, pp. 4788–4799, 2022.
- [10] H. Bustince, J. Fernández, A. Kolesárová, and R. Mesiar, “Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 220, pp. 69–77, 2013. [11] A. A. De Lima, E. S. Palmeira, B. Bedregal, and H. Bustince, “Multidimensional fuzzy sets,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 29, no. 8, pp. 2195–2208, 2021.
- [12] L. De Miguel, H. Bustince, B. Pekala, U. Bentkowska, I. A. da Silva, B. R. C. Bedregal, R. Mesiar, and G. Ochoa, “Interval-valued Atanassov intuitionistic OWA aggregations using admissible linear orders and their application to decision making,” *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, vol. 24, no. 6, pp. 1586–1597, 2016.
- [13] M. Matzenauer, R. Reiser, H. Santos, B. Bedregal, and H. Bustince, “Strategies on admissible total orders over typical hesitant fuzzy implications applied to decision making problems,” *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 36, no. 5, pp. 2144–2182, 2021.
- [14] J. Ramík and J. Rímanek, “Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 16, no. 2, pp. 123–138, 1985.

- [15] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions: Containing a Systematic Statement of a New Mathematical Method; of which the Principles Were Communicated in 1843 to the Royal Irish Academy; and which Has Since Formed the Subject of Successive Courses of Lectures, Delivered in 1848 and Subsequent Years in the Halls of Trinity College, Dublin: With Numerous Illustrative Diagrams, and with Some Geometrical and Physical Applications.* Hodges and Smith, 1853.
- [16] A. Cayley, “Ii. a memoir on the theory of matrices,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, no. 148, pp. 17–37, 1858.
- [17] H. Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik: dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie Erläutert.* O.Wigand, 1844, vol. 1.
- [18] G. Peano, “Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari,” *Atti Accad. Sci. Torino*, vol. 22, pp. 437–446, 1887.
- [19] J. Colloc, “Fvsoomm a fuzzy vectorial space model and method of personality, cognitive dissonance and emotion in decision making,” *Information*, vol. 11, no. 4, p. 229, 2020.
- [20] J. Colloc, R. A. Yameogo, P. F. Summons, Y. Shen, M. Park, and J. E. Aronson, “Epice an emotion fuzzy vectorial space for time modeling in medical decision,” in *Proceedings of the 1st International Conference on Internet of Things and Machine Learning*, 2017, pp. 1–7.
- [21] A. Katsaras and D. B. Liu, “Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 58, no. 1, pp. 135–146, 1977.
- [22] R. Cristescu, *Ordered vector spaces and linear operators.* Routledge, 1976.
- [23] T. Milfont, I. Mezzomo, B. Bedregal, E. Mansilla, and H. Bustince, “Aggregation functions on n-dimensional ordered vectors equipped with an admissible order and an application in multi-criteria group decisionmaking,” *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 137, pp. 34–50, 2021.
- [24] T. Costa, Y. Chalco-Cano, W. A. Lodwick, and G. N. Silva, “Generalized interval vector spaces and interval optimization,” *Information Sciences*, vol. 311, pp. 74–85, 2015.
- [25] W. Vasantha Kandasamy, “Semivector spaces over semifields,” *Zeszyty Naukowe Politechniki*, vol. 17, pp. 43–51, 1993.
- [26] W. V. Kandasamy, *Smarandache Semirings, Semifields, And Semivector Spaces.* Infinite Study, 2002.
- [27] R. M. Rodríguez, B. Bedregal, H. Bustince, Y. Dong, B. Farhadinia, C. Kahraman, L. Martínez, V. Torra, Y. Xu, Z. Xu, and F. Herrera, “A position and perspective analysis of hesitant fuzzy sets on information fusion in decision making. towards high quality progress,” *Information Fusion*, vol. 29, pp. 89–97, 2016.

- [28] G. Beliakov, H. B. Sola, and T. C. Sánchez, *A practical guide to averaging functions*. Springer, 2016.
- [29] G. P. Dimuro, H. Bustince, J. Fernandez, R. Mesiar, and B. Bedregal, “New results on pre-aggregation functions: introducing (light) pre-tnorms,” in *2017 Joint 17th World Congress of International Fuzzy Systems Association and 9th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems (IFSA-SCIS)*. IEEE, 2017, pp. 1–6.
- [30] R. Yang, L. Jin, D. Paternain, R. R. Yager, R. Mesiar, and H. Bustince, “Some preference involved aggregation models for basic uncertain information using uncertainty transformation,” *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol. 39, no. 1, pp. 325–332, 2020.
- [31] T. da Cruz Asmus, G. P. Dimuro, B. Bedregal, J. A. Sanz, R. Mesiar, and H. Bustince, “Towards interval uncertainty propagation control in bivariate aggregation processes and the introduction of width-limite interval-valued overlap functions,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 441, pp. 130–168, 2022.
- [32] R. H. S. Reiser, B. R. C. Bedregal, and M. Baczynski, “Aggregating fuzzy implications,” *Information Sciences*, vol. 253, pp. 126–146, 2013.
- [33] A. F. Roldán-López-de-Hierro, C. Roldán, H. Bustince, J. Fernández, I. Rodriguez, H. Fardoun, and J. Lafuente, “Affine construction methodology of aggregation functions,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 414, pp. 146–164, 2021.
- [34] G. P. Dimuro, J. Fernández, B. Bedregal, R. Mesiar, J. A. Sanz, G. Lucca, and H. Bustince, “The state-of-art of the generalizations of the Choquet integral: from aggregation and pre-aggregation to ordered directionally monotone functions,” *Information Fusion*, vol. 57, pp. 27–43, 2020.
- [35] M. Galar, A. Jurio, C. Lopez-Molina, D. Paternain, J. Sanz, and H. Bustince, “Aggregation functions to combine RGB color channels in stereo matching,” *Optics Express*, vol. 21, no. 1, pp. 1247–1257, 2013.
- [36] L. González-Jaime, M. Nachtgael, E. Kerre, and H. Bustince, “Use of idempotent functions in the aggregation of different filters for noise removal,” in *Knowledge Engineering and Management*. Springer, 2014, pp. 495–507.
- [37] L. de Souza Oliveira, A. Argou, R. Dilli, A. C. Yamin, R. Reiser, and B. R. C. Bedregal, “Exploring fuzzy set consensus analysis in iot resource ranking,” *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 109, p. 104617, 2022.
- [38] T. V. V. Batista, B. R. C. Bedregal, and R. M. Moraes, “Constructing multi-layer classifier ensembles using the Choquet integral based on overlap and quasi-overlap functions,” *Neurocomputing*, vol. 500, pp. 413–421, 2022.
- [39] V. S. Costa, A. D. S. Farias, B. R. C. Bedregal, R. H. N. Santiago, and A. M. de Paula Canuto, “Combining multiple algorithms in classifier ensembles using generalized mixture functions,” *Neurocomputing*, vol. 313, pp. 402–414, 2018.
- [40] D. H. Nolasco, F. B. Costa, E. S. Palmeira, D. K. Alves, B. Bedregal, T. O. Rocha, R. L. Ribeiro, and J. C. Silva, “Wavelet-fuzzy power quality diagnosis system with

inference method based on overlap functions: Case study in an AC microgrid,” *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 85, pp. 284–294, 2019.

[41] J. Fumanal-Idocin, Y.-K. Wang, C.-T. Lin, J. Fernández, J. A. Sanz, and H. Bustince, “Motor-imagery-based brain-computer interface using signal derivation and aggregation functions,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021.

[42] E. Saleh, A. Valls, A. Moreno, P. Romero-Aroca, V. Torra, and H. Bustince, “Learning fuzzy measures for aggregation in fuzzy rulebased models,” in *International Conference on Modeling Decisions for Artificial Intelligence*. Springer, 2018, pp. 114–127.