Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

Esta licencia es la más restrictiva de las seis licencias principales Creative Commons, permitiendo a otras solo descargar sus obras y compartirlas con otras siempre y cuando den crédito, pero no pueden cambiarlas de forma alguna ni usarlas de forma comercial.

http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0

Recibo de pago N° 742979

Visto el Informe **Nº 284-2024-PIEO-UI-FIMEE-UNSLG**, emitido la operaria del sistema de antiplagio se emite la siguiente constancia:

Nº 268-2024

CONSTANCIA

El que suscribe, director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica y Electrónica, hace constar que se ha realizado el análisis con el software de verificación de similitud de la **Tesis** cuyo título es:

"MODELAMIENTO DE UN SISTEMA DE POSICIONAMIENTO POR LUZ VISIBLE"

Presentado por:

FLORES MONZON, WALTER MARTIN

BACHILLER de la Facultad INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA – Escuela Profesional de INGENIERÍA ELECTRÓNICA. El resultado obtenido es un porcentaje de CINCO POR CIENTO **(5%)**, por el cual se le otorga el calificativo de:

APROBADO

Se adjunta al presente, el reporte de evaluación con el software de verificación de originalidad.

Ica, 15 de Noviembre del 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN
Dr. José Luis Dondyre Pasache
DIRECTOR DE UNIDAD

UNIVERSIDAD NACIONAL “SAN LUIS GONZAGA”
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN
Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica y Electrónica

Modelamiento de un sistema de posicionamiento por luz visible

Línea de investigación

Ciencias naturales, ingeniería y tecnologías sostenibles

INFORME FINAL DE TESIS

AUTOR:

WALTER MARTIN FLORES MONZON

Ica, Perú

2024

Dedicatoria

Dedico este trabajo a todas aquellas personas cuyo compromiso y dedicación han sido pilares fundamentales en mi camino hacia la realización de esta investigación.

A mis padres, cuyo amor incondicional y apoyo constante han sido mi principal motor en la búsqueda del conocimiento y la excelencia académica. A ellos les debo la base sólida sobre la cual he construido mi carrera.

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi asesor de tesis, Julio Cesar Tincopa Alfaro, por su orientación, paciencia y dedicación durante todo el proceso de investigación. Sus valiosos consejos y comentarios han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Agradezco profundamente a mis compañeros colegas y colaboradores por sus ideas, discusiones y contribuciones que han enriquecido este trabajo.

No puedo dejar de mencionar el apoyo de mis padres por su apoyo incondicional, cuya ayuda fue crucial para seguir adelante con esta tesis.

Finalmente, dedico un especial agradecimiento a todas las personas que participaron como sujetos de prueba en los experimentos, su tiempo y disposición fueron esenciales para obtener los resultados presentados en esta tesis.

INDICE

Dedicatoria ii

Agradecimientos iii

Índice iv

Índice de tablas v

Índice de figuras vi

Resumen vii

Abstract viii

I. Introducción 1

1.1. Realidad problemática 1

1.1.1. Problema general 1

1.1.2. Problemas específicos 1

1.2. Antecedentes 1

1.2.1. Antecedentes internacionales 1

1.2.2. Antecedente nacional 3

1.3. Justificación e importancia de la investigación 3

1.3.1. Justificación 3

1.3.2. Importancia 4

1.4. Objetivos de la investigación 4

1.4.1. Objetivo general 4

1.4.2. Objetivos específicos 4

1.5. Hipótesis y variables de la investigación 5

1.5.1. Hipótesis general 5

1.5.2. Hipótesis general 5

1.5.3. Variable independiente 5

1.5.4. Variable dependiente 5

1.6. Contenido de la investigación 5

II. Estrategia metodológica 6

2.1. Análisis de los sistemas de comunicación visible 6

2.2. Estimación de distancia y posición en sistemas de luz visible.....7
2.2.2. Estimación de posición directa y en dos pasos en sistemas de luz visible 9
2.3. Asignación de recursos en sistema de luz visible 11
2.4. Localización cooperativa en sistemas de luz visible.....13
2.5. Modelo del sistema 17
2.6. CRLBs y estimadores de máxima verosimilitud (MLE).....18
2.6.1. Caso 1: Sistema sincrónico 18
2.6.2. Caso 2: Sistema asíncrono.....23
2.7. Efectos del muestreo y estimador híbrido modificado.....27
2.8. Límite de Ziv-Zakai (ZZB).....33
2.9. Derivaciones del ECRB 36
2.10. Cramér-Rao Bayesiano (BCRB) y Cramér-Rao Ponderado (WCRB).....38
III. Resultados 41
3.1. Resultados numéricos 41
3.1.1. Resultados para CRLBs y estimadores de máxima verosimilitud.....41
3.1.2. Resultados para ZZB, ECRB, WCRB y estimadores MAP 47
3.2. Relación con la estimación de posición 51
3.3. Ampliaciones 53
3.4. Modelo del sistema 56
3.4.1. Modelo de señal recibida.....56
3.4.2. Función Log-Verosimilitud y CRLB 58
3.5. Posicionamiento en Sistemas Síncronos 58
3.5.1. CRLB 58
3.5.2. Posicionamiento directo 61
3.5.3. Posicionamiento en dos pasos 62
3.5.4. Análisis de complejidad 67
A. Posicionamiento directo 68
B. Posicionamiento en dos pasos 68
3.6. Posicionamiento de Sistemas Asíncronos.....69

3.6.1. CRLB 69
3.6.2. Estimación directa y en dos pasos 71
3.6.3. Análisis de complejidad 74
3.7. Resultados numéricos 74
3.7.1. Límites teóricos de precisión en toda la habitación 76
3.7.2. Rendimiento de los estimadores directos y de dos pasos con respecto a la potencia óptica 77
3.7.3. Rendimiento de los estimadores directo y de dos pasos en función de las coordenadas del receptor VLC 79
3.7.4. Rendimiento de los estimadores directos y de dos pasos en presencia de incertidumbres del modelo 80
A. Rendimiento con respecto a la incertidumbre en el orden lambertiano.....81
B. Rendimiento en función de la incertidumbre en el modelo de transmisión...82
3.7.5. Caso especial: Localización bidimensional.....84
A. Rendimiento en función de la potencia óptica.....84
B. Rendimiento en función de las coordenadas del receptor VLC.....85
3.8. Conclusiones 85
IV. Discusiones 88
V. Conclusiones 89
VI. Recomendaciones 90
VII. Referencias bibliográficas 91

INDICE DE FIGURAS

Figura N°1: VLC vehicular para sistemas de transporte inteligente cooperativo 14

Figura N°2: Ilustración de un sistema VLP cooperativo interior con tres unidades VLC (por ejemplo, robots).....15

Figura N°3: La función de autocorrelación normalizada en la Ec. 39 para s(t) en la Ec. 86 con $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 100$ kHz y $A = 0.1$.....29

Figura N°4: Función $g_x(u)$ en la Ec. 46 para $s(t)$ en la Ec. 86, donde $x = 5$ m, $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 100$ kHz y $A = 0.1$ 32

Figura N°5: CRLB versus potencia óptica de fuente para enfoques basados en TOA, basados en TOA/RSS híbrido y basados en RSS, donde $x = 5\ m$ y $T_s = 0{,}01\ s$ 41

Figura N°6: Límites teóricos (CRLB) en función de fc para los enfoques basados en TOA, híbridos TOA/RSS y basados en RSS, donde $x = 5\ m$ y $A = 0.1$.....43

Figura N°7: Límites teóricos (CRLB) en función de Ts para los enfoques basados en TOA, híbridos TOA/RSS y basados en RSS, donde $x = 5\ m$ y $A = 0.1$.....44

Figura N°8: Límites teóricos (CRLB) en función de la distancia x para los enfoques basados en TOA, híbridos TOA/RSS y basados en RSS, donde $T_s = 0.01\ s$ y $A = 0.1$.....44

Figura N°9: RMSE de los MLE y los CRLB para diferentes enfoques, donde $x = 5$ m, $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 1$ MHz y $Tsmp = 1\ ns$ 45

Figura N°10: RMSE de las MLEs para diferentes enfoques en ausencia de ruido, donde $x = 5$ m, $T_s = 0.1$ ms y $f_c = 1\ MHz$ 47

Figura N°11: ZZB frente a la potencia óptica de origen para varios valores del orden lambertiano, donde $S = 1$ cm 48

Figura N°12: ZZB en función de la potencia óptica de la fuente para diferentes valores del área del fotodetector, donde $m = 10$.....49

Figura N°13: Error cuadrático medio (RMSE) versus la potencia óptica de la fuente para el estimador MAP, el ZZB, el ECRB y el WCRB, donde $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 1$ MHz, $S = 1$ cm y $m = 1$ 50

Figura N°14: La raíz del error cuadrático medio (RMSE) en función de la potencia óptica de la fuente se muestra para el estimador MAP, el ZZB, el ECRB y el WCRB, donde $T_s = 0.1\ ms$, $f_c = 50$ MHz, $S = 1\ cm^2$ y $m = 1$.....51

Figura N°15: El escenario en el que el receptor VLP está ubicado en el área circular gris según una distribución uniforme 55

Figura N°16: Configuración del sistema VLP en las simulaciones, donde las reflexiones en las paredes se omiten al asumir un escenario de línea de visión directa (LOS, por sus siglas en inglés).....75

Figura N°17: El límite teórico de precisión (CRLB) en metros para un sistema VLP síncrono a medida que el receptor VLC se desplaza dentro de la habitación, con $T_s = 0.1\ ms, f_c = 100$ MHz y $A = 100$ mW, se muestra en el gráfico de contorno de la Figura 3.2 76

Figura N°18: CRLB (en metros) para un sistema VLP sincrónico a medida que el receptor VLC se mueve dentro de la habitación, donde $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 100$ MHz y $A = 100$ mW 77

Figura N°19: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos en función de la potencia óptica de la fuente, donde $T_s = 1\ \mu s$ y $f_c = 100\ MHz$ 78

Figura N°20: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos en función de la potencia óptica de la fuente, donde $T_s = 1\ \mu s$ y $f_c = 10$ MHz 79

Figura N°21: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos a medida que el receptor VLC se mueve en línea recta dentro de la habitación, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 100$ MHz 80

Figura N°22: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos a medida que el receptor VLC se mueve en línea recta en la habitación, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 10$ MHz 81

Figura N°23: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos con conocimiento imperfecto del orden lambertiano, donde el valor verdadero del orden lambertiano es $1, T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 100$ MHz 82

Figura N°24: CRLBs y RMSE de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos con conocimiento imperfecto de la orden Lambertiana, donde la verdadera orden Lambertiana es $1, T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 10$ MHz 83

Figura N°25: CRLBs y RMSE de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos con modelo de transmisión desajustado, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 100$ MHz 83

Figura N°26: CRLBs y RMSE de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos con modelo de transmisión desajustado, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 10\ MHz$ 84

Figura N°27: CRLBs y RMSE de los estimadores para la localización bidimensional en sistemas VLP síncronos y asíncronos con respecto a la potencia óptica de la fuente, donde $T_s = 1\ \mu s$ y $f_c = 100\ MHz$.....86

Figura N°28: CRLBs y RMSE de los estimadores para la localización bidimensional en sistemas VLP síncronos y asíncronos con respecto a la profundidad de la habitación, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1\ W$ y $f_c = 100\ MHz$ 86

RESUMEN

La investigación en comunicación visible basada en LED se ha convertido en un campo de estudio de gran relevancia, especialmente en lo que respecta a los sistemas de posicionamiento por luz visible (VLP). El presente estudio se enfoca en realizar un análisis exhaustivo y detallado con el objetivo de desarrollar un modelamiento del sistema de posicionamiento para la comunicación por luz visible. Se exploran diversas estrategias, como la asignación eficiente de recursos y la compensación de corriente continua, con el propósito de mejorar tanto la precisión en la estimación de posición como la velocidad de transmisión de datos en entornos de comunicación visible. Para el desarrollo del sistema de posicionamiento, se aborda la investigación en sistemas de comunicación visible basados en LED, destacando el potencial que posee para superar la escasez de espectro en comparación con los sistemas de radiofrecuencia. Se explora cómo los sistemas de comunicación por luz visible (VLC) pueden ofrecer iluminación, transmisión de datos de alta velocidad y capacidades de localización en entornos interiores. Se discute la importancia de los sistemas VLP para estimar la posición con precisión en interiores, con aplicaciones en navegación de robots y servicios basados en la ubicación. Además, se investigan estrategias de asignación de recursos, como la optimización de la potencia de transmisión de LED, para mejorar el rendimiento del sistema. Finalmente, los resultados arrojan un análisis de un sistema de posicionamiento en interiores utilizando transmisores LED y receptores VLC, comparando los enfoques de posicionamiento directo y de dos pasos, destacando que el primero es más efectivo en baja SNR. Además, se discute la complejidad computacional y la optimalidad del enfoque directo, así como la estrategia de posicionamiento en dos etapas. Se presenta un análisis sobre la precisión de la estimación de distancia basada en el tiempo de llegada (TOA) y la fuerza de señal recibida (RSS) en función de la frecuencia y la duración de la señal, abordando el impacto del muestreo en los estimadores basados en TOA y RSS, y se discute la convergencia de los enfoques síncrono y asíncrono en ciertos escenarios.

Palabras claves: Modelamiento, Posicionamiento, Luz Visible.

ABSTRACT

Research in LED-based visible communication has become a highly relevant field of study, especially regarding Visible Light Positioning (VLP) systems. This study focuses on conducting a comprehensive and detailed analysis aimed at developing a modeling of the positioning system for visible light communication. Various strategies are explored, such as efficient resource allocation and direct current compensation, to improve both position estimation accuracy and data transmission speed in visible communication environments. For the development of the positioning system, research into LED-based visible communication systems is addressed, highlighting their potential to overcome spectrum scarcity compared to radiofrequency systems. It explores how Visible Light Communication (VLC) systems can provide lighting, high-speed data transmission, and localization capabilities in indoor environments. The importance of VLP systems in accurately estimating position indoors, with applications in robot navigation and location-based services, is discussed. Furthermore, resource allocation strategies, such as LED transmission power optimization, are investigated to enhance system performance. Finally, the results yield an analysis of an indoor positioning system using LED transmitters and VLC receivers, comparing direct positioning and two-step approaches, highlighting the former's effectiveness in low SNR. Additionally, the computational complexity and optimality of the direct approach are discussed, as well as the two-step positioning strategy. An analysis is presented on the accuracy of distance estimation based on Time of Arrival (TOA) and Received Signal Strength (RSS) as a function of signal frequency and duration, addressing the impact of sampling on TOA and RSS-based estimators, and discussing the convergence of synchronous and asynchronous approaches in certain scenarios.

Keywords: Modeling, Positioning, Visible Light.

I. INTRODUCCIÓN

1.1. Realidad problemática.

El Perú se encuentra ante una brecha digital que limita su acceso a tecnologías avanzadas. Aunque ha habido avances significativos en ciertas áreas, como la telefonía móvil, todavía persisten desafíos en la implementación y adopción de tecnologías más complejas, como el posicionamiento por luz visible. Esto se debe a problemas estructurales como la falta de inversión en investigación y desarrollo, limitaciones en la educación tecnológica y la brecha de acceso a Internet en zonas rurales y marginadas. Además, la situación económica del país también influye en la adopción de tecnologías avanzadas. Los altos costos de implementación y mantenimiento de sistemas como el de posicionamiento por luz visible hacen que sean inaccesibles para muchas empresas y sectores, limitando así su aplicación en áreas como la agricultura de precisión, la logística o la navegación.

Otro desafío significativo es la falta de regulaciones claras y políticas específicas que impulsen la adopción de tecnologías emergentes. La ausencia de marcos legales actualizados y adaptados a estos avances tecnológicos dificulta su implementación segura y eficiente.

1.1.1. Problema general.

¿El desarrollo de un modelamiento del sistema de posicionamiento permitirá la comunicación por luz visible?

1.1.2. Problemas específicos.

¿El modelar un sistema de comunicación por luz visible permitirá la estimación de la cota inferior de Cramer-Rao y de máxima verosimilitud en una comunicación sincronizada y no sincronizada?

¿Si se configura un algoritmo de posicionamiento basado en la estimación directa y two-step permitirá la generación de la comunicación por luz visible?

1.2. Antecedentes.

1.2.1. Antecedentes internacionales.

En el año 2023, Abdalmajeed, et al. [1] presentaron un novedoso método de posicionamiento por luz visible (Visible Light Positioning – VLP, en inglés) para reducir el error de localización en un entorno interior. Utilizaron los métodos machine learning (ML) como el árbol de decisión (Decision Tree – DT, en inglés), la máquina de vector soporte (Support Vector Machine – SVM, en inglés) y las redes neuronales (Neural Networks – NN, en inglés) en combinación con la intensidad de señal recibida (Received Signal Strength – RSS, en inglés) del LED y el ángulo de un láser orientable. Realizaron la simulación del estudio de óptica Zemax para construir un entorno interior real. Configuraron las aplicaciones de las técnicas de ML en el software Orange Data Mining. Obtuvieron como resultados el error máximo es de 5m de distancia del receptor, este fue el peor error porque el receptor no pudo recibir el

haz LOS de algunos transmisores y solo el haz de la línea de vista llega al receptor cuando una persona comienza a moverse del punto 1 al punto 5.

En el año 2023, Al-Dhahir, et al. [2] proponen un esquema de asignación de potencia robusta para redes integradas en el posicionamiento y comunicación por luz visible (Visible light positioning and communication – VLPC, en inglés) explotando la relación intrínseca entre posicionamiento y comunicaciones. Para ello derivaron las relaciones explícitas entre los errores aleatorios de posicionamiento, que siguen tanto una distribución gaussiana como una distribución arbitraria, y los errores de información de estado del canal.

En el año 2023, Ding, et al. [3] utilizaron la intensidad de la señal recibida del fotodetector en un terminal móvil para extraer las características geométricas con el fin de inferir la coordenada exacta de posición mediante deep learning. Diseñaron un modelo híbrido basado en red neuronal convolucional y recurrente (Convolutional-recurrent neural network – CRNN, en inglés), para el aprendizaje del mapeo no lineal de la intensidad de señal recibida para las coordenadas de posición de la propagación por luz visible en entornos internos adversos. Configuraron la arquitectura del posicionamiento por luz visible (Visible light positioning – VLP, en inglés) de cuatro dimensiones (4D) basado en la CRNN para hacer frente a la propagación no lineal por la luz visible en interiores y a la diferente orientación del receptor.

En el 2023, Aziz, et al. [4] realizaron un estudio sistemático de investigaciones basada en la comunicación por luz visible (Visible Light Communication – VLC, en inglés) contribuyendo en un nuevo espectro inutilizado en adición a la tradicional comunicación por radiofrecuencia desempeñando un rol importante en la comunicación inalámbrica. La adaptación de la tecnología VLC mejora la conectividad inalámbrica tanto en interiores como en exteriores. La comunicación Múltiple entrada múltiple salida (Multiple-input Multiple-output – MIMO, en inglés) ha sido una técnica eficaz para aumentar la capacidad y el rendimiento de los sistemas de comunicaciones inalámbricas.

En el 2020, Balestriero, et al. [5] presentaron un sistema que integra la comunicación y posicionamiento por luz visible (Visible light positioning and communication – VLPC, en inglés) para dispositivos del internet de las cosas (Internet of Things – IoT, en inglés) con el fin de proporcionar una alta velocidad en la transmisión de datos y un posicionamiento de alta precisión para los dispositivos IoT. Exploraron la técnica de multiportadora de banco de filtros (Filter bank multicarrier – FBMC, en inglés) basada en la multiplexación de subportadoras (Subcarrier multiplexing – FBMC-SCM) para reducir eficazmente las interferencias fuera de banda (Out-of-band

interference – OOBI, en inglés) en las subportadoras adyacentes de comunicación y posicionamiento.

1.2.2. Antecedente nacional.

En el 2021, Javier [6] creo un prototipo de punto de acceso para una red por luz visible en el software GNU Radio, el prototipo puede ser incluido en cualquier diagrama de comunicación full-duplex, por sus características se adaptan de mejor forma a la comunicación por luz visible, el autor recomienda restringir su uso en otros tipos de comunicaciones. Utilizo la GNU Radio en los equipos Universal software radio peripheral (USRP) en un diagrama de comunicación por luz visible para sus interfaces. Obtuvo como resultado la velocidad del sistema era 2 Mb/s, agrego bloques del punto de acceso dentro del sistema no afectan a su velocidad, pero sí a su throughput, aunque tenga un solo cliente la eficiencia del canal decae en un 28% en relación con sistema sin el punto de acceso, esto se debe principalmente a que 20% del este se sacrifica en intervalos de guarda, la eficiencia llega hasta un 7.2% cuando se tienen diez clientes en la red.

1.3. Justificación e importancia de la investigación.

1.3.1. Justificación.

La investigación se justifica socialmente, por su potencial para mejorar la productividad agrícola, la salud pública, la seguridad vial, la inclusión digital y, en última instancia, contribuir al desarrollo equitativo y sostenible del país; económicamente, por su capacidad para mejorar la eficiencia en sectores clave como la agricultura, el transporte, la salud y la atracción de inversiones, lo que a su vez puede contribuir al crecimiento económico, la competitividad empresarial y la creación de empleo en el país; teóricamente, por los fundamentos sólidos de óptica, procesamiento de imágenes, algoritmos de localización y tecnologías de sensores, que permiten desarrollar un sistema preciso y eficiente para determinar la posición en entornos donde otros sistemas pueden ser limitados o menos precisos; técnicamente, proporcionar una localización precisa y confiable, su adaptabilidad a diferentes entornos, la mejora en el desarrollo de sensores y hardware, la eficacia de algoritmos de procesamiento y su integración con otras tecnologías emergentes para mejorar su funcionalidad y aplicabilidad en diversos campos; prácticamente, por su potencial de mejorar procesos, aumentar la eficiencia, reducir costos y, en general, mejorar la calidad de vida en diferentes aspectos tanto comerciales como personales, demostrando su utilidad y valor en una amplia gama de situaciones y sectores, y; ambientalmente por contribuir positivamente a la sostenibilidad al mejorar la eficiencia en el uso de recursos y alentar prácticas más responsables en diversos sectores.

1.3.2. Importancia.

Como se ha señalado previamente, la importancia de la propuesta de investigación se orienta en los sistemas de posicionamiento por luz visible ya que tienen la capacidad de proporcionar una precisión en la ubicación de dispositivos o receptores en entornos específicos, pueden complementar y mejorar otros sistemas de posicionamiento existentes como el sistema de posicionamiento global (Global positioning system – GPS, en inglés) que tiene limitaciones en entornos interiores o urbanos densos, desempeñan un papel importante en la seguridad y el monitoreo en tiempo real donde se requiere un seguimiento preciso de los activos o del personal; el valor de la propuesta de investigación se orienta en el estudio de los límites teóricos y estimadores para la estimación de la distancia en los sistemas de posicionamiento por luz visible (Visible Light Positioning – VLP, en inglés) síncronos y asíncronos, específicamente, la cota inferior de Cramér-Rao (Cramer-Rao lower bound – CRLB, en inglés) y los estimadores de máxima verosimilitud (Maximum likelihood estimators – MLE, en inglés) investigando sus funciones en el tiempo de llegada (Time-of-arrival – TOA, en inglés) y/o los parámetros de intensidad de la señal recibida (Received Signal Strength – RSS, en inglés); el aporte de la propuesta de investigación a nivel práctico está en la estimación de la distancia híbrida basada en el TOA–RSS para los sistemas VLP y CRLB, comparándola analíticamente, además, se investigara los efectos del muestreo, para obtención del rendimiento asintótico con limitaciones de frecuencia de muestreo a medida que la varianza del ruido converge a cero, la propuesta del estimador de distancia hibrida modificada basada en el TOA-RSS proporcionara mejoras en el rendimiento en presencia de las limitaciones de frecuencia de muestreo. Finalmente, se busca solucionar los problemas como la atenuación de la señal mediante la mitigación la atenuación de la señal, se pueden utilizar fuentes de luz más potentes o mejorar la sensibilidad de los detectores de luz en el receptor, también se pueden implementar técnicas de procesamiento de señales, como la ecualización o la compensación de pérdidas, para mejorar la detección de la señal en entornos con alta atenuación.

1.4. Objetivos de la investigación.

1.4.1. Objetivo general.

Desarrollar un modelamiento del sistema de posicionamiento para la comunicación por luz visible

1.4.2. Objetivos específicos.

Modelar un sistema de comunicación por luz visible para la estimación de la cota inferior de Cramer-Rao y de máxima verosimilitud en una comunicación sincronizada y no sincronizada.

Configurar un algoritmo de posicionamiento basado en la estimación directa y two-step para generar la comunicación por luz visible.

1.5. Hipótesis y variables de la investigación.

1.5.1. Hipótesis general.

El modelamiento del sistema de posicionamiento desarrollado permite la comunicación por luz visible.

1.5.2. Hipótesis específicas.

El modelamiento de un sistema de comunicación por luz visible permite estimar la cota inferior de Cramer-Rao y de máxima verosimilitud en una comunicación sincronizada y no sincronizada.

La configuración de un algoritmo de posicionamiento basado en la estimación directa y two-step permite generar la comunicación por luz visible.

1.5.3. Variable independiente.

Comunicación por luz visible.

Estimación de cota inferior de Cramer-Rao.

Estimación de máxima verosimilitud.

1.5.4. Variable dependiente.

Modelamiento.

Sistema de posicionamiento.

1.6. Contenido de la investigación.

Para una mejor comprensión en el capítulo I, se hace la introducción describiendo la realidad problemática, los antecedentes, la justificación e importancia, y los objetivos de la investigación. En el capítulo II, se explica la metodología empleada y se lleva a cabo un análisis teórico comparativo de la estimación de distancia en sistemas VLP mediante la provisión de indicadores de rendimiento y estimadores estadísticos. En el capítulo III, se se explican los resultados y se estudian métodos de estimación de posición directos y de dos pasos para sistemas VLP. En virtud de ello, en el capítulo IV, se discuten los resultados de la investigación. Finalmente, en el capítulo V, se formula las conclusiones de la tesis, y en el capítulo VI, se propone las recomendaciones para futuras investigaciones.

II. ESTRATEGIA METODOLÓGICA

2.1. Análisis de los sistemas de comunicación visible.

Con el advenimiento de tecnologías de diodos emisores de luz (LED) de bajo costo y eficiencia energética, los sistemas de comunicación visible (VLC) basados en LED han ganado una cantidad significativa de interés en la investigación en la última década [1-3]. Utilizando el vasto espectro de luz visible sin licencia, el VLC tiene el potencial de superar el problema de escasez de espectro encontrado en los sistemas inalámbricos basados en radiofrecuencia (RF) [4]. En escenarios interiores, los sistemas VLC pueden utilizar la infraestructura de iluminación disponible para proporcionar simultáneamente diversas capacidades, como iluminación, transmisión de datos de alta velocidad y localización [2,5]. Aparte de su función básica de iluminar espacios interiores, los LED pueden modularse a altas frecuencias para lograr una transmisión de alta velocidad de datos [3, 6, 7]. Por otro lado, el proceso de localización a través de señales de luz visible puede ser realizado por sistemas de posicionamiento de luz visible (VLP), donde los receptores VLC equipados con fotodetectores pueden realizar una estimación de posición aprovechando las señales emitidas por los transmisores LED en ubicaciones conocidas [5, 7-10]. Dado que generalmente existen enlaces de línea de visión (LOS) entre los transmisores LED y los receptores VLC, y los efectos de multipath no son muy significativos en comparación con las soluciones basadas en RF [11, 12], los sistemas VLP pueden facilitar una estimación de ubicación precisa en entornos interiores [9, 13-15]. Entre las diversas aplicaciones de los sistemas VLP, la navegación de robots, el seguimiento de activos y los servicios basados en la ubicación pueden considerarse como las más prominentes [3, 5]. El objetivo principal de esta disertación es investigar técnicas de estimación de distancia y posición en sistemas VLP al proporcionar límites teóricos de rendimiento, desarrollar algoritmos eficientes y proponer enfoques de asignación de recursos para mejorar la precisión. Se derivan varios límites de rendimiento en la estimación de distancia y posición tanto en escenarios VLP síncronos como asíncronos, diseñamos estimadores estadísticos y realizamos un análisis completo de precisión de los sistemas VLP a través de resultados teóricos y numéricos [16-18]. Se centra en estrategias de asignación de potencia para los transmisores LED en sistemas VLP con el objetivo de minimizar el error de localización de los receptores VLC [19]. Se extiende el análisis para considerar los efectos de la cooperación entre los receptores VLC y diseñamos algoritmos iterativos y distribuidos para la localización cooperativa en sistemas VLP [20]. En las siguientes secciones, proporcionamos una revisión de la literatura y resumimos nuestras principales contribuciones.

2.2. Estimación de distancia y posición en sistemas de luz visible.

2.2.1. Estimación de Distancia en Sistemas de Luz Visible. En sistemas VLP, varios tipos de parámetros, como la fuerza de la señal recibida (RSS), el tiempo de llegada (TOA), la diferencia de tiempo de llegada (TDOA) y el ángulo de llegada (AOA), pueden

utilizarse para la estimación de posición. En sistemas basados en RSS, la posición de un receptor VLC se estima en función de las mediciones de RSS entre el receptor VLC y varios transmisores LED [9, 13-15, 21, 22]. A diferencia de los sistemas basados en RF, el parámetro RSS puede proporcionar información muy precisa relacionada con la posición en sistemas VLP, ya que el factor de atenuación del canal no fluctúa significativamente en canales de luz visible con línea de visión (LOS). En [13], se implementa un sistema VLP completo basado en mediciones de RSS y trilateración, y se compara la precisión lograda, que es sub-métrica, con otros sistemas de posicionamiento.

En [21], se emplea el filtrado de Kalman y de partículas para el seguimiento de posición basado en RSS en sistemas VLP. El estudio en [15] utiliza un solo transmisor LED y múltiples receptores ópticos para la estimación de posición, donde la posición de la unidad receptora se determina en función de las mediciones de RSS en varios receptores. En [14], se diseña un sistema VLP basado en RSS y se implementa un protocolo de acceso múltiple. El sistema propuesto garantiza una precisión a nivel de decímetros en casi todos los escenarios, tanto en presencia como en ausencia de exposición directa a la luz solar. Se propone un sistema de comunicación con asignación de portadora en [9] para el posicionamiento basado en RSS, y se realizan experimentos para ilustrar su precisión promedio a nivel de centímetros.

Los estudios en [23] y [24] consideran el uso del parámetro de retraso de tiempo para el posicionamiento. En particular, [23] investiga los límites teóricos en la estimación del TOA para sistemas de luz visible. En [24], se calculan TDOAs en un receptor VLC basándose en señales de tres LED, y se realiza una estimación de posición bidimensional basada en TDOAs. Como otra alternativa, el parámetro AOA puede utilizarse para la localización en sistemas VLP [25-27]. Por ejemplo, el estudio en [27] considera un sistema VLC de múltiples elementos y aprovecha el estrecho campo de visión de los LED para extraer información relacionada con la posición de las condiciones de conectividad. Basándose en un estimador de mínimos cuadrados y filtrado de Kalman, se informa de una precisión promedio de posicionamiento del orden de 0.2 metros.

Aunque existen muchos estudios sobre sistemas VLP, los límites teóricos en la precisión de estimación se han considerado muy raramente [23, 28]. Los límites teóricos de estimación presentan límites de rendimiento útiles en los errores cuadrados medios (MSE) de los estimadores y proporcionan pautas importantes para el diseño del sistema. En [23], se presenta el límite inferior de Cramér-Rao (CRLB) para la estimación de distancia (o TOA) en un sistema VLC síncrono. Se investigan los efectos de varios parámetros del sistema, como la potencia óptica de la fuente, la

frecuencia central y el área del fotodetector. Los resultados de simulación indican límites de precisión a nivel de centímetros para parámetros de sistema típicos. El estudio en [28] deriva el CRLB para la estimación de distancia basada en el parámetro RSS e investiga la dependencia de la expresión del CRLB en parámetros del sistema, como la configuración del LED, la altura del transmisor y el ancho de banda de la señal. Nuevamente, se observan CRLBs del orden de centímetros para parámetros de sistema típicos.

En la primera parte del capítulo II, se considera un modelo de señal genérico, que abarca la estimación de distancia basada en TOA [23] y la estimación de distancia basada en RSS [28] como casos especiales, y se derivan límites teóricos y estimadores. En particular, se investigan los límites de Cramér-Rao (CRLB) y los estimadores de máxima verosimilitud (MLE) tanto para escenarios síncronos como asíncronos, y en presencia y ausencia de una relación entre la distancia y el factor de atenuación del canal. De esta manera, además de la estimación de distancia basada en TOA y en RSS, se introduce la estimación de distancia basada en TOA/RSS híbrida para sistemas VLP, y se proporcionan vínculos y comparaciones teóricas entre el estudio actual y los realizados en la literatura [23, 28]. Además, mediante las expresiones del CRLB, se comparan analíticamente los límites de precisión para la estimación de distancia basada en TOA, la estimación de distancia basada en RSS y la estimación de distancia basada en TOA/RSS híbrida. Además, se obtienen resultados asintóticos para los MLE bajo limitaciones de la tasa de muestreo, y se propone un estimador híbrido modificado para realizar una estimación precisa de distancia en escenarios prácticos.

Además de las expresiones del CRLB, también derivamos el límite de Ziv-Zakai (ZZB) para la estimación de distancia en sistemas VLP síncronos (que pueden utilizar tanto los parámetros TOA como RSS) en presencia de información previa sobre el parámetro de distancia. Por lo tanto, a diferencia de los límites teóricos en [16, 23, 28, 29], el objetivo es proporcionar límites teóricos para un sistema VLP síncrono considerando también los efectos de información previa. Aunque el CRLB puede proporcionar límites ajustados en los errores cuadrados medios (MSE) de estimadores no sesgados en condiciones de alta relación señal-ruido (SNR), puede ser bastante amplio para bajas SNR [30]. Además, las derivaciones del CRLB no consideran ninguna información estadística previa sobre el parámetro de rango (o posición), que de hecho puede estar disponible en entornos interiores; por ejemplo, basado en dimensiones físicas y parámetros conocidos del sistema, como el campo de visión del fotodetector. Para abordar estos problemas, el ZZB puede utilizarse como una referencia para el rango en sistemas VLP. El ZZB puede proporcionar límites ajustados en los MSE de estimadores en todas las condiciones de SNR, y también utiliza la

información previa disponible [30, 31]. El estudio en [32] deriva el ZZB en la estimación de rango en un sistema VLP asíncrono basado en mediciones de RSS y proporciona comparaciones con los estimadores de máxima probabilidad a posteriori (MAP) y de error cuadrático medio mínimo (MMSE).

Se deriva el límite de Ziv-Zakai (ZZB) para el rango en un sistema VLP síncrono utilizando la información previa y la información de rango tanto del parámetro de retraso de tiempo (TOA) como del factor de atenuación del canal (RSS) a través del patrón lambertiano. Basándonos en el ZZB, se analizan los efectos de varios parámetros del sistema, como el orden lambertiano, el área del fotodetector y la potencia óptica de la fuente, en términos de precisión de rango, y se proporcionan pautas de diseño para sistemas VLP prácticos. Además, se calcula la esperanza del límite inferior de Cramér-Rao (ECRB) y se obtiene una expresión en forma cerrada para información previa uniforme. La expresión del ECRB ilustra los efectos de la información previa y proporciona una alternativa de baja complejidad al ZZB en condiciones de alta SNR. Además, se derivan el límite inferior de Cramér-Rao bayesiano (BCRB) y el límite inferior de Cramér-Rao ponderado (WCRB) para presentar límites teóricos que utilizan de manera efectiva la información previa, y se comparan con el ZZB.

2.2.2. Estimación de posición directa y en dos pasos en sistemas de luz visible. Comúnmente, el problema de la localización inalámbrica se investiga mediante el empleo de dos clases de enfoques, que son la estimación de posición en dos pasos y la estimación de posición directa. Ampliamente aplicados en sistemas de localización basados en RF y VLP, los algoritmos de estimación en dos pasos extraen parámetros relacionados con la posición, como RSS, TOA, TDOA y AOA en el primer paso, y realizan la estimación de posición basada en esos parámetros en el segundo paso [33]. Existen multitud de aplicaciones de sistemas VLP en interiores que emplean la estimación en dos pasos, como aquellos que utilizan RSS [14, 34-36], AOA [27], RSS/AOA híbrido [26, 29, 37], TOA [16, 23] y TDOA [24]. Sin embargo, el método de dos pasos puede considerarse como una solución subóptima para el problema de localización, ya que no aprovecha todos los datos recopilados relacionados con la ubicación desconocida. Por otro lado, los algoritmos de estimación de posición directa utilizan toda la señal recibida en un proceso de un solo paso para determinar la posición desconocida, a diferencia de la estimación en dos pasos [38-40]. Por lo tanto, toda la información disponible sobre la posición desconocida se puede utilizar de manera efectiva en el enfoque de estimación de posición directa, lo que puede llevar a la solución óptima para el problema de localización. Una justificación teórica de la

superioridad de la estimación de posición directa sobre la estimación de posición convencional en dos pasos se proporciona en [41, 42]. En [38], se propone la técnica de determinación de posición directa (DPD) para la localización de emisores de RF de banda estrecha, donde se emplea el algoritmo de clasificación de múltiples señales (MUSIC) para formular la función de costo en el caso de señales desconocidas. Se demuestra que el enfoque DPD supera a la técnica convencional de localización basada en AOA en dos pasos. El estudio en [43] investiga la localización de una fuente de RF de banda estrecha estacionaria utilizando señales de múltiples receptores en movimiento en un enfoque de un solo paso y demuestra que el método DPD es superior al método de diferencial Doppler (DD) en dos pasos en condiciones de baja SNR. Además, se muestra que las técnicas de localización directa mejoran el rendimiento de la localización en sistemas basados en TOA [44], TDOA [45] y TOA/AOA híbridos [46]. Los algoritmos de estimación de posición directa también se emplean para la localización de objetivos en sistemas de radar [47, 48].

Aunque el enfoque DPD se ha utilizado en numerosas aplicaciones en sistemas de localización basados en RF, solo se ha llevado a cabo una cantidad limitada de investigaciones sobre la utilización de técnicas DPD en sistemas VLP en interiores. En [49], se propone un sistema VLP basado en RSS con LED no direccionales y una matriz de detectores que consta de varios fotodiodos (PD) direccionales, donde los valores RSS promediados en el tiempo en cada PD se consideran como la observación final para la estimación de posición bidimensional. En [50], que extiende el estudio en [49], se emplea un receptor de correlación para obtener una sola estimación de RSS para cada PD sin optimizar el pico del correlador. Sin embargo, desde la perspectiva de la estimación de posición directa, los métodos propuestos en [49] y [50] utilizan solo las muestras promediadas en el tiempo o de correlación de la señal recibida, no la señal completa para la localización. Además, se diseña un sistema VLP asíncrono en [51], donde se construye un modelo de señal bayesiano para estimar la posición desconocida basándose en toda la señal recibida de varios LED en presencia de la obstrucción de señales de varios LED.

Para proporcionar referencias de rendimiento para los algoritmos de posicionamiento, se han considerado límites teóricos en la estimación de distancia ('rango') y posición en sistemas VLP en varios estudios de la literatura [16, 17, 23, 28, 29, 49, 52]. El trabajo en [28] deriva el límite inferior de Cramér-Rao (CRLB) para la estimación de distancia basada en información de RSS, mientras que [23] presenta el CRLB para la estimación de distancia en sistemas de luz visible síncronos basados en mediciones de TOA. El CRLB en la estimación de rango basada en TOA/RSS híbrida se investiga en [16]. En [17], se deriva el límite de Ziv-Zakai (ZZB) para sistemas VLP síncronos en

presencia de información previa sobre la distancia y se compara con el ECRB, BCRB y WCRB, que también utilizan información previa. Además de la estimación de distancia, también se han derivado límites teóricos de precisión para la localización en sistemas de luz visible. En [29], se deriva el CRLB para la localización tridimensional basada en RSS para un escenario VLP en interiores con configuraciones arbitrarias de transmisor LED y receptor VLC. En [49] y [50], se aborda la localización bidimensional basada en RSS con la suposición de una altura conocida del receptor, y se deriva una expresión analítica del CRLB en consecuencia.

2.3. Asignación de recursos en sistemas de luz visible.

Con el fin de proporcionar un rendimiento satisfactorio para dispositivos móviles o estacionarios, es esencial investigar la optimización del rendimiento en sistemas de luz visible con respecto a diversos criterios, como la minimización del error cuadrático medio [53–56] y la maximización de la tasa de transmisión [57–65]. En la literatura, se exploran ampliamente diseños de precodificación y compensación de corriente continua (DC offset) para mejorar el rendimiento del error cuadrático medio de sistemas VLC de entrada múltiple, salida múltiple (MIMO) [53–56]. Además de los diseños de transceptor y compensación en sistemas VLC, una línea de investigación cada vez más popular se centra en la asignación de potencia para los transmisores LED para mejorar el rendimiento del sistema [57–64, 66, 67]. Debido a preocupaciones prácticas relacionadas con la eficiencia energética y la vida útil de los LED, las potencias de transmisión de los LED en sistemas de luz visible son recursos valiosos que pueden tener efectos profundos tanto en las tasas de transmisión de sistemas VLC como en la precisión de localización de sistemas VLP. En [57], la tasa de datos instantánea total de matrices de LED se considera como la métrica de rendimiento para un sistema VLC MIMO y se deriva la estrategia óptima para la asignación de potencia de LED bajo restricciones de suma de potencia óptica y no negatividad. Los estudios en [58] y [60] realizan una optimización de potencia para los LED para maximizar la tasa de transmisión total de todas las subportadoras en un sistema VLC que utiliza multiplexación por división de frecuencia ortogonal (OFDM) óptica. Con el objetivo de lograr equidad proporcional entre los usuarios en una red VLC de múltiples usuarios, la tasa de datos logarítmica total se optimiza en [61] y [64] para identificar la estrategia óptima de control de potencia de LED. Aunque las restricciones de potencia total e individual se utilizan ampliamente en la optimización de asignación de potencia en sistemas VLC, varios estudios también incorporan restricciones de color y luminancia en el marco de optimización de potencia, en conformidad con la funcionalidad de iluminación de los sistemas VLC [59, 62]. En general, los algoritmos de asignación de potencia tanto en sistemas VLC como en sistemas VLP deben tener en cuenta una variedad de requisitos de diseño impuestos por la naturaleza multifacética de las aplicaciones de luz visible.

El concepto de asignación de potencia también se ha considerado ampliamente para redes de localización inalámbrica basadas en RF [68-77], donde las potencias de transmisión de los nodos anclados (cuyas ubicaciones son conocidas) se pueden optimizar para mejorar la precisión de localización de los nodos objetivo (con ubicaciones desconocidas). El enfoque predominante en tales investigaciones es adoptar un límite matemáticamente tratable y ajustado en el error de localización como la métrica de rendimiento y formular el problema de optimización bajo restricciones de potencia de anclaje promedio y máxima. En [68] y [69], se diseñan algoritmos de asignación de potencia de anclaje para minimizar el consumo total de potencia sujeto a requisitos de precisión predefinidos para la localización de nodos objetivo. Para redes de localización cooperativas, se desarrollan estrategias de asignación de potencia distribuida en [70], donde las potencias de transmisión tanto de los anclajes como de los objetivos se asignan de manera óptima para minimizar el límite del error cuadrático medio de posición (SPEB). Además, [73] explora el problema de la asignación óptima de potencia para subportadoras OFDM en presencia de conocimiento perfecto e imperfecto de los parámetros de la red. Como se observa comúnmente en sistemas de localización inalámbrica basados en RF, la asignación óptima de potencia proporciona beneficios de rendimiento significativos sobre la estrategia uniforme tradicional para una amplia gama de escenarios de localización.

Para cuantificar la precisión de la localización, se adopta la métrica del límite inferior de Cramér-Rao (CRLB) en la formulación del problema. Aprovechando herramientas de optimización convexa y programación semidefinida (SDP), formulamos y resolvemos varios problemas de optimización tanto en la ausencia como en la presencia de incertidumbre de parámetros. El problema de asignación de potencia para sistemas VLP tiene las siguientes diferencias clave con respecto al de sistemas de localización basados en RF: (i) Debido a la región lineal limitada de operación, los LED están sujetos tanto a las restricciones de potencia mínima como máxima [55,59,78,79]. (ii) Dado que los sistemas VLP sirven al doble propósito de iluminación y localización, la formulación del problema debe incluir restricciones de iluminación que garanticen un nivel aceptable de iluminación en espacios interiores [79-82]. (iii) A diferencia de los sistemas de RF en los que los componentes de multipath pueden afectar severamente la calidad de la localización, la potencia de la señal recibida en sistemas VLP se puede caracterizar con precisión mediante la fórmula de Lambertiana [12].

2.4. Localización cooperativa en sistemas de luz visible.

Basándose en la disponibilidad de medidas entre nodos, las redes de localización inalámbrica se pueden clasificar ampliamente en dos grupos: cooperativas y no cooperativas. En el enfoque no cooperativo convencional, la estimación de posición se realiza utilizando solo las medidas entre nodos ancla (que tienen ubicaciones conocidas) y nodos agentes (cuyas

ubicaciones se deben estimar) [83, 84]. Por otro lado, los sistemas cooperativos también incorporan las medidas entre nodos agentes en el proceso de localización para lograr un mejor rendimiento [84]. Los beneficios de la cooperación entre nodos agentes son más pronunciados especialmente para redes dispersas donde los agentes no pueden obtener medidas de un número suficiente de anclajes para una posición confiable [85]. Existe un extenso cuerpo de investigación sobre la investigación de técnicas de cooperación y el desarrollo de algoritmos eficientes para la localización cooperativa en redes basadas en RF [83-85]. En términos de implementación de algoritmos, los enfoques centralizados intentan resolver el problema de localización a través de la optimización de una función de costo global en una unidad central a la que se entregan todas las medidas. Entre varios métodos centralizados, los estimadores de máxima verosimilitud (ML) y mínimos cuadrados no lineales (NLS) son los más ampliamente utilizados, ambos llevan a problemas de optimización no convexos y difíciles de resolver, que generalmente se aproximan mediante enfoques de relajación convexa como la programación semidefinida (SDP) [86-88], programación cónica de segundo orden (SOCP) [89, 90] y subestimadores convexos [91]. En los algoritmos distribuidos, los cálculos relacionados con la estimación de posición se ejecutan localmente en nodos individuales, lo que refuerza la escalabilidad y la robustez ante la congestión de datos [84]. La estimación basada en teoría de conjuntos [92-95], gráficos de factores [84] y el escalado multidimensional (MDS) [96] constituyen herramientas comunes empleadas para la localización cooperativa distribuida en la literatura.

A pesar del uso ubicuo de técnicas de cooperación en redes de localización inalámbrica basadas en RF, no se han considerado estudios en la literatura que exploren la cooperación en redes de luz visible. Se extiende el paradigma cooperativo al dominio de la luz visible. Específicamente, presentamos un marco de trabajo de localización cooperativa para redes VLP, donde los transmisores LED con ubicaciones fijas y conocidas funcionan como anclajes y las unidades VLC con ubicaciones desconocidas están equipadas con LEDs y PDs con el propósito de comunicarse tanto con los LEDs fijos como con otras unidades VLC. La utilización del marco propuesto está motivada por las siguientes posibles aplicaciones prácticas:

- **VLC Vehicular para Transporte Inteligente**: La implementación de LEDs de bajo costo y eficientes en consumo de energía en faros delanteros, luces traseras y señales de giro de vehículos modernos, hace que las comunicaciones de vehículo a vehículo (V2V) a través de VLC sean un enfoque factible para redes vehiculares [97-99]. Como receptores VLC, los PDs (fotodetectores) pueden colocarse en diferentes partes de los vehículos (por ejemplo, cerca de los faros delanteros, luces traseras o espejos laterales [99]) para permitir la cooperación entre vehículos [97]. Como se ilustra en la figura N°1, aprovechando las comunicaciones de vehículo a infraestructura (V2I) entre

infraestructuras de tráfico (por ejemplo, semáforos o luces de calle) y vehículos, junto con las conexiones V2V VLC, se puede implementar un sistema de localización vehicular cooperativo basado en VLC para proporcionar información de ubicación precisa para aplicaciones cooperativas de sistemas de transporte inteligente (ITS), especialmente en escenarios desafiantes donde las señales del sistema de posicionamiento global (GPS) se degradan severamente (por ejemplo, áreas urbanas o túneles) [99, 100].

- **VLC Interior con Capacidad de Enlace Ascendente Infrarrojo**: Dado que los LEDs infrarrojos y los PDs ya están disponibles en algunos sistemas VLC para una transmisión ascendente eficiente [2, 4, 101-103], también pueden ser utilizados para comunicaciones de dispositivo a dispositivo para lograr la cooperación entre unidades VLC (ver figura N°2 para una ilustración de un sistema VLP cooperativo interior). Un beneficio adicional de utilizar longitudes de onda infrarrojas para la cooperación es que ayuda a mitigar los riesgos de seguridad ocular incurridos por las comunicaciones entre unidades VLC [104].

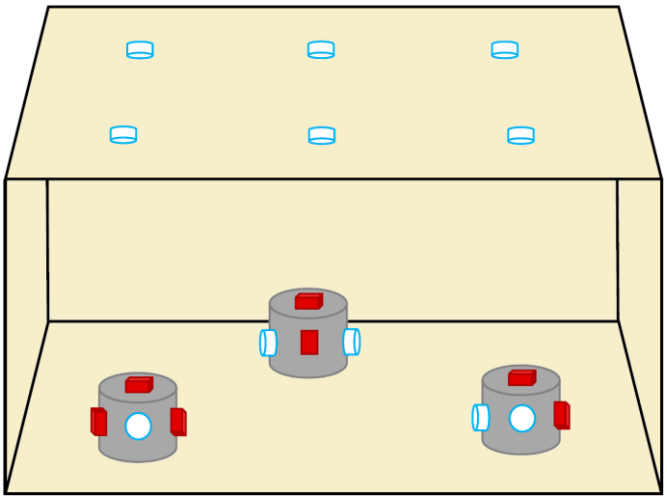
La red propuesta facilita la definición de conjuntos de conectividad arbitrarios entre los LEDs en el techo y las unidades VLC, así como también entre las propias unidades VLC, lo que puede proporcionar mejoras significativas en el rendimiento en comparación con el enfoque no cooperativo tradicional utilizado en la literatura de VLP.

Figura N°1: VLC vehicular para sistemas de transporte inteligente cooperativo.
Fuente: Elaboración propia.

Basándonos en las medidas de RSS no cooperativas (es decir, entre los LEDs en el techo y las unidades VLC) y cooperativas (es decir, entre las unidades VLC), primero derivamos la CRLB y el MLE para la localización de las unidades VLC. Dado que el MLE plantea un desafiante problema de optimización no convexo, seguimos un enfoque de estimación basado en teoría de conjuntos y formulamos el problema de localización cooperativa como un problema de factibilidad cuasiconvexo (QFP) [105], donde los conjuntos de restricciones factibles corresponden a conjuntos subniveles de cierto tipo de funciones cuasiconvexas. La

cuasiconvexidad que surge en la formulación del problema proviene de la fórmula de Lambert, que caracteriza el nivel de atenuación de los canales de luz visible. A continuación, diseñamos dos algoritmos buscadores de factibilidad, con características cíclicas y simultáneas, que emplean proyecciones iterativas de gradiente sobre los conjuntos de restricciones especificados. Desde el punto de vista de la implementación, los algoritmos propuestos pueden ser implementados en una arquitectura distribuida que se basa en cálculos en unidades VLC individuales y un mecanismo de difusión para actualizar las estimaciones de posición. Además, proporcionamos una prueba formal de convergencia para los algoritmos basados en proyecciones basada en la convergencia cuasi-Fejer, que tiene propiedades adecuadas para respaldar el análisis teórico [106].

Figura N°2: Ilustración de un sistema VLP cooperativo interior con tres unidades VLC (por



ejemplo, robots). Los cilindros blancos en el techo y en las unidades VLC representan los LEDs, y los prismas rectangulares rojos representan los PDs (fotodetectores).
Fuente: Elaboración propia.

Las aplicaciones de problemas de factibilidad convexa (CFP) abarcan una amplia variedad de disciplinas, como la localización inalámbrica [92-95, 107], el muestreo comprimido [108], la recuperación de imágenes [109], la eliminación de ruido en imágenes [110] y la radioterapia de intensidad modulada [111]. A diferencia de los problemas de optimización, donde el objetivo es minimizar la función objetivo mientras se satisfacen las restricciones, los problemas de factibilidad buscan encontrar un punto que satisfaga las restricciones en ausencia de una función objetivo [108]. Por lo tanto, el objetivo de un CFP es identificar un punto dentro de la intersección de una colección de conjuntos convexos cerrados en un espacio euclidiano (o, en general, de Hilbert). En problemas de factibilidad, un enfoque comúnmente seguido es realizar proyecciones sobre los conjuntos de restricción individuales de manera secuencial, en lugar de proyectar sobre su intersección debido a la intractabilidad analítica [112]. El trabajo en [92] formula el problema de localización de fuentes acústicas como un CFP y utiliza la conocida técnica de proyecciones sobre conjuntos convexos (POCS) para converger hacia las ubicaciones reales de las fuentes. Siguiendo una

metodología similar, el problema de posicionamiento inalámbrico no cooperativo con mediciones de rango ruidosas se modela como un CFP en [93], donde se utilizan los métodos POCS y de aproximación exterior (OA) para derivar algoritmos distribuidos que funcionan bien bajo condiciones de no línea de visión (NLOS). En [107], se propone un enfoque de localización cooperativa basado en proyecciones sobre conjuntos de fronteras no convexas para redes de sensores, y se muestra que la estrategia propuesta puede lograr un mejor rendimiento de localización que el SDP centralizado y el MDS distribuido, aunque puede quedar atrapada en mínimos locales debido a la no convexidad. De manera similar, el trabajo en [94] diseña un algoritmo de posicionamiento distribuido basado en POCS con una garantía de convergencia independientemente de la consistencia del CFP formulado, es decir, si la intersección es vacía o no.

Aunque los CFP han atraído mucho interés en la literatura, los QFP han sido investigados solo raramente. Los QFP representan versiones generalizadas de los CFP en el sentido de que los conjuntos de restricción se construyen a partir de los conjuntos de nivel inferior de funciones cuasiconvexas en los QFP, mientras que dichas funciones son convexas en los CFP [105]. El estudio en [105] explora las propiedades de convergencia de algoritmos iterativos basados en proyecciones de subgradiente utilizados para la solución de QFP. Se demuestra que las iteraciones convergen a una solución del QFP si las funciones cuasiconvexas cumplen las condiciones de Hölder y el QFP es consistente, es decir, la intersección no está vacía. Se muestra que las funciones basadas en el modelo de Lambertian (originalmente no cuasiconvexas) pueden aproximarse mediante límites cuasiconvexos apropiados, lo que convierte los conjuntos de restricción de subnivel (originalmente no convexos) en conjuntos de restricción cuasiconvexos, transformando así el problema de factibilidad formulado en un QFP.

El trabajo anterior en redes VLP ha abordado el problema de la estimación de posición principalmente mediante el estimador ML [16, 29, 50], el estimador de mínimos cuadrados [27, 29], triangulación [14, 113] y trilateración [24]. Además, las limitaciones teóricas derivadas para la estimación de posición son significativamente diferentes de las de [29, 50] debido a la incorporación de términos relacionados con la cooperación, lo que permite evaluar los efectos de la cooperación en el rendimiento de localización en cualquier escenario VLP cooperativo tridimensional. Además, a diferencia de las investigaciones anteriores sobre localización en redes inalámbricas basadas en RF mediante modelado de CFP [92-94, 107], donde un enfoque común es emplear algoritmos iterativos basados en POCS, formulamos el problema de localización como un QFP para sistemas VLP, lo que requiere el desarrollo de algoritmos más sofisticados (por ejemplo, proyecciones de gradiente) y técnicas diferentes para estudiar las propiedades de convergencia de esos algoritmos (por ejemplo, cuasiconvexidad y convergencia cuasi-Fejer).

2.5. Modelo del sistema.

En un sistema VLP interior, los transmisores LED generalmente se ubican en el techo de una habitación, y un receptor VLC se encuentra en un objeto en el suelo. Con base en las señales recibidas de los transmisores LED (que tienen posiciones conocidas), el receptor VLC puede estimar su distancia (alcance) a cada transmisor LED y determinar su posición con base en las estimaciones de distancia. El objetivo de este estudio es investigar los límites fundamentales en la estimación de distancia. Considere un transmisor LED en la ubicación $l_t \in \mathbb{R}^3$ y un receptor VLC en la ubicación $l_r \in \mathbb{R}^3$ en un escenario LOS (línea de visión directa). La distancia entre el transmisor LED y el receptor VLC se representa como x, y está dada por $x = \|\boldsymbol{l}_r - \boldsymbol{l}_t\|_2$. La señal recibida en el receptor VLC se expresa como [23].

$$r(t) = \alpha R_p s(t-\tau) + n(t) \tag{1}$$

para $t \in [T_1, T_2]$, donde T_1 y T_2 especifican el intervalo de observación, α es el factor de atenuación del canal óptico ($\alpha > 0$), R_p es la sensibilidad del fotodetector, $s(t)$ es la señal transmitida que es distinta de cero en un intervalo $[0, T_s]$, τ es el tiempo de llegada (TOA, por sus siglas en inglés), y $n(t)$ es un ruido aditivo gaussiano blanco con media cero y una densidad espectral de potencia de σ^2. Se asume que R_p y $s(t)$ son conocidos por el receptor VLC. Además, el parámetro TOA está modelado como:

$$\tau = \frac{x}{c} + \Delta \tag{2}$$

donde x es la distancia entre el transmisor LED y el receptor VLC, c es la velocidad de la luz, y Δ denota el desfase de tiempo entre los relojes del transmisor LED y el receptor VLC. Para un sistema síncrono, $\Delta = 0$, mientras que, para un sistema asíncrono, Δ está modelado como un parámetro determinístico desconocido. Se asume que se realiza una adquisición aproximada para que la componente de la señal en la Ec. (1) resida completamente en el intervalo de observación $[T_1, T_2]$.

El factor de atenuación del canal α en la Ec. (1) está modelado como:

$$\alpha = \frac{m+1}{2\pi} \cos^m(\phi) \cos(\theta) \frac{S}{x^2} \tag{3}$$

donde m es el orden lambertiano, S es el área del foto-detector en el receptor VLC, ϕ es el ángulo de irradiación, y θ es el ángulo de incidencia [13, 23]. Para simplificar las expresiones analíticas, se asume, de manera similar a [15, 23, 28], que el emisor LED apunta hacia abajo (que es comúnmente el caso) y el foto-detector en el receptor VLC apunta hacia arriba, de modo que $\phi = \theta$ y $\cos(\phi) = \cos(\theta) = h/x$, donde h denota la altura del emisor LED en relación al receptor VLC. Además, al igual que en [15, 21, 23, 28], se asume que la altura

del receptor VLC es conocida; es decir, las posiciones posibles del receptor VLC están confinadas a un plano bidimensional. Esta suposición se cumple en varios escenarios prácticos; por ejemplo, cuando el receptor VLC está unido a un carrito o robot que es rastreado a través de un sistema VLP, ya que los receptores VLC tienen alturas fijas y conocidas en tales aplicaciones [5]. Bajo estas suposiciones, la Ec. (3) se convierte en:

$$\alpha = \frac{m+1}{2\pi}\left(\frac{h}{x}\right)^{m+1}\frac{S}{x^2} \triangleq \gamma x^{-m-3} \tag{4}$$

donde

$$\gamma \triangleq (m+1)h^{m+1}S/(2\pi) \tag{5}$$

es una constante conocida.

2.6. CRLBs y estimadores de máxima verosimilitud (MLE).

Para calcular el CRLB, la función logarítmica de verosimilitud correspondiente al modelo de señal recibida en la Ec. (1) se especifica de la siguiente manera [120], [121]:

$$\Lambda(\boldsymbol{\varphi}) = k - \frac{1}{2\sigma^2}\int_{T_1}^{T_2}\Big(r(t) - \alpha R_p s(t-\tau)\Big)^2\,dt \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{\varphi}$ representa el conjunto de parámetros desconocidos que incluye x y otros parámetros accesorios, si los hay, dependiendo del escenario considerado (como se discute a continuación), y k representa una constante de normalización que es una función de σ y no depende del/los parámetro(s) desconocido(s). El CRLB se obtiene a partir de la inversa de la matriz de información de Fisher (FIM) para $\boldsymbol{\varphi}$, que puede calcularse a partir de la función de verosimilitud logarítmica en la Ec. (6) como [122]

$$J(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbb{E}\left\{\Big(\nabla_{\boldsymbol{\varphi}}\Lambda(\boldsymbol{\varphi})\Big)\Big(\nabla_{\boldsymbol{\varphi}}\Lambda(\boldsymbol{\varphi})\Big)^T\right\} \tag{7}$$

donde $\nabla_{\boldsymbol{\varphi}}$ representa el operador de gradiente con respecto a $\boldsymbol{\varphi}$. A partir de la FIM en la Ec. 7, el CRLB en la matriz de covarianza de cualquier estimador imparcial $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ de $\boldsymbol{\varphi}$ puede calcularse de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}\{(\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi})(\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi})^T\} \succeq J(\boldsymbol{\varphi})^{-1} \tag{8}$$

donde $\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$ significa que $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ es semidefinido positivo [122].

A continuación, se derivan los CRLB y los MLE para diferentes casos

2.6.1. Caso 1: Sistema Sincrónico. En primer lugar, se consideran las siguientes suposiciones: (i) el transmisor LED y el receptor VLC están sincronizados (es decir, $\Delta = 0$ en la Ec. (2)) y (ii) la relación entre el factor de atenuación del canal α y la distancia x es desconocida; es decir, una relación como de la Ec. (4) no está disponible.

Esta última es una suposición común en sistemas de estimación de distancia basados en RF [123] ya que el coeficiente del canal fluctúa significativamente debido a los efectos de multipath (fading). Sin embargo, en los sistemas de luz visible, el factor de atenuación del canal puede relacionarse con precisión con la distancia, especialmente en escenarios de línea de visión (LOS), y esta relación puede utilizarse para mejorar la precisión de la estimación de distancia, como se discutirá más adelante en esta sección. Los principales objetivos de estudiar la estimación de distancia en ausencia de la relación entre α y x son proporcionar una referencia para analizar los efectos de esta relación e investigar los resultados previos en la literatura [23].

En presencia de sincronización y ausencia de una relación entre el factor de atenuación del canal y la distancia, el estimador ML [122] se puede obtener a partir de la Ec. (6) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{ML,TOA} &= \arg\max_{\boldsymbol{\varphi}} \frac{-1}{2\sigma^2}\int_{T_1}^{T_2}\Big(r(t)-\alpha R_p s(t-\tau)\Big)^2\,dt \\ &= \arg\max_{x}\int_{T_1}^{T_2} r(t)s\left(t-\frac{x}{c}\right)dt\end{aligned} \tag{9}$$

donde la expresión final se obtiene debido al hecho de que $\alpha > 0$ y que el parámetro TOA en la Ec. (2) se convierte en $\tau = x/c$ para un sistema sincrónico.

Para la derivación de la CRLB en este escenario, primero se asume que el factor de atenuación del canal α es conocido por el receptor VLC. Luego, el vector de parámetros desconocidos en la Ec. (6) se convierte en $\boldsymbol{\varphi} = x$, y la información de Fisher en la Ec. (7) se puede obtener, a partir de la Ec. (6), como:

$$J(x) = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{d\Lambda(x)}{dx}\right)^2\right\} = \left(\frac{R_p\alpha}{\sigma c}\right)^2 E_1 \tag{10}$$

Donde

$$E_1 \triangleq \int_0^{T_s}\big(s'(t)\big)^2 dt \tag{11}$$

con $s'(t)$ denotando la derivada de $s(t)$ [122, 124]. Con base en la Ec. (8) y (10), la CRLB se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}\{(\hat{x}-x)^2\} \geq \frac{1}{E_1}\left(\frac{\sigma c}{R_p\alpha}\right)^2 \triangleq \mathrm{CRLB}_{\mathrm{TOA}} \tag{12}$$

Para proporcionar una expresión alternativa para la CRLB en la Ec. (12), E_1 en la Ec. (11) se expresa, mediante la relación de Parseval, de la siguiente manera [122]:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |j2\pi f S(f)|^2 df = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |S(f)|^2 df$$
$$= 4\pi^2 \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = 4\pi^2 E_2 \beta^2 \tag{13}$$

donde $S(f)$ denota la transformada de Fourier de $s(t)$.

$$E_2 \triangleq \frac{1}{E_2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_0^{T_s} \big(s(t)\big)^2 dt \tag{14}$$

y β es el ancho de banda efectivo de $s(t)$ definido como:

$$\beta^2 = \frac{1}{E_2} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |S(f)|^2 df \tag{15}$$

A partir de la Ec. (13), la Ec. (12) se puede expresar como:

$$\mathbb{E}\{(\hat{x} - x)^2\} \geq \frac{\sigma^2 c^2}{4\pi^2 R_p^2 \alpha^2 E_2 \beta^2} \triangleq \text{CRLB}_{\text{TOA}} \tag{16}$$

Se observa que el CRLB en la Ec. (16) es equivalente al presentado en [23] para $\sigma^2 = N_0/2$. Por lo tanto, la expresión del CRLB presentada en [23] corresponde a un sistema síncrono en el cual el factor de atenuación del canal α es conocido por el receptor VLC, pero la relación de α con la distancia x es desconocida. Dado que solo se utiliza la información del retardo temporal para estimar la distancia, este escenario se denomina estimación de distancia basada en TOA (Time of Arrival).

Cuando el factor de atenuación del canal, α, es desconocido, el Límite Cramér-Rao Inferior (CRLB) se puede expresar para este escenario como se muestra en el siguiente lema.

Lema 1 [117]. Cuando el factor de atenuación del canal α en la Ec. (1) es desconocido, el CRLB para la estimación de distancia basada en TOA se da por:

$$\mathbb{E}\{(\hat{x} - x)^2\} \geq \frac{E_2}{E_1 E_2 - E_3^2} \left(\frac{\sigma c}{R_p \alpha}\right)^2 \tag{17}$$

donde E_1 es como se muestra en la Ec. (11), E_2 se da por la Ec. (14), y

$$E_3 \triangleq \int_0^{T_s} s'(t) s(t) dt = 0.5\big(s^2(T_s) - s^2(0)\big) \tag{18}$$

Prueba: Aunque la prueba se puede obtener como un caso especial de la derivación en [117], se proporciona a continuación para completitud.

Cuando α es desconocido, el vector de parámetros desconocidos se convierte en $\boldsymbol{\varphi} = (x, \alpha)$ y la función de log-verosimilitud en la Ec. (6) puede expresarse como $\Lambda(x, \alpha)$. Luego, la matriz de información de Fisher (FIM) en la Ec. (7) está dada por:

$$J(x,\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \Lambda(x,\alpha)}{\partial x}\right)^2\right\} & \mathbb{E}\left\{\frac{\partial \Lambda(x,\alpha)}{\partial x}\frac{\partial \Lambda(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right\} \\ \mathbb{E}\left\{\frac{\partial \Lambda(x,\alpha)}{\partial \alpha}\frac{\partial \Lambda(x,\alpha)}{\partial x}\right\} & \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \Lambda(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right\} \end{bmatrix} \tag{19}$$

que puede calcularse, después de alguna manipulación, como:

$$J(x,\alpha) = \left(\frac{R_p}{\sigma}\right)^2 \begin{bmatrix} \alpha^2 E_1/c^2 & -\alpha E_3/c \\ -\alpha E_3/c & E_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

donde E_1, E_2 y E_3 están dados por Ec. (11), (14) y (18), respectivamente. Entonces, el CRLB sobre el MSE de cualquier estimador insesgado $\hat{x}$ de x viene dado por el primer elemento de la inversa de la FIM [122]; es decir:

$$\mathbb{E}\{(\hat{x} - x)^2\} \geq [\mathbf{J}(x,\alpha)^{-1}]_{1,1} \tag{21}$$

el cual se puede obtener como en la Ec. (17) basado en la Ec. (20).

Como era de esperar, la CRLB en la Ec. (17) es mayor o igual que la CRLB en la Ec. (12) debido a la presencia de un parámetro adicional desconocido. También se observa que las CRLBs son iguales cuando E_3 en la Ec. (18) es igual a cero. Por lo tanto, para $E_3 = 0$, la CRLB en [23] también corresponde a un sistema síncrono en el cual el factor de atenuación del canal α es desconocido y la relación entre α y la distancia x no está disponible.

En segundo lugar, se consideran las siguientes suposiciones: (i) el transmisor LED y el receptor VLC están sincronizados (es decir, $\Delta = 0$ en la Ec. (2)) y (ii) la relación entre el factor de atenuación del canal α y la distancia x es conocida, como se indica en la Ec. (4). La segunda suposición es práctica para sistemas VLP ya que el factor de atenuación del canal puede especificarse con precisión como una función de la distancia en los canales de luz visible LOS.

En este escenario, el estimador ML se puede obtener de la Ec. (2) con $\Delta = 0$, Ec. (4) y (6) de la siguiente manera:

$$\hat{x}_{ML,\text{hyb}} = \arg\max_x x^{-m-3} \int_{T_1}^{T_2} r(t) s\left(t - \frac{x}{c}\right) dt - 0.5\gamma R_p x^{-2m-6} E_2 \tag{22}$$

En comparación con el MLE en la Ec. (9), el MLE en la Ec. (22) también utiliza la relación del factor de atenuación del canal con la distancia, como se observa en los términos x^{-m-3} y x^{-2m-6}.

Basado en la Ec. (2) con $\Delta = 0$ y la relación en la Ec. (4), el vector de parámetros desconocidos en la Ec. (6) se convierte en $\boldsymbol{\varphi} = x$. Luego, a partir de la Ec. (4)-(7), se puede calcular la información de Fisher así:

$$\mathrm{J}(x) = \left(\frac{R_p \gamma}{\sigma x^{m+4}}\right)^2 h_1(x) \tag{23}$$

con

$$h_1(x) \triangleq (m+3)^2 E_2 + 2(m+3)\frac{x}{c}E_3 + \frac{x^2}{c^2}E_1 \tag{24}$$

Donde E_1, E_2 y E_3 son mencionadas en la Ec. (11), (14) y (18), respectivamente. A partir de la Ec. (8) y (23), la CRLB se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}\{(\hat{x} - x)^2\} \geq \frac{1}{h_1(x)}\left(\frac{\sigma x^{m+4}}{R_p \gamma}\right)^2 \triangleq \mathrm{CRLB}_{\mathrm{hyb}} \tag{25}$$

La comparación entre las CRLBs en la Ec. (12) y (25) se proporciona en la siguiente proposición:

Proposición 1. La CRLB en la Ec. (25) es menor que la de Ec. (12) si y solo si:

$$(m+3)E_2 + \frac{2x}{c}E_3 > 0 \tag{26}$$

Prueba: Primero, la CRLB en la Ec. (25) se expresa según la Ec. (4) como sigue:

$$\mathbb{E}\{(\hat{x} - x)^2\} \geq \frac{x^2}{c^2 h_1(x)}\left(\frac{\sigma c}{R_p \alpha}\right)^2 \tag{27}$$

Luego, la relación entre la CRLB en la Ec. (12) y la CRLB en la Ec. (27) está dada por:

$$\frac{c^2 h_1(x)}{E_1 x^2} = \frac{c^2(m+3)^2 E_2 + 2(m+3)xcE_3 + x^2 E_1}{E_1 x^2} \tag{28}$$

$$= 1 + \frac{c^2(m+3)^2 E_2 + 2(m+3)xcE_3}{E_1 x^2} \tag{29}$$

donde se emplea la relación en la Ec. (24). Dado que E_1, E_2, m, c y x son positivos por definición, el segundo término en la Ec. (29) es positivo si y solo si se cumple la condición en la Ec. (26).

La condición en la Proposición 1 comúnmente se cumple en la práctica, ya que x/c es muy pequeño (del orden de 10^{-8} para escenarios en interiores) y/o E_3 es igual a cero para muchos pulsos prácticos [23]. Por lo tanto, la utilización de la relación en la Ec. (4) es útil para mejorar la precisión de la estimación de la distancia. Desde un punto de vista práctico, esto implica que en lugar de estimar (aprender) el valor de α primero y luego utilizar esa estimación en la estimación de distancia basada en TOA, un enfoque más eficiente es estimar directamente la distancia basada en el modelo en la Ec. (1) y (4) ya que la información en α relacionada con la distancia x se utiliza efectivamente en ese escenario. En otras palabras, en presencia de la relación entre el factor de atenuación del canal y la distancia, se utiliza información tanto en el factor de atenuación del canal como en el parámetro de retardo de tiempo para la estimación de distancia. Por lo tanto, este escenario corresponde a la estimación de distancia basada en TOA/RSS híbrida, ya que el factor de atenuación del canal está relacionado con el RSS.

Observación 1. Para ilustrar las mejoras que se pueden lograr al utilizar la relación entre α y x, se puede considerar la expresión en la Ec. (29) para $E_3 = 0$, la cual se convierte en $1 + c^2(m+3)^2\, E_2/(E_1 x^2)$. A partir de la Ec. (13), esta expresión puede escribirse como $1 + c^2\,(m+3)^2/(4\pi^2\beta^2 x^2)$. Por lo tanto, para parámetros típicos del sistema, el CRLB para la estimación de distancia basada en TOA es significativamente mayor que el CRLB para la estimación de distancia basada en TOA/RSS híbrida para $\beta \ll c/x$, y se vuelven comparables para anchos de banda efectivos altos (del orden de 100 MHz o más). Como ejemplo, para $x = 10$ m., $m = 1\ y\ \beta = 1$ MHz, $1 + c^2\,(m+3)^2/(4\pi^2\beta^2 x^2) = 365.76$, lo que significa que el límite inferior de las desviaciones estándar medias cuadráticas (RMSE) de estimadores imparciales es 19.125 veces menor para la estimación de distancia basada en TOA/RSS híbrida que para la estimación de distancia basada en TOA. Por otro lado, cuando $\beta = 100$ MHz, se obtiene $1 + c^2\,(m+3)^2/(4\pi^2\beta^2 x^2) = 1.0365$, lo que lleva a CRLBs comparables.

2.6.2. Caso 2: Sistema Asincrónico. En este caso, se asume que el factor de atenuación del canal α y la distancia x están relacionados como en la Ec. (4). Sin embargo, el transmisor LED y el receptor VLC no están sincronizados, es decir, Δ en la Ec. (2) es desconocido. Por lo tanto, el parámetro de retardo τ en la Ec. (1) y (2) se modela como un parámetro desconocido, y el vector de parámetros desconocidos en la Ec. (6) se

especifica como $\boldsymbol{\varphi} = (x, \tau)$. Luego, el estimador de máxima verosimilitud puede expresarse en función de la Ec. (6) de la siguiente manera:

$$\hat{x}_{\mathrm{ML,RSS}} = \arg\max_{(x,\tau)} x^{-m-3} \int_{T_1}^{T_2} r(t)\, s(t-\tau) dt - 0.5\gamma R_p x^{-2m-6} E_6 \tag{30}$$

Que puede reformularse como:

$$\hat{x}_{\mathrm{ML,RSS}} = \arg\max_{x} x^{-m-3} \tilde{C}_{rs} - 0.5\gamma R_p x^{-2m-6} E_2 \tag{31}$$

Donde:

$$\tilde{C}_{rs} \triangleq \max_{\tau} \int_{T_1}^{T_2} r(t) s(t-\tau) dt \tag{32}$$

La solución de la Ec. (31) se puede obtener como sigue:

$$\hat{x}_{\mathrm{ML,RSS}} = \left(\frac{\gamma R_p E_2}{\tilde{C}_{rs}} \right)^{\frac{1}{m+3}} \tag{33}$$

Bajo la suposición de que $\tilde{C}_{rs}$ es positiva, se observa que en el estimador de máxima verosimilitud (ML) en la Ec. (30), el valor de τ se estima como aquel que maximiza la correlación entre las señales transmitidas y recibidas, como se muestra en la Ec. (32). Luego, esa estimación se utiliza en el estimador de máxima verosimilitud, lo que conduce a la expresión en la Ec. (31).

Dado que el parámetro TOA τ no puede relacionarse con la distancia en este caso debido a la asincronía (ver Ec. (2)), la estimación de la distancia se basa en la información RSS a través de la Ec. (4) en este caso, por lo que se denomina estimación de distancia basada en RSS.

El límite de Cramér-Rao (CRLB) para la estimación de distancia basada en RSS se presenta en el siguiente lema.

Lema 2. Para el modelo de señal en la Ec. (1), donde el parámetro de retardo es desconocido y el factor de atenuación del canal está dado por la Ec. (4), el límite de Cramér-Rao (CRLB) para la estimación de distancia se expresa como:

$$\mathbb{E}\{(\hat{x} - x)^2\} \geq \frac{E_1}{E_1 E_2 - E_3^2} \left(\frac{\sigma x}{\alpha R_p (m+3)} \right)^2 \triangleq \mathrm{CRLB}_{\mathrm{RSS}} \tag{34}$$

donde E_1, E_2 y E_3 son dados por la Ec. (11), (14) y (18), respectivamente.

Demostración: Para el modelo en la Ec. 1, cuando el parámetro TOA τ se modela como desconocido y el factor de atenuación del canal α está dado por la Ec. (4), el vector de

parámetros desconocidos se convierte en $\boldsymbol{\varphi} = (x, \tau)$ y la función de verosimilitud en la Ec. (6) puede denotarse como $\Lambda(x, \tau)$. Entonces, la matriz de información de Fisher (FIM) en la Ec. (7) se expresa como:

$$\mathbf{J}(x,\tau) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \Lambda(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\right\} & \mathbb{E}\left\{\frac{\partial \Lambda(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial \Lambda(x,\tau)}{\partial \tau}\right\} \\ \mathbb{E}\left\{\frac{\partial \Lambda(x,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \Lambda(x,\tau)}{\partial x}\right\} & \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \Lambda(x,\tau)}{\partial \tau}\right)^2\right\} \end{bmatrix} \tag{35}$$

Los elementos de $\mathbf{J}(x, \tau)$ en la Ec. (35) son obtenidos, después de alguna manipulación, como:

$$J(x,\tau) = \left(\frac{\gamma R_p}{\sigma}\right)^2 x^{-2m-7} \begin{bmatrix} (m+3)^2 E_2/x & (m+3)E_3 \\ (m+3)E_3 & xE_1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

donde E_1, E_2 y E_3 están dados por la Ec. (11), (14) y (18), respectivamente. Luego, el límite de Cramer-Rao (CRLB) sobre el error cuadrático medio (MSE) de cualquier estimador imparcial $\hat{x}$ de x se obtiene como el primer elemento del inverso de la FIM, como se indica en la Ec. (21). Esto se puede calcular como en la Ec. (34) basándose en la Ec. (4) y (36).

Se observa que la expresión del CRLB en el Lema 2 incluye como caso especial para $E_3 = 0$ [28].

En la siguiente proposición, se comparan los CRLB en el Lema 2 con los correspondientes a la estimación de distancia basada en TOA y la estimación de distancia híbrida TOA/RSS.

Proposición 2. Para $E_3 = 0$, las relaciones entre el CRLB en la Ec. (34), al de la Ec. (25), y al de la Ec. (12) se expresan como:

$$\frac{\mathrm{CRLB}_{\mathrm{RSS}}}{\mathrm{CRLB}_{\mathrm{hyb}}} = 1 + \frac{4\pi^2\beta^2 x^2}{c^2(m+3)^2} = 1 + \frac{\mathrm{CRLB}_{\mathrm{RSS}}}{\mathrm{CRLB}_{\mathrm{TOA}}} \tag{37}$$

Prueba: Para $E_3 = 0$, el CRLB en la Ec. (25) (equivalentemente, la Ec. (27)) se convierte en:

$$\mathbb{E}\{(\hat{x} - x)^2\} \geq \frac{1}{(m+3)^2 E_2 + E_1 (x/c)^2} \left(\frac{\sigma x}{R_p \alpha}\right)^2 \tag{38}$$

Luego, el cociente del CRLB en la Ec. (34) para $E_3 = 0$ al CRLB en la Ec. (38) se obtiene como $1 + E_1 x^2/(E_2 c^2 (m+3)^2)$, que se vuelve igual a la expresión central en la Ec. (37) basándose en la Ec. (13). Además, el cociente del CRLB en la Ec. (34) para $E_3 = 0$ al CRLB en la Ec. (12) se expresa como $E_1 x^2/(E_2 c^2 (m+3)^2)$, que es

igual a $4\pi^2\beta^2x^2/(c^2(m+3)^2)$ debido a la Ec. (13), lo que conduce a la segunda igualdad en la Ec. (37).

Basado en la Proposición 2, se llegan a las siguientes conclusiones:

- El CRLB para la estimación de distancia basado en RSS es muy cercano al CRLB para la estimación de distancia basado en híbrido TOA/RSS para sistemas prácticos de posicionamiento en interiores cuando $\beta \ll c/x$. Dado que x es menor de 10 metros en escenarios típicos en interiores, un ancho de banda efectivo inferior a aproximadamente 1 MHz resulta en CRLBs aproximadamente iguales (cf. Observación 1). En tal caso, la información relacionada con la distancia recopilada a partir del parámetro de retardo de tiempo se vuelve despreciable en comparación con la información recopilada del factor de atenuación del canal (equivalentemente, RSS).
- Para $\beta \ll c/x$, el CRLB para la estimación de distancia basado en RSS es significativamente menor que el CRLB para la estimación de distancia basado en TOA; es decir, la estimación de distancia basada en RSS es mucho más precisa que la estimación de distancia basada en TOA.
- La estimación de distancia basada en TOA es más precisa que la estimación de distancia basada en RSS cuando $\beta > (m+3)c/(2\pi x)$. Como ejemplo, para $m = 1$ y $x = 5$ m, el ancho de banda efectivo debe satisfacer $\beta > 38.2$ MHz para que la estimación de distancia basada en TOA sea más precisa.
- Cuando β está en el orden de $(m+3)c/(2\pi x)$, la estimación de distancia basada en la combinación de TOA/RSS puede proporcionar mejoras significativas tanto sobre la estimación de distancia basada en TOA como sobre la estimación de distancia basada en RSS. Cuando $\beta \gg c/x$, las CRLBs para la estimación de distancia basada en TOA y la estimación de distancia basada en la combinación de TOA/RSS son muy similares y cercanas.

Observación 2. La Proposición 2 proporciona comparaciones entre diferentes enfoques basados en las CRLBs (es decir, la precisión de la estimación de distancia). Por otro lado, en cuanto a la complejidad de implementación, la estimación de distancia basada en RSS tiene una ventaja práctica importante sobre los otros enfoques, ya que no requiere sincronización entre los relojes del transmisor LED y el receptor VLC. Por lo tanto, si la estimación de distancia basada en RSS puede proporcionar el nivel de precisión requerido para una aplicación, puede ser el enfoque preferido. Sin embargo, en algunos escenarios (por ejemplo, para $\beta \gg c/x$), puede ser necesario un diseño de sistema sincronizado para lograr el nivel de precisión deseado en la estimación de distancia.

Observación 3. Basándonos en las expresiones de CRLB obtenidas en esta sección, se pueden analizar los efectos de varios parámetros en la precisión del rango. Por ejemplo, la forma de la señal transmitida $s(t)$ puede tener diferentes efectos en los casos sincrónicos y asincrónicos. Para sistemas sincrónicos, el CRLB depende de la forma del pulso a través del parámetro E_1 (equivalentemente, el parámetro de ancho de banda efectivo β en la Ec. (13)). En particular, para señales con un E_1 más grande (equivalentemente, un β más grande), el CRLB basado en TOA en la Ec. (16) y el CRLB basado en TOA/RSS en Ec. (24) y (25) se vuelven más pequeños; es decir, la precisión mejora. Por otro lado, para sistemas asíncronos, el CRLB basado en RSS en la Ec. (34) no depende del parámetro de forma de pulso, E_1, cuando $E_3 = 0$, que es comúnmente el caso. Como otro parámetro importante, la altura, h, puede afectar la precisión de los sistemas de medición de distancia. Por ejemplo, si el parámetro de altura se incrementa mientras que el ángulo de irradiación ϕ y el ángulo de incidencia θ se mantienen sin cambios, la distancia entre el transmisor LED y el receptor VLC aumenta. Luego, se puede observar a partir de la Ec. (3) que el factor de atenuación del canal α se reduce (es decir, la potencia recibida disminuye) ya que la distancia se hace más grande y los otros parámetros se mantienen fijos. Por lo tanto, basándonos en la Ec. (16), (25) y (34), todos los CRLBs aumentan; es decir, la precisión disminuye. Por otro lado, si el parámetro de altura se incrementa de h a $\tilde{h}$, mientras que la distancia horizontal *D* entre el transmisor LED y el receptor VLC se mantiene igual, la precisión puede aumentar, disminuir o permanecer igual, dependiendo de los parámetros $h, \tilde{h}, D$ y m, lo cual puede ser analizado basándonos en la Ec. (4), (16), (25) y (34).

2.7. Efectos del muestreo y estimador híbrido modificado.

Se observa que a partir de los MLE en la Ec. (9), (22) y (30), las salidas del correlador (es decir, los términos $\int_{T_1}^{T_2} r(t)s(t - x/c)$ y $\int_{T_1}^{T_2} r(t)s(t-\tau)dt$) deben ser evaluadas para todos los posibles valores de distancia (retardo) para obtener las estimaciones de distancia por máxima verosimilitud. Sin embargo, en sistemas prácticos, resulta costoso y consume mucha energía obtener muestras de las salidas del correlador a tasas muy altas [33]. Por lo tanto, es importante investigar los efectos de las limitaciones de la tasa de muestreo en el rendimiento del MSE de los MLE. En esta sección, se realizarán análisis asintóticos (a medida que la varianza del ruido tiende a cero) para cuantificar los efectos del muestreo.

Supongamos que las salidas del correlador se muestrean a múltiplos enteros de T_{smp} segundos, donde T_{smp} representa el período de muestreo. Además, la función de autocorrelación normalizada de la señal $s(t)$ se define de la siguiente manera:

$$p(v) \triangleq \frac{1}{E_2}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-v)dt \tag{39}$$

En el siguiente lema, se especifica el rendimiento asintótico de la estimación de distancia basada en TOA y en RSS mediante máxima verosimilitud en presencia de limitaciones de velocidad de muestreo.

Lema 3. Supongamos que $p(v) > p(\varsigma), \forall v \in \left[-0.5T_{\text{smp}}, 0.5T_{\text{smp}}\right]$ y $\forall \varsigma \notin \left[-0.5T_{\text{smp}}, 0.5T_{\text{smp}}\right]$. Entonces, en ausencia de ruido (es decir, para $\sigma = 0$) y con un período de muestreo de T_{smp}, el MSE de la estimación basada en TOA mediante máxima verosimilitud en la Ec. (9) está dado por:

$$\text{MSE}_{\text{TOA}} = \left(x - cT_{\text{smp}}\text{round}\left(\frac{x}{cT_{\text{smp}}}\right)\right)^2 \tag{40}$$

y el MSE de la estimación basada en RSS mediante máxima verosimilitud en la Ec. (33) se expresa como:

$$MSE_{RSS} = x^2\left(1 - \left(\rho\left(\tau - T_{\text{smp}}\text{round}\left(\frac{\tau}{T_{\text{smp}}}\right)\right)\right)^{\frac{-1}{m+3}}\right)^2 \tag{41}$$

donde x es la distancia entre el transmisor LED y el receptor VLC, $\tau = x/c + \Delta$ como se indica en la Ec. (2), $\rho(\cdot)$ es como se define en la Ec. (39), y $\text{round}(y)$ representa el entero más cercano a y.

Prueba: La expresión en la Ec. (40) simplemente sigue de la Ec. (9) basado en la Ec. (1) sin ruido. En particular, para un período de muestreo de T_{smp} y para $\sigma = 0$, la Ec. (9) se convierte en:

$$\hat{x}_{\text{ML,TOA}} = \underset{icT_{\text{smp}}}{\arg\max}\, \alpha R_p E_2 \rho\left(\frac{x - icT_{\text{smp}}}{c}\right) \tag{42}$$

donde i es un número entero, x denota la distancia verdadera y $\rho(\cdot)$ es como en la Ec. (39). Bajo la suposición en el lema, el término de autocorrelación en la Ec. (42) se maximiza para $i = \text{round}\left(x/\left(cT_{\text{smp}}\right)\right)$. Por lo tanto, el estimador ML se convierte en $\hat{x}_{\text{ML,TOA}} = cT_{\text{smp}}\text{round}\left(x/\left(cT_{\text{smp}}\right)\right)$ y el error cuadrático (medio) se obtiene como en la Ec. (40).

Para el estimador ML basado en RSS en la Ec. (33), $\tilde{C}_{rs}$ en la Ec. (32) se puede calcular, para un período de muestreo de T_{smp} y para $\sigma = 0$, como

$$\tilde{C}_{rs} \max_{iT_{\text{smp}}} \alpha R_p E_2 \rho(\tau - iT_{\text{smp}}) = \alpha R_p E_2 \rho\left(\tau - T_{\text{smp}} \text{round}(\tau / T_{\text{smp}})\right) \tag{43}$$

donde $\tau = x/c + \Delta$ denota el retardo de tiempo según se indica en la Ec. (2), y se emplea la suposición del lema para obtener la expresión final. Entonces, el estimador ML basado en RSS en la Ec. (33) se convierte en:

$$\hat{x}_{\text{ML,RSS}} = \left(\frac{\gamma R_p E_2}{\alpha R_p E_2 \rho\left(\tau - T_{\text{smp}} \text{round}(\tau / T_{\text{smp}})\right)} \right)^{\frac{1}{m+3}} \tag{44}$$

que se puede expresar mediante la Ec. (4) como:

$$\hat{x}_{\text{ML,RSS}} = \frac{x}{\left(\rho\left(\tau - T_{\text{smp}} \text{round}(\tau / T_{\text{smp}})\right)\right)^{\frac{1}{m+3}}} \tag{45}$$

A partir de la Ec. (45), el error cuadrático (medio) se puede obtener como en la Ec. (41).

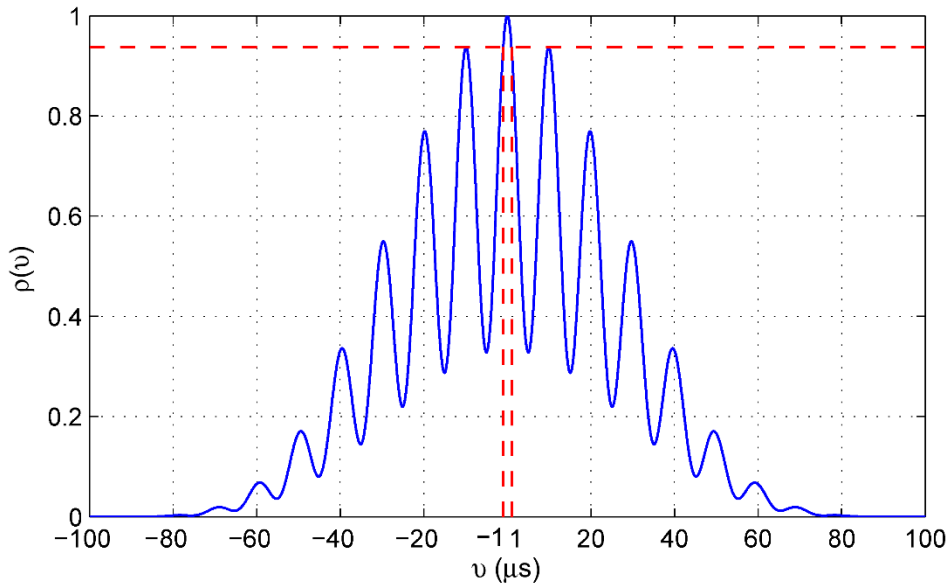


Figura N°3: La función de autocorrelación normalizada en la Ec. (39) para s(t) en la Ec. (86) con $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 100$ kHz y $A = 0.1$.
Fuente: Elaboración propia.

La suposición en el Lema 3 generalmente se cumple en la práctica para un T_{smp} suficientemente pequeño. Por ejemplo, $\rho(v)$ en la Ec. (39) correspondiente a $s(t)$ en la Ec. (86) se presenta en la figura N°3 para $T_s = 0.1\ ms$, $f_c = 100$ kHz y $A = 0.1$. Se observa que la suposición en el Lema 3 se cumple para $T_{\text{smp}} < 1\ \mu s$; es decir, cuando la tasa de muestreo es mayor a 1 MHz. Cabe señalar que se requieren altas tasas de muestreo para una estimación precisa de la distancia; por lo tanto, la suposición en el Lema 3 es realista para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

De acuerdo con el Lema 3, se deduce que el MLE basado en TOA es directamente afectado por las discrepancias entre el instante de muestreo y el retraso real de la señal entrante, mientras que los efectos en el MLE basado en RSS ocurren a través de la sensibilidad de la función de autocorrelación normalizada, $\rho(v)$, a las discrepancias de tiempo. Por ejemplo, si $\rho(v)$ no cambia significativamente para $v \in \left[-0.5T_{\text{smp}}, 0.5T_{\text{smp}}\right]$, entonces los efectos de la tasa de muestreo pueden volverse despreciables para el MLE basado en RSS. Además, se observa a partir de la Ec. (40) y (41) que, dependiendo del valor de la distancia x y el retraso temporal, el error cuadrático máximo debido al muestreo es igual a $\left(0.5T_{\text{smp}}\right)^2$ para el MLE basado en TOA y se expresa como $x^2\left(1-\left(\rho\left(0.5T_{\text{smp}}\right)\right)^{-1/(m+3)}\right)^2$ para el MLE basado en RSS.

Para el rendimiento asintótico del estimador MLE basado en TOA/RSS, se presenta el siguiente lema.

Lema 4. Definir la siguiente función:

$$g_x(u) \triangleq (ux)^{-m-3}\rho\left(\frac{x-u}{c}\right) - 0.5u^{-2m-6} \tag{46}$$

Donde x representa la distancia entre el transmisor LED y el receptor VLC, y ρ es como se define en la Ec. (39). Supongamos que $g_x(u) > g_x(u), \forall u \in \left[x, x+cT_{\text{smp}}\right]$ y $\forall v > x + cT_{\text{smp}}$ y que $g_x(u) > g_x(v), \forall u \in \left[x-cT_{\text{smp}}, x\right]$ y $\forall v < x - cT_{\text{smp}}$.

Además, defina i_1 y i_2 como:

$$i_1 \triangleq \left\lfloor \frac{x}{cT_{\text{smp}}} \right\rfloor, i_2 \triangleq \left\lceil \frac{x}{cT_{\text{smp}}} \right\rceil \tag{47}$$

Donde $\lfloor y \rfloor$ denota el entero más grande menor o igual a y y $\lceil y \rceil$ representa el entero más pequeño mayor o igual a y. Luego, el Error Cuadrático Medio (MSE) del MLE basado en TOA/RSS en híbrido, como se muestra en la Ec. (22), se expresa de la siguiente manera:

$$\text{MSE}_{\text{hyb}} = \left(x - \hat{\imath}cT_{\text{smp}}\right)^2 \tag{48}$$

Donde

$$i = \underset{i\in\{i_1,i_2\}}{\arg\max}\, g_x\left(icT_{\text{smp}}\right) \tag{49}$$

Demostración: En ausencia de ruido, $r(t)$ en la Ec. (1) se convierte en $r(t) = \alpha R_p s(t - x/c)$ para un sistema sincronizado, donde x es la distancia entre el transmisor LED y el receptor VLC. Reemplazando la variable ficticia x en la Ec. (22) por u, e insertando

$r(t) = \alpha R_p s(t - x/c)$, la función objetivo para el MLE basado en TOA/RSS en híbrido en la Ec. (22) se puede expresar como:

$$u^{-m-3}\alpha R_p E_2 \rho\left(\frac{x-u}{c}\right) - 0.5\gamma R_p u^{-2m-6} E_2 \tag{50}$$

Donde ρ es dado por la Ec. (39). Basado en la Ec. (4), y la Ec. (50) se puede expresar como:

$$\gamma R_p E_2 \left(u^{-m-3} x^{-m-3} \rho\left(\frac{x-u}{c}\right) - 0.5u^{-2m-6}\right) \triangleq \gamma R_p E_2 g_x(u) \tag{51}$$

donde la igualdad se deduce de la Ec. (46). Para un período de muestreo de T_{smp}, el estimador ML basado en TOA/RSS en híbrido en la Ec. (22) se puede expresar según la Ec. (51) como:

$$\hat{x}_{\text{ML,hyb}} = \underset{icT_{\text{smp}}}{\arg\max}\, \gamma R_p E_2 g_x\left(icT_{\text{smp}}\right) \tag{52}$$

Bajo las suposiciones en el lema sobre $g_x(\cdot)$, el estimador ML en la Ec. (52) se vuelve igual a $i_1 cT_{\text{smp}}$ o $i_2 cT_{\text{smp}}$, donde i_1 y i_2 son como en la Ec. (47). Si $g_x\left(i_1 cT_{\text{smp}}\right) > g_x\left(i_2 cT_{\text{smp}}\right)$, entonces $\hat{x}_{\text{ML,hyb}} = i_1 cT_{\text{smp}}$; de lo contrario, $\hat{x}_{\text{ML,hyb}} = i_2 cT_{\text{smp}}$. Por lo tanto, el error cuadrático medio se puede expresar como en la Ec. (48) y (49).

Se puede demostrar que $g_x(u)$ en la Ec. (46) alcanza su valor máximo en $u = x$. Por lo tanto, la suposición en el Lema 4 es válida para escenarios prácticos con un T_{smp} suficientemente pequeño y siempre que la función de autocorrelación normalizada, $\rho((x-u)/c)$, no cambie rápidamente en comparación con u^{-m-3}. En la figura N°4, se presenta $g_x(u)$ para $s(t)$ en la Ec. (86), donde $x = 5$ m, $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 100$ kHz y $A = 0.1$. Se observa que la suposición en el Lema 4 se cumple para todos los valores de T_{smp} en este caso.

El Lema 4 indica que, al igual que el MLE basado en TOA, el MLE basado en TOA/RSS también se ve directamente afectado por las discrepancias entre el instante de muestreo y el verdadero retardo de la señal entrante, y está sujeto a un error cuadrático máximo de $\left(0.5cT_{\text{smp}}\right)^2$ debido al muestreo. Para una alta precisión en la estimación de distancia, el error absoluto máximo de $0.5cT_{\text{smp}}$ puede ser bastante indeseable. Por ejemplo, para un período de muestreo de $T_{\text{smp}} = 1$ ns, el error absoluto inducido por el muestreo puede ser tan alto como 15 cm. Por lo tanto, los límites de precisión prometidos por los CRLBs pueden no ser alcanzables. Para mitigar este problema, se propone una versión modificada del estimador ML basado en TOA/RSS en esta sección. El estimador modificado basado en TOA/RSS se implementa en dos pasos:

1. Obtener la estimación ML basada en TOA/RSS $\hat{x}_{\text{ML,hyb}}$ a partir de la Ec. (22).
2. Calcular la estimación final de la distancia como:

$$\hat{x}_{\text{modi-hyb}} = \left(\frac{\gamma R_p E_2}{\int_{T_1}^{T_2} r(t) s\left(t - \hat{x}_{\text{ML,hyb}}/c\right) dt} \right)^{\frac{1}{m+3}} \tag{53}$$

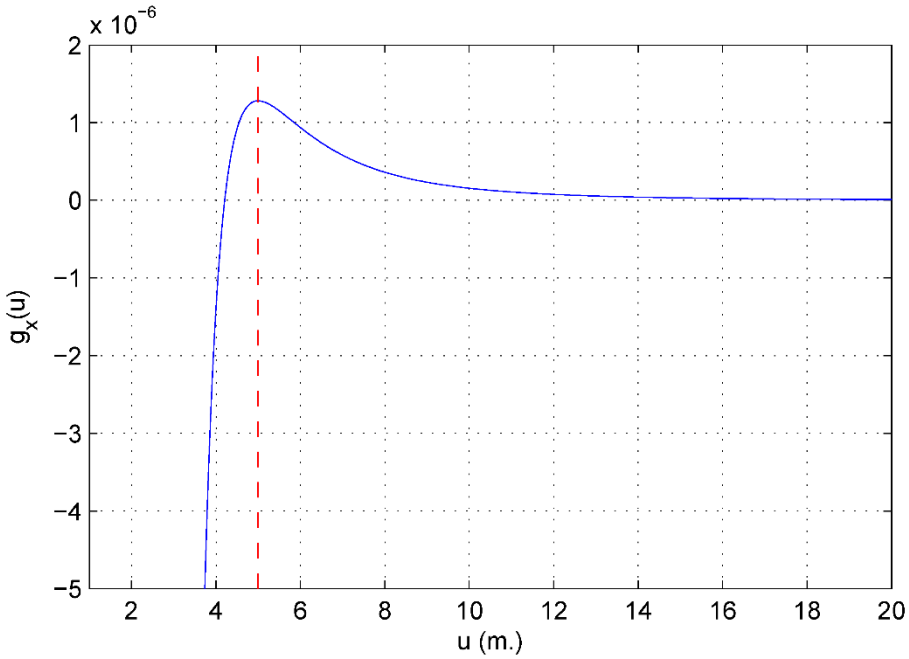


Figura N°4: Función $g_x(u)$ en la Ec. (46) para $s(t)$ en la Ec. (86), donde $x = 5$ m, $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 100$ kHz y $A = 0.1$.
Fuente: Elaboración propia.

La principal intuición detrás del estimador híbrido modificado basado en TOA/RSS es la siguiente: cuando la estimación $\hat{x}_{\text{ML,hyb}}$ en la Ec. (22) se obtiene en presencia de errores de muestreo, el término del correlador $\int_{T_1}^{T_2} r(t) s(t - x/c) dt$ en la Ec. (22) se puede evaluar para $x = \hat{x}_{\text{ML,hyb}}$ y luego la estimación de distancia se puede obtener con mayor resolución al calcular el maximizador de de $x^{-m-3} \int_{T_1}^{T_2} r(t)\, s\left(t - \hat{x}_{\text{ML,hyb}}/c\right) dt - 0.5\gamma R_p x^{-2m-6} E_2$ como en la Ec. (53) (similar a la Ec. (33)).

Bajo las condiciones en el Lema 4, el MSE del estimador híbrido modificado basado en TOA/RSS en la Ec. (53) se puede expresar en ausencia de ruido y para un período de muestreo T_{smp} como:

$$\text{MSE}_{\text{mod}} = x^2 \left(1 - \left(\rho\left(\tau - \hat{\imath} T_{\text{smp}}\right) \right)^{\frac{-1}{m+3}} \right)^2 \tag{54}$$

donde $\hat{\imath}$ es como en la Ec. (49). Se observa en la Ec. (54) que, de manera similar al MLE basado en RSS, el estimador híbrido modificado basado en TOA/RSS se ve afectado por los errores inducidos por el muestreo a través de la función de autocorrelación normalizada, y está sujeto a un error máximo cuadrático de $x^2 \left(1 - \left(\rho\left(0.5 T_{\text{smp}}\right) \right)^{-1/(m+3)} \right)^2$ debido al

muestreo. Por lo tanto, cuando la función de autocorrelación normalizada no es muy sensible a los desajustes de tiempo, el estimador híbrido modificado basado en TOA/RSS puede tener robustez contra los efectos del muestreo.

2.8. Límite de Ziv-Zakai (ZZB).

a Límite de Ziv-Zakai (ZZB) proporciona un límite inferior en los MSE de estimadores basados en una relación en términos de la probabilidad de error en un problema de prueba de hipótesis binaria. Se expresa como [31]:

$$\xi \geq \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big(w(\vartheta)+w(\vartheta+\delta)\big)\,P_{\min}(\vartheta,\vartheta+\delta)d\vartheta\delta d\delta \tag{55}$$

donde $\xi = \mathbb{E}\{|\hat{x}-x|^2\}$ es el MSE de un estimador $\hat{x}, w(\cdot)$ representa la función de densidad de probabilidad (PDF) a priori del parámetro x y $P_{\min}(\vartheta,\vartheta+\delta)$ denota la probabilidad de error correspondiente a la regla de decisión óptima para el siguiente problema de prueba de hipótesis:

$$\mathcal{H}_0: p(r(t)|x=\vartheta) \tag{56}$$

$$\mathcal{H}_1: p(r(t)|x=\vartheta+\delta)$$

En escenarios prácticos en interiores, existen límites inferiores y superiores en el parámetro de alcance x, basados en las dimensiones físicas del entorno y el campo de visión del fotodetector. Por lo tanto, es razonable asumir que la PDF a priori de x es cero fuera del intervalo $[D_1, D_2]$, donde D_1 y D_2 denotan las distancias mínima y máxima posibles, respectivamente. (Para el modelo de señal en la Ec. (1), el intervalo de observación $[T_1, T_2]$ puede relacionarse con D_1 y D_2 como $T_1 = D_1/c$ y $T_2 = D_2/c + T_s$). En este caso, el ZZB en la Ec. (55) se expresa como:

$$\xi \geq \frac{1}{2}\int_0^{D_2-D_1}\int_{D_1}^{D_2-\delta}\big(w(\vartheta)+w(\vartheta+\delta)\big)\,P_{\min}(\vartheta,\vartheta+\delta)d\vartheta\delta d\delta \tag{57}$$

Por ejemplo, si la PDF a priori de x corresponde a una distribución uniforme en el intervalo $[D_1, D_2]$ (es decir, $w(x) = 1/(D_2 - D_1)$ si $x \in [D_1, D_2]$ y $w(x) = 0$ en otro caso), el ZZB en la Ec. (57) se reduce a:

$$\xi \geq \frac{1}{D_2-D_1}\int_0^{D_2-D_1}\int_{D_1}^{D_2-\delta}P_{\min}(\vartheta,\vartheta+\delta)d\vartheta\delta d\delta \tag{58}$$

Para obtener una expresión explícita para el ZZB, se debe especificar $P_{\min}(\vartheta,\vartheta+\delta)$ en la Ec. (57). Basándonos en la PDF $w(x)$ de x, las probabilidades a priori de las hipótesis $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_1$ en la Ec. (56) son iguales a $w(\vartheta)/\big(w(\vartheta)+w(\vartheta+\delta)\big)$

y $w(\vartheta+\delta)/w(\vartheta)+w(\vartheta+\delta)$, respectivamente. Luego, la regla de decisión óptima para el problema en la Ec. (56) es la regla MAP (Maximum A Posteriori) [122], que se expresa como:

$$\frac{w(\vartheta+\delta)}{w(\vartheta)+w(\vartheta+\delta)}p(r(t)|x=\vartheta+\delta)\underset{\mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_0}{\lessgtr}}\frac{w(\vartheta)}{w(\vartheta)+w(\vartheta+\delta)}p(r(t)|x=\vartheta) \tag{59}$$

Después de tomar el logaritmo natural de ambos lados, la Ec. (59) se convierte en:

$$-\log p(r(t)|x=\vartheta)+\log p(r(t)|x=\vartheta+\delta)\underset{\mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_0}{\lessgtr}}\log\left(\frac{w(\vartheta)}{w(\vartheta+\delta)}\right) \tag{60}$$

A partir de la Ec (1), (2) y (4), la función de verosimilitud se expresa como [120]:

$$\log p(r(t)|x)=k-\frac{1}{2\sigma^2}\int_{T_1}^{T_2}\left(r(t)-\frac{R_p\gamma}{x^{m+3}}s\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)^2dt \tag{61}$$

donde k es una constante que no depende de x. A partir de la Ec. (61), la regla de decisión en la Ec. (60) puede expresarse como:

$$\int_{T_1}^{T_2}\left(r(t)-\gamma\vartheta^{-m-3}R_p s\left(t-\frac{\vartheta}{c}\right)\right)^2dt$$
$$-\int_{T_1}^{T_2}\left(r(t)-\gamma(\vartheta+\delta)^{-m-3}R_p s\left(t-\frac{\vartheta+\delta}{c}\right)\right)^2dt\underset{\mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_0}{\lessgtr}}2\sigma^2\log\left(\frac{w(\vartheta)}{w(\vartheta+\delta)}\right)$$

que se reduce, a través de algún reordenamiento, a:

$$\frac{C_{rs}(\vartheta+\delta)}{(\vartheta+\delta)^{m+3}}-\frac{C_{rs}(\vartheta)}{\vartheta^{m+3}}\underset{\mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_0}{\lessgtr}}\frac{R_p\gamma E_2}{2}\left(\frac{1}{(\vartheta+\delta)^{2m+6}}-\frac{1}{\vartheta^{2m+6}}\right)+\frac{\sigma^2}{R_p\gamma}\log\left(\frac{w(\vartheta)}{w(\vartheta+\delta)}\right) \tag{62}$$

Donde:

$$C_{rs}(x)\triangleq\int_{T_1}^{T_2}r(t)s\left(t-\frac{x}{c}\right)dt \tag{63}$$

Y E_2 es dada por la Ec. (14).

La probabilidad de error para la regla de decisión en la Ec. (62) se calcula como:

$$P_{\min}(\vartheta,\vartheta+\delta)=\frac{w(\vartheta)}{w(\vartheta)+w(\vartheta+\delta)}P\left(\widehat{\mathcal{H}}_1|\mathcal{H}_0\right)+\frac{w(\vartheta+\delta)}{w(\vartheta)+w(\vartheta+\delta)}P\left(\widehat{\mathcal{H}}_0|\mathcal{H}_1\right) \tag{64}$$

donde $P\left(\widehat{\mathcal{H}}_i \middle| \mathcal{H}_j\right)$ denota la probabilidad de decidir por la hipótesis $\mathcal{H}_i$ cuando $\mathcal{H}_j$ es verdadera. Bajo $\mathcal{H}_0$, se puede demostrar a partir de las Ec. (1), (4), (56) y (63) que $C_{rs}(\vartheta)$ y $C_{rs}(\vartheta+\delta)$ están distribuidas conjuntamente como Gaussianas:

$$\begin{bmatrix} C_{rs}(\vartheta) \\ C_{rs}(\vartheta+\delta) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \frac{\gamma R_p E_2}{\vartheta^{m+3}} \\ \frac{\gamma R_p E_2 \rho\left(\frac{\delta}{c}\right)}{\vartheta^{m+3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 E_2 & \sigma^2 E_2 \rho\left(\frac{\delta}{c}\right) \\ \sigma^2 E_2 \rho\left(\frac{\delta}{c}\right) & \sigma^2 E_2 \end{bmatrix} \right) \tag{65}$$

donde $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ representa la distribución Gaussiana con media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$, y $\rho(\cdot)$ está dada por la Ec. (39).

A partir de las Ec. (62) y (65), $\mathrm{P}\left(\widehat{\mathcal{H}}_1 \middle| \mathcal{H}_0\right)$ se puede calcular como:

$$\mathrm{P}\left(\widehat{\mathcal{H}}_1 \middle| \mathcal{H}_0\right) = Q\left(\frac{0.5 R_p \gamma E_2 g(\vartheta, \vartheta+\delta) + \frac{\sigma^2}{\gamma R_p} \log(w(\vartheta)/w(\vartheta+\delta))}{\sqrt{\sigma^2 E_2 g(\vartheta, \vartheta+\delta)}} \right) \tag{66}$$

donde $Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^\infty e^{-t^2} dt$ denota la función-Q y:

$$g(\vartheta, \vartheta+\delta) \triangleq \frac{1}{(\vartheta+\delta)^{2m+6}} + \frac{1}{\vartheta^{2m+6}} - \frac{2\rho(\delta/c)}{\left(\vartheta(\vartheta+\delta)\right)^{m+3}} \tag{67}$$

Además, a través de derivaciones similares, $\mathrm{P}\left(\widehat{\mathcal{H}}_0 \middle| \mathcal{H}_1\right)$ se puede obtener de la siguiente manera:

$$\mathrm{P}\left(\widehat{\mathcal{H}}_0 \middle| \mathcal{H}_1\right) = Q\left(\frac{0.5 R_p \gamma E_p g(\vartheta, \vartheta+\delta) - \frac{\sigma^2}{\gamma R_p} \log(w(\vartheta)/w(\vartheta+\delta))}{\sqrt{\sigma^2 E_2 g(\vartheta, \vartheta+\delta)}} \right) \tag{68}$$

Luego, la probabilidad de error para la regla de decisión en la Ec. (62) se puede evaluar mediante las Ec. (64), (66) y (68), lo cual se puede expresar de forma compacta de la siguiente manera:

$$\mathrm{P}_{\min}(\vartheta, \vartheta+\delta) = \frac{\sum_{i=0}^{1} w(\vartheta+i\delta) P\left(\widehat{\mathcal{H}}_{1-i} \middle| \mathcal{H}_i\right)}{w(\vartheta) + w(\vartheta+\delta)} \tag{69}$$

Con base en la expresión obtenida para la mínima probabilidad de error en la Ec. (69), se puede calcular el límite inferior de Ziv-Zakai (ZZB) en la Ec. (57).

Como caso especial, cuando la PDF previa de x es uniforme en $[D_1, D_2]$, los términos logarítmicos en la Ec. (66) y (68) se vuelven cero, y $\mathrm{P}_{\min}(\vartheta, \vartheta+\delta)$ en la Ec. (69) se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\min}(\vartheta, \vartheta+\delta) &= 0.5\mathrm{P}\left(\widehat{\mathcal{H}}_1 | \mathcal{H}_0\right) + 0.5\mathrm{P}\left(\widehat{\mathcal{H}}_0 | \mathcal{H}_1\right) \\ &= Q\left(\frac{R_p \gamma \sqrt{E_2}\sqrt{g(\vartheta, \vartheta+\delta)}}{2\sigma}\right) \end{aligned} \tag{70}$$

Para el caso de la prior PDF uniforme, el ZZB se puede calcular basándose en las Ec. (58) y (70). Dado que los límites de la integral en las Ec. (57) y (58) son finitos, el ZZB se puede evaluar con precisión mediante enfoques numéricos. A partir de las Ec. (57), (66), (68) y (69), se observa que el ZZB disminuye a medida que E_2 aumenta; es decir, se logra una mayor precisión en el rango con una mayor energía de la señal transmitida, como se esperaba. También se nota que la expresión del ZZB en las Ec. (57) y (69) es diferente de la expresión del ZZB en sistemas VLP asíncronos [32], ya que en el caso sincrónico se utiliza la información relacionada con el rango tanto del parámetro de retardo de tiempo como del factor de atenuación del canal.

Observación 4. Es importante destacar que la expresión del ZZB en las Ec. (57) y (69) tiene distinciones importantes en comparación con las expresiones del ZZB para sistemas de rango sincrónicos basados en RF (por ejemplo, [30]) debido a los siguientes hechos: (i) el sistema sincrónico VLP utiliza tanto la información del retardo de tiempo como la potencia de la señal recibida (factor de atenuación del canal), mientras que los sistemas RF sincrónicos utilizan solo la información del retardo de tiempo (ya que el parámetro de potencia recibida lleva una información insignificante en comparación con el parámetro de retardo de tiempo en la mayoría de los sistemas de localización RF prácticos), y (ii) la ecuación de Lambert en la Ec. (4) está disponible para sistemas VLP para relacionar el factor de atenuación del canal (la potencia de la señal recibida) con la distancia x en canales de luz visible LOS, lo cual no es válido para los sistemas RF. En general, la fórmula de Lambert se utiliza, junto con la información del retardo de tiempo y la información previa, con el propósito de estimar el rango en este estudio.

2.9. Derivaciones del ECRB.

En esta sección, se investigan las expresiones de la Cramér-Rao bound (CRB) para la estimación de rango en sistemas VLP para realizar comparaciones con el ZZB.

Para un valor dado del parámetro desconocido, el CRB condicional presenta un límite inferior en los errores cuadráticos medios (MSE) de los estimadores no sesgados, lo cual se expresa como [31]:

$$\mathbb{E}\{|\hat{x}-x|^2\} \geq \left(\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \log p(r(t)|x)}{\partial x}\right)^2\right\}\right)^{-1} \triangleq \left(\mathrm{J}_{\mathrm{F}}(x)\right)^{-1} = \mathrm{CRB}(x) \tag{71}$$

donde $\hat{x}$ es una estimación no sesgada de x y los operadores de esperanza están condicionados a x. Para la estimación del parámetro de rango x, el CRB condicional en el caso síncrono se puede obtener a partir de la Ec. (71) como [16]:

$$\mathrm{CRB}(x) = \big(J_F(x)\big)^{-1} = \frac{\big(\sigma x^{m+4}/(\gamma R_p)\big)^2}{(m+3)^2 E_2 + \tilde{E}_s (x/c)^2} \tag{72}$$

donde $\tilde{E}_s \triangleq \int_0^{T_s} (s'(t))^2 dt$, siendo $s'(t)$ la primera derivada de $s(t)$. La expresión del CRB condicional en la Ec. 72 es una función del parámetro desconocido x, y no se considera ninguna información previa en la derivación de este límite.

La esperanza del CRB condicional ($ECRB$) se obtiene calculando el promedio del CRB condicional sobre la distribución previa del parámetro desconocido [31], lo que da lugar a la siguiente expresión para el escenario considerado:

$$\mathrm{ECRB} = \mathbb{E}\{\mathrm{CRB}(x)\} = \int_{D_1}^{D_2} w(x) CRB(x) dx \tag{73}$$

donde $\mathrm{CRB}(x)$ denota el CRB condicional en la Ec. (72), y $w(x)$ es la función de densidad de probabilidad previa de x, que es cero fuera de $[D_1, D_2]$. Para la función de densidad de probabilidad previa uniforme, el ECRB se especifica como se indica en el siguiente lema:

Lema 5. Supongamos que la función de densidad de probabilidad previa de x está especificada por una distribución uniforme sobre $[D_1, D_2]$. Entonces, el ECRB en el caso síncrono está dado por:

$$ECRB = \frac{\big(\sigma/(\gamma R_p)\big)^2}{(D_2 - D_1)\,\tilde{E}_s/c^2} \int_{D_2}^{D_2} \frac{x^{2m+8}}{x^2 + a} dx \tag{74}$$

con un $a \triangleq (m+3)^2 c^2 E_2/\tilde{E}_s$, que puede expresarse como en la siguiente expresión cuando $2m$ es un número entero:

$$ECRB = \frac{\big(\sigma/(\gamma R_p)\big)^2}{(D_2 - D_1)\,\tilde{E}_s/c^2} \left((-a)^{\lfloor m+3 \rfloor + 1} H_m(D_1, D_2, a) + \sum_{i=0}^{\lfloor m+3 \rfloor} \frac{(-a)^i \left(D_2^{2(m+3-i)+1} - D_1^{2(m+3-i)+1} \right)}{2(m+3-i)+1} \right) \tag{75}$$

donde

$$H_m(D_1, D_2, a) \triangleq \begin{cases} \big(\tan^{-1}(D_2/\sqrt{a}) - \tan^{-1}(D_1/\sqrt{a})\big)/\sqrt{a}\,, \text{si } m \in \mathbb{Z}^+ \\ 0.5(\ln(D_2^2 + a) - \ln(D_1^2 + a)), si\ 2m \in \mathbb{Z}^+ \text{S \& } m \notin \mathbb{Z}^+ \end{cases} \tag{76}$$

Prueba: La expresión genérica en la Ec. (74) se sigue directamente de las Ec. (72) y (73). Para obtener las expresiones específicas en las Ec. (75) y (76), consideremos la división de x^{2m+8} por $x^2 + a$, lo que resulta en la siguiente relación:

$$x^{2m+8} = (x^2 + a)\sum_{i=0}^{j}(-a)^i x^{2(m+3-i)} - (-1)^j a^{j+1} x^{2(m+3-j)} \tag{77}$$

donde $j \leq m + 3$ es un entero. Entonces, la integral en la Ec. (74) se convierte en:

$$\begin{aligned}\int_{D_1}^{D_2} \frac{x^{2m+8}}{x^2 + a}\,dx = &\int_{D_1}^{D_2} \sum_{i=0}^{j}(-a)^i x^{2(m+3-i)}\,dx \\ &- (-1)^j a^{j+1} \int_{D_1}^{D_2} \frac{x^{2(m+3-j)}}{x^2 + a}\,dx\end{aligned} \tag{78}$$

Si m es un número entero positivo, se puede emplear $j = m + 3$ para obtener el resultado especificado en la Ec. (75) y la primera parte de la Ec. (76). (Se observa que el último término de la integral en la Ec. (78) se convierte en $\int_{D_1}^{D_2}(x^2 + a)^{-1}$ en este caso, lo que lleva a los términos $\tan^{-1}$ en la Ec. (76). De manera similar, si m no es un número entero, pero $2m$ es un número entero positivo, entonces se puede usar $j = \lfloor m + 3 \rfloor$ para derivar la expresión especificada en la Ec. (75) y la segunda parte de la Ec. (76). (Se observa que el último término de la integral en la Ec. (78) se convierte en $\int_{D_1}^{D_2} x(x^2 + a)^{-1}$ en este caso, lo que resulta en los términos logarítmicos en la Ec. (76).

El ECRB puede no proporcionar un límite inferior en el rendimiento de los estimadores MAP ya que los CRB condicionales, que son la base del ECRB según se describe anteriormente, no tienen en cuenta la información previa [31]. Sin embargo, a altas relaciones señal-ruido (SNR), el ECRB puede converger al ZZB, lo cual es esperado ya que la información previa se vuelve insignificante en comparación con la información recopilada de las mediciones en condiciones de alta SNR. En general, el ECRB proporciona referencias útiles para comparaciones con el ZZB y ayuda a cuantificar la información relacionada con el rango recopilada a partir de la información previa. Además, las expresiones del ECRB proporcionan un enfoque de baja complejidad (en comparación con las expresiones del ZZB) para calcular los límites teóricos en la estimación del rango en escenarios de alta SNR.

2.10. Cramér-Rao Bayesiano (BCRB) y Cramér-Rao Ponderado (WCRB).

Para incorporar la información previa de manera efectiva en el límite inferior, se puede considerar el Cramér-Rao Bayesiano (BCRB) [31]. El BCRB se expresa como:

$$\xi \geq \left(\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \log p(r(t)|x)}{\partial x}\right)^2\right\} + \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \log w(x)}{\partial x}\right)^2\right\}\right)^{-1} \tag{79}$$

donde $\xi = \mathbb{E}\{|\hat{x} - x|^2\}$ denota el error cuadrático medio (MSE) de un estimador $\hat{x}$ [31]. En la Ec. (79), el primer operador de esperanza es con respecto a tanto $r(t)$ como x, mientras que el segundo operador de esperanza es solo sobre el parámetro x. A partir de las Ec. (71) y (72), el primer término en la Ec. (79) se puede calcular de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \log p(r(t)|x)}{\partial x}\right)^2\right\} = \mathbb{E}\{\mathrm{J_F}(x)\} = \int_{D_1}^{D_2} w(x) \frac{(m+3)^2 E_2 + \tilde{E}_s \left(\frac{x}{c}\right)^2}{\left(\sigma x^{m+4}/\left(\gamma R_p\right)\right)^2} dx \tag{80}$$

Para una determinada PDF previa, la BCRB se puede obtener en base a las Ec. (79) y (80). Una de las limitaciones de la BCRB se debe a la existencia y integrabilidad absoluta requerida para la derivada parcial de la PDF conjunta de la observación y el parámetro [31]. Por lo tanto, puede que no sea aplicable en algunos escenarios. Por ejemplo, cuando el parámetro de rango se distribuye uniformemente en $[D_1, D_2]$, la BCRB no existe.

El CRB ponderado (WCRB) proporciona una alternativa al BCRB y aborda el problema de existencia. Se define como [31]:

$$\xi \geq \frac{(\mathbb{E}\{q(x)\})^2}{\mathbb{E}\{q^2(x)\mathrm{J_F}(x)\} + \mathbb{E}\left\{q^2(x)\left(\frac{d \log\left(w(x)q(x)\right)}{dx}\right)^2\right\}} \tag{81}$$

donde ξ es el MSE de cualquier estimador, $\mathrm{J_F}(x)$ es como en la Ec. (71), $q(x)$ es una función de ponderación, y las expectativas son respecto a x. Como en [31], se puede emplear la siguiente función de ponderación:

$$q(x) = \left(\frac{x - D_1}{D_2 - D_1}\right)^v \left(1 - \frac{x - D_1}{D_2 - D_1}\right)^v \tag{82}$$

para $x \in [D_1, D_2]$ y $q(x) = 0$ en otro caso, donde v es un parámetro utilizado para mejorar el límite. Es decir, se utiliza el valor de v que maximiza el límite en la Ec. (81) para obtener el límite más ajustado. Para la PDF de prior uniforme, $\mathbb{E}\{q(x)\}$ en la Ec. (81) se calcula a partir de la Ec. (82) de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}\{q(x)\} = \frac{1}{D_2 - D_1} \int_{D_1}^{D_2} q(x) dx = \beta(v+1, v+1) \tag{83}$$

donde $\beta(a, b) \triangleq \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ denota la función beta. Además, el segundo término en el denominador de la Ec. (81) puede expresarse para la PDF de prior uniforme como [32]:

$$\mathbb{E}\left\{q^2(x)\left(\frac{d \log\left(w(x)q(x)\right)}{dx}\right)^2\right\} = \frac{v\beta(2v+1, 2v-1)}{(D_2 - D_1)^2} \tag{84}$$

Además, el primer término en el denominador de la Ec. (81) se puede calcular basándose en las Ec. (72) y (82) como:

$$\mathbb{E}\{q^2(x)\mathrm{J_F}(x)\} = \frac{\gamma^2 R_p^2/\sigma^2}{(D_2 - D_1)^{4v+1}} \times \left((m+3)^2 E_2 \int_{D_1}^{D_2} \frac{(x-D_1)^{2v}(D_2-x)^{2v}}{x^{2v+8}} dx + \frac{\tilde{E}_2}{c^2} \int_{D_1}^{D_2} \frac{(x-D_1)^{2v}(D_2-x)^{2v}}{x^{2m+6}} dx \right) \tag{85}$$

Luego, el WCRB en la Ec. (81) se puede evaluar mediante las Ec. (83)–(85). Para obtener el límite inferior más ajustado, se obtiene el valor de ν que produce el límite inferior máximo.

Observación 5. Los límites teóricos obtenidos en este estudio no consideran los efectos del multipath (ver la Ec. (1)). En presencia de propagación multipath, en general se observarían MSE más altos; por lo tanto, los límites inferiores para el escenario LOS proporcionados en este capítulo también presentan límites inferiores para el escenario multipath. El ajuste de los límites depende de la severidad de los efectos del multipath.

III. RESULTADOS

3.1. Resultados Numéricos.

3.1.1. Resultados para CRLBs y Estimadores de Máxima Verosimilitud. Se considera un modelo de sistema similar al presentado en [23]. Específicamente, se toma el orden lambertiano com $m = 1$, la altura h en la Ec. (4) se establece en 2.5 metros y la sensibilidad del fotodetector está dada por $R_p = 0.4$ mA/mW. Además, el área S del fotodetector en el receptor VLC es igual a 1 cm^2, y el nivel de densidad espectral del ruido se fija en $\sigma^2 = 1.336 \times 10^{-22}$ W/Hz basado en los parámetros utilizados en [23]. La señal $s(t)$ en la Ec. (1) se modela de la siguiente manera [23]:

$$s(t) = A\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right)\right)(1 + \cos(2\pi f_c t)) \tag{86}$$

Para $t \in [0, T_s]$, donde f_c es la frecuencia central y A corresponde a la potencia óptica emitida promedio (es decir, potencia óptica de la fuente). Para $f_c \gg 1/T_s$, se puede demostrar que la energía eléctrica de $s(t)$ definida en la Ec. (14) y el ancho de banda efectivo de $s(t)$ especificado por la Ec. (15) se pueden aproximar como $E_2 = 9\,A^2 T_s/4$ y $\beta = f_c/\sqrt{3}$, respectivamente [23]. Además, el parámetro E_3 en la Ec. (18) se obtiene como $E_3 = 0$ para la señal en la Ec. (86).

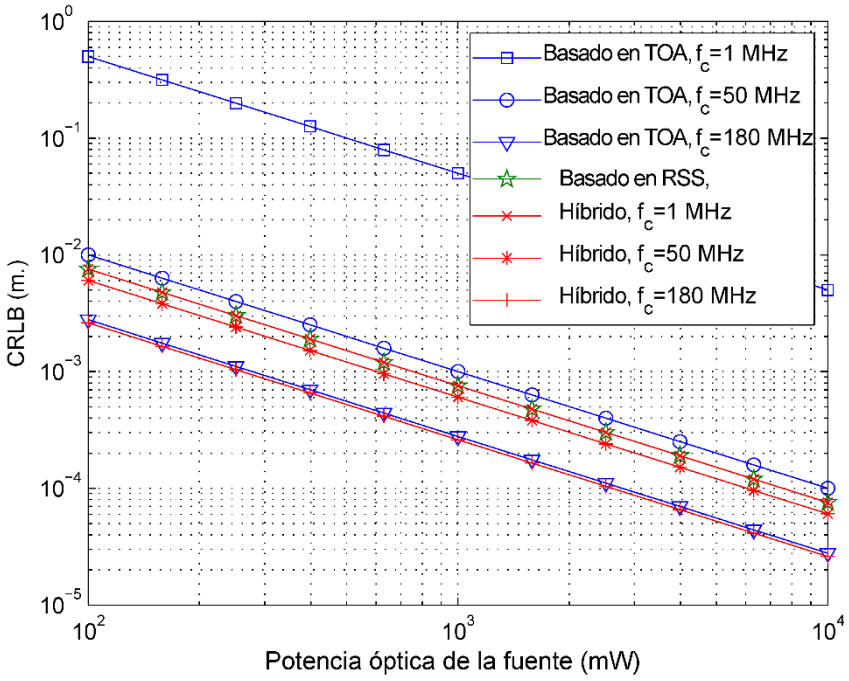


Figura N°5: CRLB versus potencia óptica de fuente para enfoques basados en TOA, basados en TOA/RSS híbrido y basados en RSS, donde $x = 5\ m$ y $T_s = 0{,}01\ s$.

Fuente: Elaboración propia.

Primero, se calculan los CRLBs para $T_s = 0.01\,\mathrm{s}$ cuando la distancia entre el transmisor LED y el receptor VLC es de $x = 5$ m. En la figura N°5, se representan los CRLBs en función de la potencia óptica de la fuente A para los enfoques basados en TOA, híbridos TOA/RSS y basados en RSS, considerando diferentes frecuencias centrales. Como era de esperar, el enfoque híbrido TOA/RSS logra el CRLB mínimo en todos los casos, ya que utiliza información tanto del retardo de tiempo como del factor de atenuación del canal. También se observa que el rendimiento de la estimación de distancia basada en RSS no depende de la frecuencia central. Esto se debe al hecho de que la información de RSS está relacionada con la energía de la señal, pero no cambia con las otras características de la señal, como se puede observar a partir de la Ec. (34) en el Lema 2 para $E_3 = 0$; es decir, $\mathrm{CRLB}_{\mathrm{RSS}} = \sigma^2 x^2 / \left(E_2 \alpha^2 R_p^2 (m+3)^2\right)$. Otra observación de la figura N°5 es que la estimación de distancia basada en TOA tiene CRLBs significativamente mayores que los otros enfoques para frecuencias centrales relativamente bajas, para las cuales los enfoques basados en RSS y híbridos TOA/RSS logran casi la misma precisión (ya que la información relacionada con la distancia obtenida del parámetro TOA se vuelve insignificante). Por otro lado, la estimación de distancia basada en TOA logra CRLBs inferiores que el enfoque basado en RSS para frecuencias centrales altas; por ejemplo, $f_c = 180$ MHz [6, 125]. En ese caso, la información obtenida del parámetro TOA se vuelve más significativa que la extraída del parámetro RSS (factor de atenuación del canal) y los enfoques basados en TOA y híbridos TOA/RSS tienen casi el mismo rendimiento. Todas estas observaciones concuerdan con la relación en la Proposición 2.

Con el fin de proporcionar una mayor comprensión, se representan los límites teóricos en función de f_c en la figura N°6 para los enfoques basados en TOA, híbridos TOA/RSS y basados en RSS, donde $x = 5\,\mathrm{m}.\,\mathrm{y}\ A = 0.1$. Se observa que la precisión de la estimación de distancia basada en TOA mejora con f_c ya que E_1 en la Ec. (13) aumenta con f_c. También existe una frecuencia crítica, que es igual a 66.16 MHz en este escenario, después de la cual (antes de la cual) la estimación de distancia basada en TOA logra un CRLB más bajo (más alto) que el enfoque basado en RSS. También se observa que el enfoque híbrido TOA/RSS proporciona mejoras significativas sobre los enfoques basados en TOA y RSS alrededor de esa frecuencia crítica.

A continuación, se representan los CRLBs en función de la duración de la señal T_s en la figura N°7 para los enfoques basados en TOA, híbridos TOA/RSS y basados en RSS, donde $x = 5$ m. y $A = 0.1$. A medida que la energía de la señal aumenta con T_s (nota que $E_2 = 9A^2T_s/4$), el rendimiento de la estimación de distancia mejora con T_s, como se esperaba.

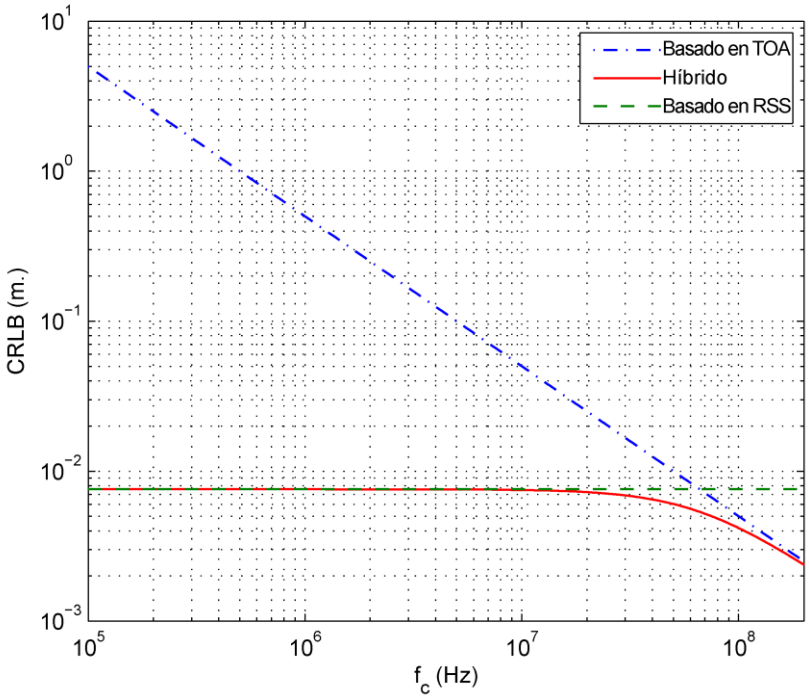


Figura N°6: Límites teóricos (CRLB) en función de fc para los enfoques basados en TOA, híbridos TOA/RSS y basados en RSS, donde $x = 5\ m$ y $A = 0.1$.
Fuente: Elaboración propia.

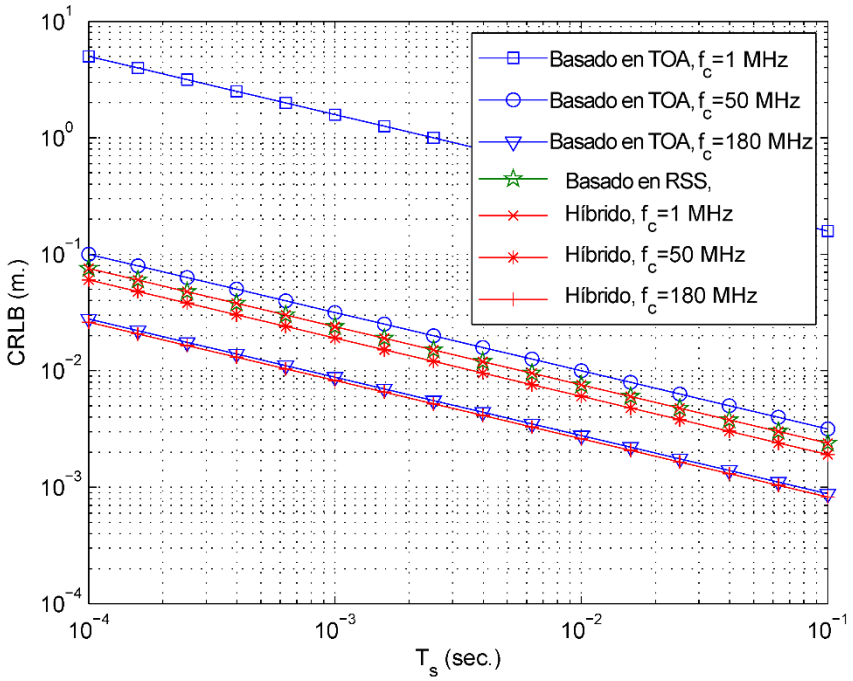


Figura N°7: Límites teóricos (CRLB) en función de T_s para los enfoques basados en TOA, híbridos TOA/RSS y basados en RSS, donde $x = 5\ m$ y $A = 0.1$.
Fuente: Elaboración propia.

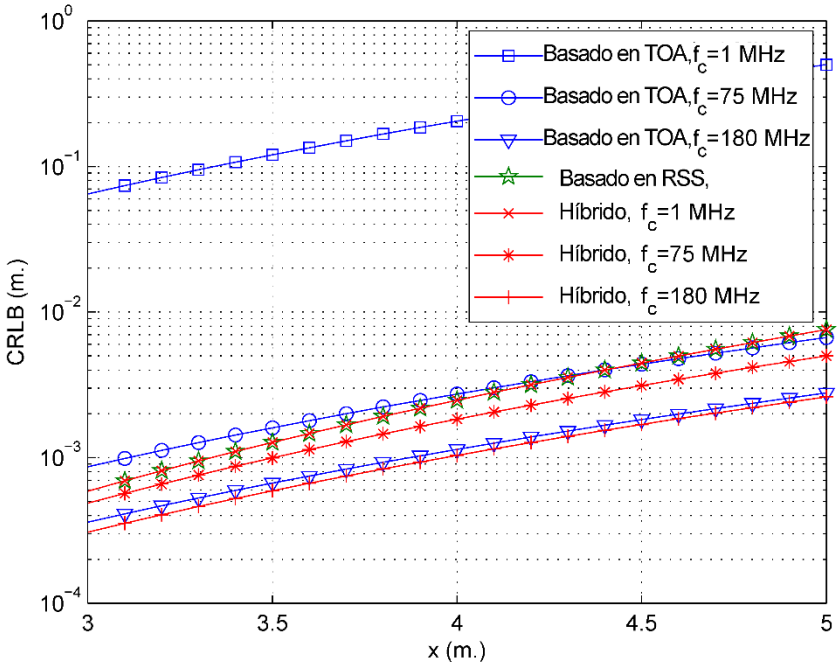


Figura N°8: Límites teóricos (CRLB) en función de la distancia x para los enfoques basados en TOA, híbridos TOA/RSS y basados en RSS, donde $T_s = 0.01\ s$ y $A = 0.1$.
Fuente: Elaboración propia.

Al igual que en la figura N°5, se observa que la estimación de distancia basada en TOA logra CRLBs más bajos (más altos) que la estimación de distancia basada en RSS para frecuencias centrales más altas (más bajas). También se nota que para que

la estimación de distancia basada en RSS logre un CRLB de 1 cm, la duración de la señal debería ser de alrededor de 6 ms. Por otro lado, los enfoques basados en TOA y híbridos TOA/RSS pueden emplear duraciones de señal más cortas para frecuencias centrales más altas (por ejemplo, $T_s \approx 0.6 - 0.7$ ms. para $f_c = 180$ MHz.).

En la figura N°8, los CRLBs se representan en función de la distancia x entre el transmisor LED y el receptor VLC para $f_c = 1$ MHz, $f_c = 75$ MHz y $f_c = 180$ MHz, donde $T_s = 0.01$ s. y $A = 0.1$. Es intuitivo que la precisión de la estimación disminuye (es decir, los CRLBs aumentan) a medida que la distancia aumenta. Esta observación intuitiva también se verifica mediante las expresiones en las Ec. (12), (25) y (34) a través de las relaciones en la Ec. (4) y (24).

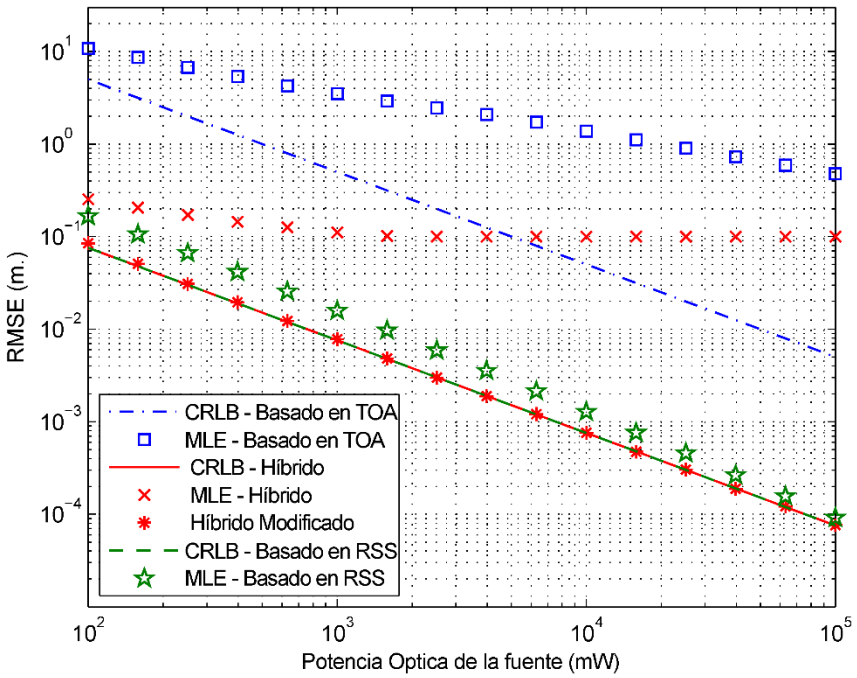


Figura N°9: RMSE de los MLE y los CRLB para diferentes enfoques, donde $x = 5$ m, $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 1$ MHz y $Tsmp = 1\ ns$.
Fuente: Elaboración propia.

También se observa en la figura N°8 que en algunos casos (por ejemplo, para $f_c = 75$ MHz), la estimación de distancia basada en RSS puede tener CRLBs más bajos que el enfoque basado en TOA hasta cierta distancia, y luego resulta en CRLBs más altos después de esa distancia. Esto se debe al hecho de que el CRLB (en metros) aumenta con x^{m+4} para el enfoque basado en RSS, mientras que aumenta con x^{m+3} para el enfoque basado en TOA, como se deduce de las Ec. (4), (12) y (34).

Es importante destacar que, aunque las comparaciones en las figuras N°5-8 se basan en los CRLBs (es decir, la precisión de la estimación de distancia), la complejidad de implementación también debe ser considerada para aplicaciones prácticas. Como se

mencionó en la Observación 2, la estimación de distancia basada en RSS tiene una ventaja práctica importante sobre los otros enfoques, ya que no requiere sincronización entre los relojes del transmisor LED y el receptor VLC. Por lo tanto, si la estimación de distancia basada en RSS puede proporcionar el nivel de precisión requerido para una aplicación, puede ser el enfoque preferido. De lo contrario, puede ser necesario un diseño de sistema sincronizado para lograr el nivel de precisión deseado para la estimación de distancia.

Finalmente, los MLEs en las secciones 2.2 y 2.3 se implementan y comparan para un escenario con $x = 5\ \text{m.}, T_s = 0.1\ \text{ms}, f_c = 1\ \text{MHz}, \Delta = 0$ (ver la Ec. (2)), y $T_{\text{smp}} = 1\ \text{ns}$. En la figura N°9, se ilustran los RMSEs de la estimación basada en TOA en la Ec. (9), la estimación basada en TOA/RSS en la Ec. (22), la estimación basada en RSS en la Ec. (33) y el estimador modificado basado en TOA/RSS en la Ec. (53), junto con los CRLBs. Como se esperaba a partir del análisis en la sección 2.7, la estimación basada en TOA y la estimación basada en TOA/RSS se ven directamente afectadas por la limitación de la tasa de muestreo y sus RMSE convergen hacia 0.1 m. de acuerdo con las Ec. (40) y (48). Por otro lado, los RMSEs asintóticos de la estimación basada en RSS y el estimador modificado basado en TOA/RSS se calculan a partir de la Ec. (41) y (54) como 9.14×10^{-7} m., lo cual está fuera del rango de precisión práctico. Por lo tanto, la limitación de la tasa de muestreo no tiene efectos significativos en estos estimadores en este escenario. También se observa que el estimador modificado basado en TOA/RSS converge al CRLB más rápido que la estimación basada en RSS y logra el mejor rendimiento para todos los niveles de potencia de interés. Además, la estimación basada en TOA/RSS tiene CRLBs más bajos que la estimación basada en TOA, ya que utiliza tanto el retardo de tiempo como la información de RSS. En la figura N°10, los RMSEs de los MLEs se trazan versus T_{smp} en ausencia de ruido para investigar los efectos del período de muestreo, donde $x = 5\ \text{m.}, T_s = 0.1\ \text{ms}, f_c = 1\ \text{MHz}, \Delta = 0$. En la figura, el período de muestreo T_{smp} se incrementa con un paso de 10^{-12}s. Se observa que los RMSEs de los MLE fluctúan a medida que T_{smp} cambia, lo que se debe al hecho de que el RMSE converge hacia cero cuando la distancia x se acerca a un múltiplo entero de cT_{smp} (donde c es la velocidad de la luz). Esta observación también se puede verificar en función de las Ec. (40), (41), (48) y (54). Además, la figura N°10 indica que los promedios locales de los RMSEs se reducen en general a medida que aumenta la tasa de muestreo (es decir, a medida que T_{smp} disminuye). Además, se observa que los RMSEs asintóticos del estimador modificado basado en TOA/RSS y la estimación basada en RSS están fuera de los límites prácticos de precisión, mientras que los de la estimación basada en TOA y la

estimación basada en TOA/RSS están dentro del rango de límites de precisión práctica. Por lo tanto, la limitación de la tasa de muestreo puede ser crucial para la estimación basada en TOA y la estimación basada en TOA/RSS.

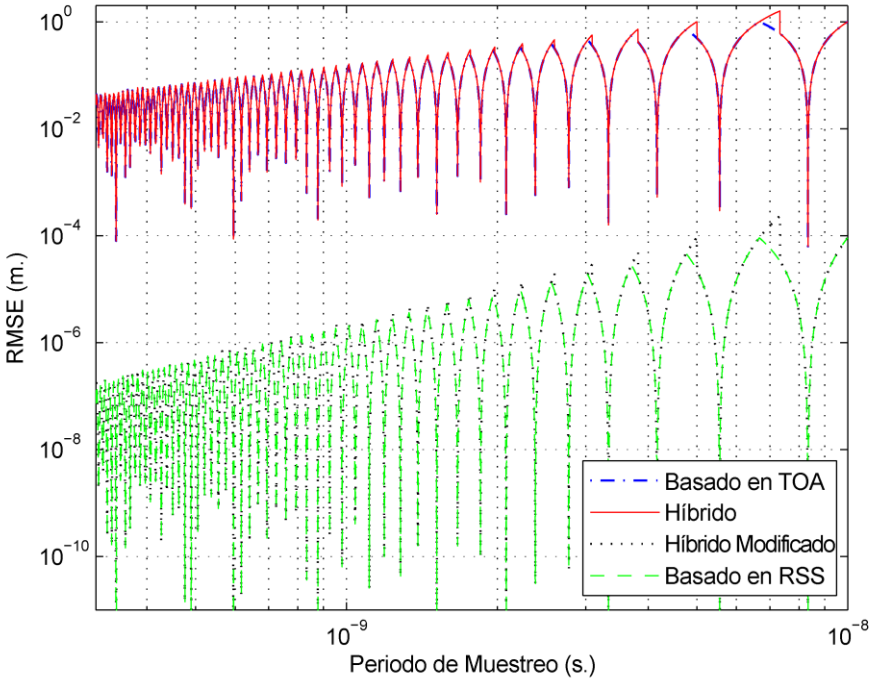


Figura N°10: RMSE de las MLEs para diferentes enfoques en ausencia de ruido, donde $x = 5$ m, $T_s = 0.1$ ms y $f_c = 1\ MHz$.
Fuente: Elaboración propia.

3.1.2. Resultados para ZZB, ECRB, WCRB y estimadores MAP. Para ilustrar los resultados para ZZB, ECRB, WCRB y estimadores MAP, consideramos un nuevo escenario donde h en la Ec. (4) se establece en 5 m. y la PDF anterior de la distancia, x, se toma como uniforme en el intervalo $[D_1, D_2]$, donde $D_1 = 5$ m. y $D_2 = 10$ m. (Ec. (57) y (58)). En el primer ejemplo, $T_s = 0.1$ ms., $f_c = 1$ MHz y el área S del fotodetector en el receptor VLC se establece en 1cm^2. En la figura N°11, los ZZBs en la sección 2.8 se trazan en función de la potencia óptica de la fuente A en la Ec. 86 para varios valores del orden Lambertiano m. Se observa que la precisión del rango disminuye a medida que aumenta m para valores prácticos de la potencia óptica de la fuente. Aunque la relación exacta entre el ZZB y m se puede deducir de las Ec. (5), (58) y (70), también se puede proporcionar una explicación intuitiva de la siguiente manera: El parámetro m determina la direccionabilidad del transmisor LED, y un valor grande de m corresponde a una rápida caída de potencia a medida que el ángulo de irradiación aumenta desde cero (ver la Ec. (3)). Por lo tanto, se esperan SNR más bajos a distancias más largas para valores más grandes de m, lo que puede conducir a ZZBs más altos, como se observa en la figura N°11.

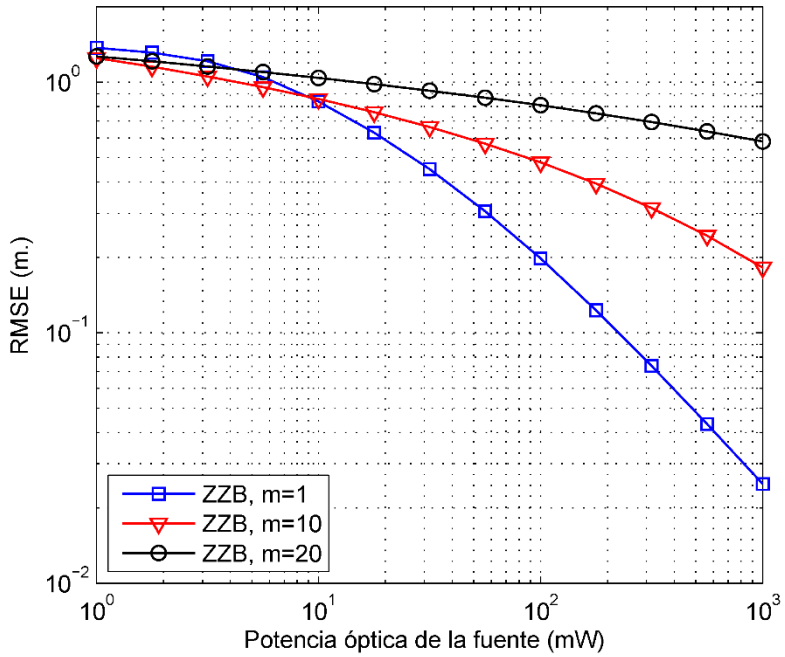


Figura N°11: ZZB frente a la potencia óptica de origen para varios valores del orden lambertiano, donde $S = 1\ \text{cm}^2$.
Fuente: Elaboración propia.

En la figura N°12, se presentan los ZZBs en la sección 2.8 en función de la potencia óptica de la fuente para varios valores de S, el área del fotodetector en el receptor VLC, donde se emplean $T_s = 0.1$ ms., $f_c = 1$ MHz y $m = 10$. Desde la figura, se observa que el ZZB aumenta (es decir, la precisión de la estimación disminuye) a medida que S disminuye. Esta observación se puede explicar en función de la expresión del ZZB en las Ec. (58) y (70) de la siguiente manera: Según la Ec. (5), γ es proporcional a S y según [23], σ es proporcional a S. Por lo tanto, el término γ/σ en la Ec. (70) cambia en proporción a $\sqrt{S}$, lo que conduce a ZZB más bajos a medida que $\sqrt{S}$ aumenta debido a la naturaleza monotónicamente decreciente de la función Q. En otras palabras, a medida que aumenta el área del fotodetector, se obtienen SNR más altos en el receptor VLC y se logran ZZB más bajos.

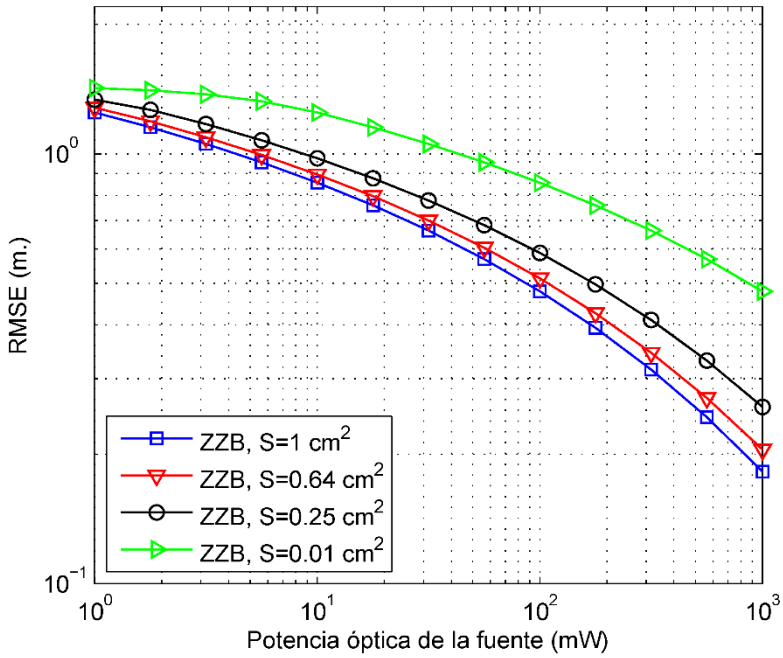


Figura N°12: ZZB en función de la potencia óptica de la fuente para diferentes valores del área del fotodetector, donde $m = 10$.
Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se investigan el ZZB en la sección 2.8, el ECRB en la sección 2.9 y el WCRB en la sección 2.10 en la figura N°13, junto con el rendimiento del estimador MAP, donde $T_s = 0.1$ ms., $f_c = 1$ MHz, $S = 1$ cm^2 y $m = 1$. El estimador MAP se puede obtener basado en el estimador ML [16] al restringir el espacio de búsqueda para el parámetro de distancia x al intervalo $[D_1, D_2]$ (ya que la distribución previa de x es uniforme en $[D_1, D_2]$) con $D_1 = 5$ m. y $D_2 = 10$ m. La figura N°13 muestra que el ECRB converge al ZZB a altas potencias ópticas de la fuente, es decir, a altos SNR, ya que la información previa se vuelve menos importante a medida que aumenta el SNR. Sin embargo, para potencias ópticas más bajas, el ECRB se vuelve significativamente mayor que el ZZB ya que los cálculos del ECRB no utilizan efectivamente la información previa, que se vuelve significativa en el régimen de bajo SNR. Por otro lado, el WCRB está cerca del ZZB a bajos SNR, pero se vuelve más laxo a medida que aumenta el SNR.

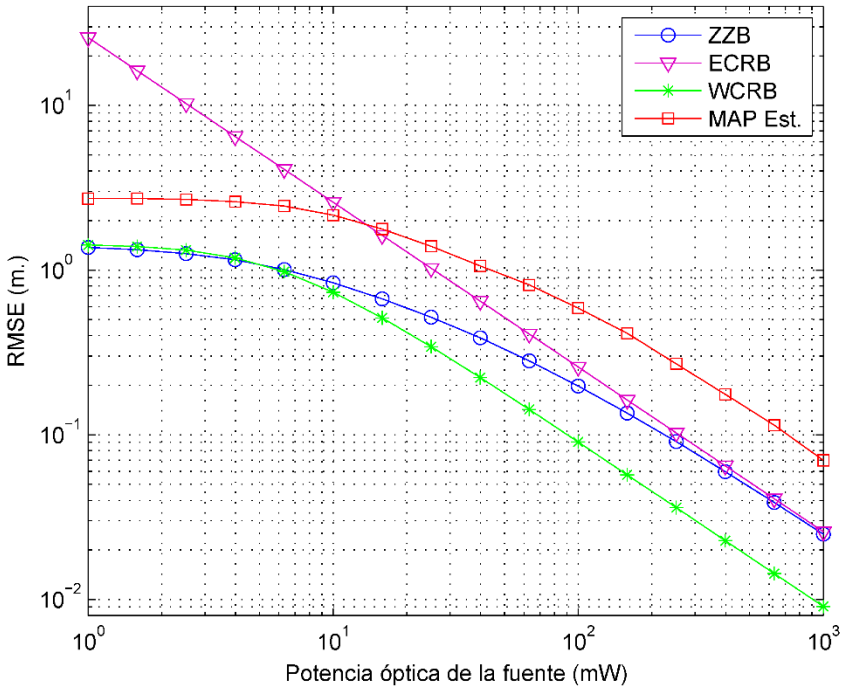


Figura N°13: Error cuadrático medio (RMSE) versus la potencia óptica de la fuente para el estimador MAP, el ZZB, el ECRB y el WCRB, donde $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 1$ MHz, $S = 1$ cm y $m = 1$.
Fuente: Elaboración propia.

La razón principal de este comportamiento es que el WCRB (y el BCRB) puede no proporcionar un límite ajustado en altos SNRs cuando la información de Fisher condicional depende del parámetro desconocido [31], lo cual es el caso para el sistema VLP considerado (es decir, la información de Fisher condicional en la Ec. (72) depende del parámetro desconocido x, la distancia entre el transmisor LED y el receptor VLC). Además, se observa en la figura N°13 que el ZZB proporciona un límite razonablemente ajustado para el rendimiento del estimador MAP en todas las regiones de SNR. Además, dado que el estimador MAP utiliza la información previa, su rendimiento no puede tener un límite inferior por el ECRB en el régimen de bajo SNR, que no utiliza eficazmente la información previa. Por lo tanto, la expresión del ECRB solo puede proporcionar límites inferiores útiles en el régimen de alto SNR, donde la información previa no es crucial en el proceso de estimación en comparación con la información obtenida de la señal recibida.

En el último ejemplo, se utilizan los mismos parámetros que en el escenario anterior, excepto que se usa un valor más grande de f_c, es decir, $f_c = 50$ MHz. Los resultados presentados en la figura N°14 ilustran que los RMSE se reducen (es decir, el rendimiento de rango mejora) en los regímenes de SNR medio y alto en comparación con el escenario anterior, lo cual puede explicarse de la siguiente manera: En un

sistema VLP síncrono, además de la información previa, se puede utilizar información tanto del parámetro de retardo de tiempo como del factor de atenuación del canal para la estimación de rango. Dado que la información obtenida del parámetro de retardo de tiempo aumenta con f_c [16], se puede observar un mejor rendimiento de estimación en SNRs suficientemente altos, donde la información previa se vuelve menos significativa que la información obtenida del parámetro de retardo de tiempo y del factor de atenuación del canal. Sin embargo, en el régimen de bajo SNR, la información previa se convierte en la fuente más significativa de información, lo que conduce a un rendimiento similar para los estimadores MAP en las figuras N°13 y 14. Además, se observa en la figura N°14 que el estimador MAP no puede acercarse mucho a los límites teóricos en altos SNR, lo cual se debe a la tasa de muestreo finita (es decir, 10^{-11} s.) empleada en las simulaciones. En particular, la resolución finita de la búsqueda del parámetro de distancia puede introducir errores adicionales en el régimen de alto SNR donde los límites teóricos de precisión son bastante bajos [16].

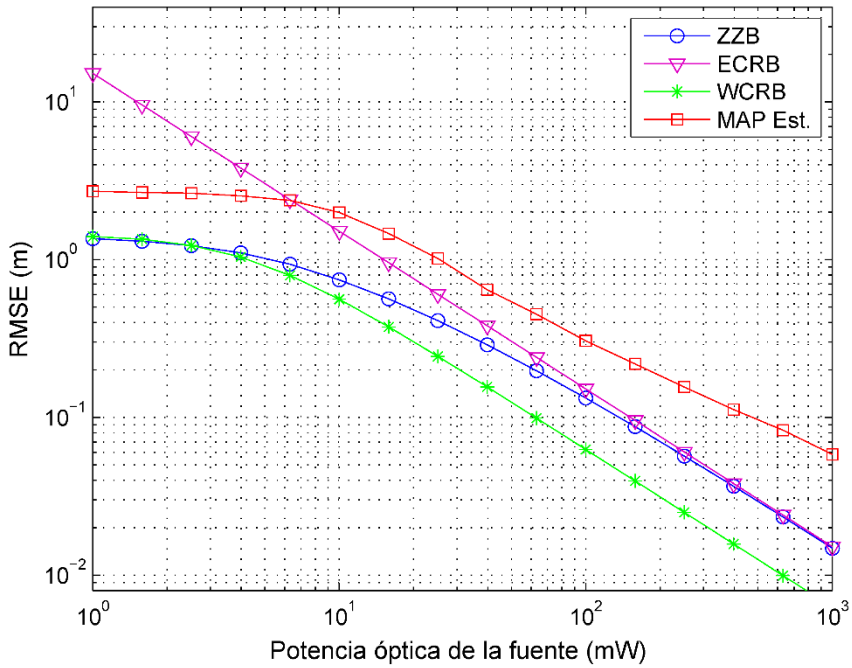


Figura N°14: La raíz del error cuadrático medio (RMSE) en función de la potencia óptica de la fuente se muestra para el estimador MAP, el ZZB, el ECRB y el WCRB, donde $T_s = 0.1\ ms, f_c = 50$ MHz, $S = 1\ cm^2$ y $m = 1$.
Fuente: Elaboración propia.

3.2. Relación con la estimación de posición.

En sistemas de localización inalámbrica, la estimación de posición se lleva a cabo comúnmente en dos pasos, donde los parámetros relacionados con la posición, como las distancias o los ángulos, se estiman en el primer paso y la posición se estima en función de esos parámetros estimados en el segundo paso [33]. Por lo tanto, la estimación de distancia

investigada en este estudio se puede considerar como el primer paso en un sistema de localización inalámbrica. A medida que mejora la precisión de la estimación de distancia, la estimación de posición también se vuelve más precisa en general. Para presentar una relación formal entre la estimación de posición y la precisión de la estimación de distancia, sea $\boldsymbol{l}_r = [l_{r,1}\ l_{r,2}\ l_{r,3}]$ la ubicación del receptor VLC, y $\boldsymbol{l}_{t_1}, \dots, \boldsymbol{l}_{t_N}$, con $\boldsymbol{l}_{t_i} = [l_{t_{i,1}}\ l_{t_{i,2}}\ l_{t_{i,3}}]$, representan las ubicaciones conocidas de los transmisores LED, que se utilizan para la localización del receptor VLC. Para SNRs suficientemente altos (lo cual es comúnmente el caso en canales de luz visible con línea de visión), la estimación ML para la distancia entre el receptor VLC y el i-ésimo transmisor LED puede expresarse como:

$$\hat{x}_i = x_i + \varsigma_i \tag{87}$$

para $i = 1, \dots, N$, donde los componentes de ruido $\varsigma_1, \dots, \varsigma_N$ son independientes, $x_i = \|\boldsymbol{l}_r - \boldsymbol{l}_{t_i}\|_2$ y ς_i está modelado como una variable aleatoria gaussiana con media cero y una varianza que es igual a CRLB_i, es decir, la CRLB para estimar x_i basada en la señal recibida del i-ésimo transmisor LED [122, 126]. En otras palabras, a altas SNRs, la estimación ML para la distancia está modelada por una variable aleatoria gaussiana con una media que es igual a la distancia verdadera y una varianza que es igual a la CRLB [122, 126]. Se observa que los resultados en la sección 2.6 especifican CRLB_i para varios enfoques de estimación (basados en TOA, basados en RSS y basados en TOA/RSS).

La CRLB para estimar la posición $\boldsymbol{l}_r$ del receptor VLC basada en $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$ puede expresarse como [122]:

$$E\left\{\left\|\hat{\boldsymbol{l}}_r - \boldsymbol{l}_r\right\|^2\right\} \geq \text{trace}\left\{\mathbf{J}(\boldsymbol{l}_r)^{-1}\right\} \tag{88}$$

donde $\mathbf{J}(\boldsymbol{l}_r)$ denota la FIM relacionada con $\boldsymbol{l}_r$ (ver Ec. (7)). Dado que la altura del receptor VLC se asume conocida (ver sección 2.5), el objetivo es estimar los dos primeros elementos de $\boldsymbol{l}_r$; es decir, $l_{r,1}\ y\ l_{r,2}$. Por lo tanto, basado en la Ec. (7), la matriz FIM puede especificarse para el modelo en la Ec. (87) de la siguiente manera:

$$[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{l}_r)]_{11} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(l_{t_i,1} - l_{r,1}\right)^2}{\text{CRLB}_i X_i^2}, [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{l}_r)]_{22} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(l_{t_i,2} - l_{r,2}\right)^2}{CRLB_i x_i^2}$$

$$[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{l}_r)]_{12} = [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{l}_r)]_{21} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(l_{t_i,1} - l_{r,1}\right)\left(l_{t_i,2} - l_{r,2}\right)}{CRLB_i x_i^2}$$

Luego, la CRLB en la Ec. 88 se calcula así:

$$E\left\{\left\|\hat{l}_r - l_r\right\|^2\right\} \geq \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{CRLB_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(l_{t_i,1} - l_{r,1}\right)^2}{CRLB_i x_i^2}\right.$$

$$\times \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(l_{t_i,2} - l_{r,2}\right)^2}{\mathrm{CRLB}_i x_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(l_{t_i,1} - l_{r,1}\right)\left(l_{t_i,2} - l_{r,2}\right)}{CRLB_i x_i^2} \right)^2 \Bigg)^{-1} \quad (89)$$

De acuerdo a la Ec.89, el límite de Cramér-Rao (CRLB) para la estimación de posición se puede especificar basado en los CRLBs para la estimación de las distancias entre el receptor VLC y un número de transmisores LED. Por lo tanto, los resultados relacionados con la estimación de distancia en la sección 2.6 proporcionan pautas para la estimación de posición también.

Es importante destacar que, en presencia de múltiples transmisores LED, el receptor VLC puede observar y procesar las señales de los transmisores LED individualmente utilizando técnicas de acceso múltiple como multiplexación por división de tiempo y multiplexación por división de frecuencia [9, 22, 127].

3.3. Ampliaciones.

Se han obtenido límites teóricos y estimadores tanto para sistemas VLP síncronos como asíncronos, y en presencia y ausencia de una relación entre la distancia y el factor de atenuación del canal. En particular, se han derivado los límites de Cramér-Rao (CRLBs) y los estimadores de máxima verosimilitud (MLEs) para la estimación de distancia basada en el tiempo de llegada (TOA), la estimación basada en la atenuación del canal (RSS) y la estimación híbrida basada en TOA y RSS. Se han proporcionado comparaciones entre los CRLBs, y se ha demostrado que el CRLB para la estimación híbrida basada en TOA/RSS converge al CRLB de la estimación basada en TOA para $\beta \gg c/x$ y al CRLB de la estimación basada en RSS para $\beta \ll c/x$. También se han obtenido resultados asintóticos para los MLEs bajo limitaciones de tasa de muestreo, y se ha propuesto un estimador de distancia híbrido modificado basado en TOA/RSS para realizar estimaciones precisas de distancia en escenarios prácticos. Se ha demostrado que los estimadores de distancia basados en RSS y el estimador híbrido modificado basado en TOA/RSS pueden proporcionar robustez contra las limitaciones de tasa de muestreo, y el estimador híbrido modificado basado en TOA/RSS logra las MSE más bajas entre todos los estimadores en escenarios prácticos.

Además, se ha derivado el límite superior de Ziv-Zakai (ZZB) para la estimación de rango en sistemas VLP síncronos. El ZZB propuesto utiliza información de distancia de la información previa, el parámetro de retardo de tiempo y el factor de atenuación del canal. Además, se ha obtenido una expresión cerrada para el ECRB, y se han presentado las derivaciones del BCRB y del WCRB para sistemas VLP síncronos. A través de ejemplos numéricos, se han comparado estos límites entre sí y con el estimador MAP. Se ha demostrado que el ZZB proporciona un límite inferior razonable para el estimador MAP, lo

que puede brindar pautas importantes para el diseño de sistemas VLP prácticos. Por ejemplo, basándose en la expresión del ZZB, se pueden analizar los efectos de varios parámetros del sistema, como el orden lambertiano, el área del fotodetector y la potencia óptica de la fuente, en la precisión del rango. Por otro lado, el ECRB y el WCRB (BCRB) pueden proporcionar límites útiles en los regímenes de alta y baja relación señal-ruido, respectivamente.

Además, se ha derivado el límite superior de Ziv-Zakai (ZZB) para la estimación de rango en sistemas VLP síncronos. El ZZB propuesto utiliza información de distancia de la información previa, el parámetro de retardo de tiempo y el factor de atenuación del canal. Además, se ha obtenido una expresión cerrada para el ECRB, y se han presentado las derivaciones del BCRB y del WCRB para sistemas VLP síncronos. A través de ejemplos numéricos, se han comparado estos límites entre sí y con el estimador MAP. Se ha demostrado que el ZZB proporciona un límite inferior razonable para el estimador MAP, lo que puede brindar pautas importantes para el diseño de sistemas VLP prácticos. Por ejemplo, basándose en la expresión del ZZB, se pueden analizar los efectos de varios parámetros del sistema, como el orden lambertiano, el área del fotodetector y la potencia óptica de la fuente, en la precisión del rango. Por otro lado, el ECRB y el WCRB (BCRB) pueden proporcionar límites útiles en los regímenes de alta y baja relación señal-ruido, respectivamente.

Como trabajo futuro, se considerarán los límites teóricos para la estimación de distancia en presencia de incertidumbre sobre la altura del receptor VLP. Además, se emplearán mediciones de múltiples transmisores LED para realizar estimaciones basadas en TOA/RSS híbrido en sistemas VLP tridimensionales (como se describe a continuación). Otra dirección importante sería realizar un estudio experimental para evaluar el rendimiento de los MLE y la precisión de los CRLB en condiciones del mundo real. Además, se pueden considerar límites teóricos para sistemas VLP síncronos en escenarios tridimensionales (es decir, cuando se desconoce la altura del receptor VLP). En ese caso, se debe emplear el ZZB extendido para la estimación de parámetros vectoriales [128].

En presencia de múltiples transmisores LED, el receptor VLP puede procesar las señales recibidas de los transmisores LED para determinar su posición tridimensional. Si $r_i(t)$ denota la señal recibida del i-ésimo transmisor LED, donde $i = 1, \dots, N$, las expresiones de CRLB y los estimadores ML deben derivarse en función de la distribución condicional de $r_1(t), \dots, r_N(t)$ dada por los parámetros desconocidos, que incluyen la ubicación del receptor VLP y otros parámetros accesorios, si los hay. Como enfoque práctico, el receptor VLP puede realizar una estimación de posición en dos etapas, lo que tiene una complejidad de implementación más baja y puede lograr un rendimiento similar al procesamiento óptimo de una sola etapa (conjunto) a altas SNR [33]. En este enfoque común, los parámetros relacionados con la posición, como el TOA y/o RSS, se estiman en la primera etapa y la posición del receptor VLP se estima en función de esos parámetros relacionados con la

posición en la segunda etapa. Los análisis teóricos detallados y las derivaciones de los estimadores ML y los estimadores de dos etapas en presencia de múltiples transmisores LED se consideran como trabajos futuros.

Para los límites teóricos en las secciones 2.8-2.10, se han presentado primero las expresiones genéricas y luego se han obtenido las expresiones particulares para el caso especial de distribución uniforme previa para el parámetro de distancia x. Como otro caso especial de importancia práctica, se puede considerar el escenario en el que el receptor VLP está distribuido uniformemente en el suelo. En ese caso, se puede emplear una distribución uniforme bidimensional sobre el área donde el receptor VLP puede comunicarse con el transmisor LED. Sea $\mathcal{A}_v$ esa área. Con base en las distancias mínima y máxima posibles, que se denotan como D_1 y D_2, respectivamente (sección 2.8), y el hecho de que el transmisor LED y el receptor VLP están apuntando en direcciones verticales, el área $\mathcal{A}_v$ puede representarse por un círculo con un radio de$\sqrt{D_2^2 - D_1^2}$, cuyo centro se encuentra en la proyección del transmisor LED en el suelo (figura N°14).

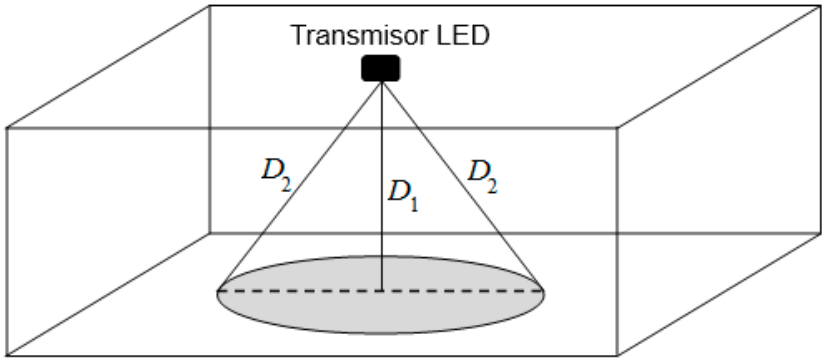


Figura N°15: El escenario en el que el receptor VLP está ubicado en el área circular gris según una distribución uniforme.
Fuente: Elaboración propia.

El uso de un área circular puede justificarse por el campo de visión del receptor VLP, que impone un límite superior al ángulo de incidencia θ (ver Ec. (3)) para la comunicación entre el transmisor LED y el receptor VLP [32]. Cuando la posición del receptor VLP está uniformemente distribuida sobre el área circular $\mathcal{A}_v$, se puede demostrar, mediante cierta manipulación de variables aleatorias, que la distancia x entre el transmisor LED y el receptor VLP está caracterizada por la siguiente función de densidad de probabilidad (PDF) prior:

$$w(x) = \begin{cases} 2x/(D_2^2 - D_1^2), & \text{si } D_1 \le x \le D_2 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases} \tag{90}$$

El límite ZZB puede evaluarse fácilmente para la PDF prior en Ec. (90) al insertarla en la Ec. (57), (64), (66) y (68). De manera similar, las expresiones de la ECRB pueden especificarse en base a la Ec. (73) y (90), lo que lleva a expresiones similares a las de la Ec. (74)-(76). (De hecho, el uso de la PDF prior en la Ec. (90) en lugar de la PDF uniforme

aumenta principalmente el grado de x en el numerador de la integral en la Ec. (74); por lo tanto, las derivaciones siguen siendo casi las mismas). De manera similar, el BCRB y el WCRB en la sección 2.10 también pueden evaluarse para la Ec. (57). Por lo tanto, también se pueden obtener expresiones específicas para los límites para la PDF prior en la Ec. (90).

En sistemas prácticos, debido a errores de sincronización y resolución finita de las estimaciones del retardo de tiempo, la relación en la Ec. (2) puede no mantenerse exactamente. Para derivar el límite ZZB en presencia de tales efectos, la Ec. (2) puede actualizarse como $\tau = x/c + \varepsilon$, donde ε tiene una PDF denotada por $p_\varepsilon(.)$. Luego, a partir de la Ec. (1), se puede obtener la función de verosimilitud como (Ec. (61)).

$$p(r(t)|x) = e^k \int p_e(\epsilon) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\int_{T_2}^{T_1}\left(r(t)-\frac{R_p\gamma}{x^{m+3}}s\left(t-\frac{x}{c}-\epsilon\right)\right)^2 dt} d\epsilon \tag{91}$$

Basado en la Ec. (91), la regla de decisión en la Ec. (60) puede expresarse, después de alguna manipulación, como sigue:

$$\log\left(\int p_\varepsilon(\epsilon) e^{\frac{R_p\gamma\tilde{C}_{rs}(\vartheta+\delta,\epsilon)}{\sigma^2(\vartheta+\delta)^{m+3}}} d\epsilon\right) - \log\left(\int p_\varepsilon(\epsilon) e^{\frac{R_p\gamma\tilde{C}_{rs}(\vartheta,\epsilon)}{\sigma^2\vartheta^{m+3}}} d\epsilon\right)$$

$$= \frac{R_p^2\gamma^2 E_2}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{(\vartheta+\delta)^{2m+6}} - \frac{1}{\vartheta^{2m+6}}\right) + \log\left(\frac{w(\vartheta)}{w(\vartheta+\delta)}\right) \tag{92}$$

donde $\tilde{C}_{rs}(x,\epsilon) \triangleq \int_{T_1}^{T_2} r(t)s(t-x/c-\epsilon)$. Dado que es difícil especificar la PDF de las estadísticas de decisión en la Ec. (92), puede que no sea posible obtener una expresión en forma cerrada para $P_{\min}$ en la Ec. (69). Sin embargo, se puede adoptar un enfoque de Monte Carlo para evaluar $P_{\min}$ basado en la regla de decisión en la Ec. (92). Luego, el límite ZZB puede calcularse numéricamente mediante la Ec. (57).

3.4. Modelo del sistema.

3.4.1. Modelo de señal recibida. Considere un sistema VLP en el que se utilizan varios transmisores LED para estimar la posición de un receptor VLC. Se asume un escenario de línea de visión (LOS) entre cada transmisor LED y el receptor VLC, lo cual es comúnmente el caso en sistemas de luz visible [5, 23]. Entonces, la señal recibida en el receptor VLC debido a la señal emitida por el i-ésimo transmisor LED se formula como sigue [23]:

$$r_i(t) = \alpha_i R_p S_i(t-\tau_i) + \eta_i(t) \tag{93}$$

para $i \in \{1, \dots, N_L\}$ y $t \in [T_{1,i}, T_{2,i}]$, donde N_L denota el número de transmisores LED, $T_{1,i}$ y $T_{2,i}$ determinan el intervalo de observación para la señal proveniente del i-ésimo transmisor LED, α_i es el factor de atenuación del canal óptico entre el i-ésimo

transmisor LED y el receptor VLC ($\alpha_i > 0$), R_p es la responsividad del foto detector, $s_i(t)$ es la señal transmitida desde el i-ésimo transmisor LED, que es distinta de cero en el intervalo $[0, T_{s,i}], \tau_i$ es el tiempo de llegada (TOA) de la señal emitida por el i-ésimo transmisor LED, y $\eta_i(t)$ es un ruido aditivo blanco gaussiano de media cero con una densidad espectral de potencia σ^2. Se asume que se emplea un cierto tipo de protocolo de acceso múltiple, como el acceso múltiple por división de frecuencia o el acceso múltiple por división de tiempo [130], para facilitar el procesamiento separado de las señales de cada transmisor LED en el receptor VLC [4]. Por lo tanto, los procesos de ruido correspondientes a las señales recibidas de los diferentes transmisores LED se modelan como independientes. También se asume que R_p y $s_i(t), i \in \{1, \dots, N_L\}$, son conocidos por el receptor VLC.

El parámetro TOA en la ec. (93) se modela como:

$$\tau_i = \frac{\left\| \boldsymbol{l}_r - \boldsymbol{l}_t^i \right\|}{c} + \Delta_i \tag{94}$$

donde c es la velocidad de la luz, Δ_i denota el desfase de tiempo entre los relojes del i-ésimo transmisor LED y el receptor VLC, $\boldsymbol{l}_r = \left[l_r \; l_{r,2} \; l_{r,3}\right]^T$ y $\boldsymbol{l}_t^i = \left[l_{t,1}^i \; l_{t,2}^i \; l_{t,3}^i\right]^T$ son vectores columna tridimensionales que representan las ubicaciones del receptor VLC y el i-ésimo transmisor LED, respectivamente, y $\left\| \boldsymbol{l}_r - \boldsymbol{l}_t^i \right\|$ denota la distancia entre el i-ésimo transmisor LED y el receptor VLC. Para un escenario síncrono, $\Delta_i = 0$ para $i = 1, \dots, N_L$ mientras que, para un escenario asíncrono, Δ_i se modela como parámetros determinísticos desconocidos. Se asume que la componente de la señal en la ec. (93) está completamente contenida en el intervalo de observación $[T_{1,i}, T_{2,i}]$; es decir, $\tau_i \in [T_{1,i}, T_{2,i} - T_{s,i}]$. En la ec. (93), el factor de atenuación del canal α_i se modela como:

$$\alpha_i = -\frac{(m_i + 1)S}{2\pi} \frac{\left[\left(\boldsymbol{l}_r - \boldsymbol{l}_t^i \right)^T \boldsymbol{n}_t^i \right]^{m_i} \left(\boldsymbol{l}_r - \boldsymbol{l}_t^i \right)^T \boldsymbol{n}_r}{\left\| \boldsymbol{l}_r - \boldsymbol{l}_t^i \right\|^{m_i+3}} \tag{95}$$

donde m_i es el orden lambertiano para el i-ésimo transmisor LED, S es el área del fotodetector en el receptor VLC, y $\boldsymbol{n}_r = \left[n_{r,1} \; n_{r,2} \; n_{r,3}\right]^T$ y $\boldsymbol{n}_t^i = \left[n_{t,1}^i \; n_{t,2}^i \; n_{t,3}^i\right]^T$ denotan los vectores de orientación ('normales') del receptor VLC y el i-ésimo transmisor LED, respectivamente [23, 29]. Se asume que el receptor VLC conoce $S, \boldsymbol{n}_r, m_i, \boldsymbol{l}_t^i$ y $\boldsymbol{n}_t^i$ para $i = 1, \dots, N_L$. Por ejemplo, la orientación del receptor VLC, nr, puede ser determinada por un giroscopio y los parámetros de los transmisores LED

$\left(m_i, \boldsymbol{l}_t^i \text{ y } \boldsymbol{n}_t^i\right)$ pueden ser enviados al receptor a través de comunicaciones de luz visible.

3.4.2. Función Log-Verosimilitud y CRLB. Considerando el modelo de señal recibida en la ec. (91), la función de verosimilitud para el vector de señal recibida $r(t) \triangleq \left[r_1(t) \ldots r_{N_L}(t)\right]^T$ se obtiene de la siguiente manera [120, 121]:

$$\Lambda(\boldsymbol{\varphi}) = k - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_L} \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} \left(r_i(t) - \alpha_i R_p s_i(t - \tau_i)\right)^2 dt \tag{96}$$

donde $\boldsymbol{\varphi}$ representa el conjunto de parámetros desconocidos y k es una constante de normalización que no depende de los parámetros desconocidos. Mientras que el conjunto de parámetros desconocidos consiste solo en las coordenadas del receptor VLC en el caso síncrono, también contiene los parámetros de retardo en el caso asíncrono, como se investigó en las secciones 3.5 y 3.6.

El límite de Cramér-Rao en la matriz de covarianza de cualquier estimador no sesgado $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ de $\boldsymbol{\varphi}$ se puede expresar como [122]:

$$\mathbb{E}\{(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi})(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi})^T\} \succeq \mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})^{-1} \tag{97}$$

donde $\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$ significa que $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ es semidefinido positivo y $\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})$ es la matriz de información de Fisher (FIM) para $\boldsymbol{\varphi}$, que se puede calcular de la siguiente manera:

$$J(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbb{E}\left\{\left(\nabla_{\boldsymbol{\varphi}} \Lambda(\boldsymbol{\varphi})\right)\left(\nabla_{\boldsymbol{\varphi}} \Lambda(\boldsymbol{\varphi})\right)^T\right\} \tag{98}$$

con $\nabla_{\boldsymbol{\varphi}}$ representando el operador de gradiente con respecto a $\boldsymbol{\varphi}$ y $\Lambda(\boldsymbol{\varphi})$ siendo la función de log-verosimilitud como se define en la ec. (96).

3.5. Posicionamiento en Sistemas Síncronos.

En el escenario síncrono, el receptor VLC está sincronizado con los transmisores LED; es decir, $\Delta_i = 0$ en la ec. (94) para $i = 1, \ldots, N_L$. En esta sección, se deriva la CRLB para sistemas VLP síncronos, se propone la estimación directa de la posición y se desarrolla la estimación de la posición en dos pasos al considerar tanto la información de retardo temporal como la de atenuación del canal.

3.5.1. CRLB. En el caso síncrono, α_i y τ_i son funciones solo de $\boldsymbol{l_r}$ (ya que $\Delta_i = 0$ en la ec. (94)); por lo tanto, el conjunto de parámetros desconocidos en la ec. (96) se define como:

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[l_{r,1}\ l_{r,2}\ l_{r,3}\right]^T = \boldsymbol{l_r} \tag{99}$$

Entonces, el límite de Cramér-Rao (CRLB) para estimar $\boldsymbol{l_r}$ basado en $r_1(t), \ldots, r_{N_L}(t)$ en la ec. 93 está especificado por la siguiente proposición.

Proposición 1. Para sistemas VLP síncronos, el CRLB sobre el error cuadrático medio (MSE) de cualquier estimador imparcial $\hat{\boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{r}}$ para la ubicación del receptor VLC está dado por:

$$\mathbb{E}\left\{\left\|\hat{\boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{l_r}\right\|^2\right\} \geq \text{trace}\{\mathbf{J}_{\text{syn}}^{-1}\} \tag{100}$$

Donde:

$$\left[\mathbf{J}_{\text{syn}}\right]_{k_1,k_2} = \frac{R_p^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N_L}\left(E_2^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_2}} + E_1^i \alpha_i^2 \frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_2}} - E_3^i \alpha_i\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_2}} + \frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_2}}\right)\right) \tag{101}$$

Para $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3\}$ con:

$$E_1^i \triangleq \int_0^{T_{s,i}} \left(s_i'(t)\right)^2 dt \tag{102}$$

$$E_2^i \triangleq \int_0^{T_{s,i}} \left(s_i(t)\right)^2 dt \tag{103}$$

$$E_3^i \triangleq \int_0^{T_{s,i}} s_i(t) s_i'(t)\, dt \tag{104}$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k}} = \frac{l_{r,k} - l_{t,k}^i}{c\left\|\boldsymbol{l_r} - \boldsymbol{l_i^t}\right\|} \tag{105}$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k}} = -\frac{(m_i+1)S}{2\pi}\left(\frac{\left(\left(\boldsymbol{l_r} - \boldsymbol{l_t^i}\right)^T \boldsymbol{n_t^i}\right)^{m_i-1}}{\left\|\boldsymbol{l_r} - \boldsymbol{l_t^i}\right\|^{m_i+3}} \times \left(m_i n_{t,k}^i \left(\boldsymbol{l_r} - \boldsymbol{l_t^i}\right)^T \boldsymbol{n_r} + n_{r,k}\left(\boldsymbol{l_r} - \boldsymbol{l_t^i}\right)^T \boldsymbol{n_t^i}\right) - \frac{(m_i+3)\left(l_{r,k} - l_{t,k}^i\right)}{\left\|\boldsymbol{l_r} - \boldsymbol{l_t^i}\right\|^{m_i+5}}\left(\left(\boldsymbol{l_r} - \boldsymbol{l_t^i}\right)^T \boldsymbol{n_t^i}\right)^{m_i}\left(\boldsymbol{l_r} - \boldsymbol{l_t^i}\right)^T \boldsymbol{n_r}\right) \tag{106}$$

Demostración: Consideremos la función de verosimilitud en la Ec. (96), donde τ_i y α_i están relacionados con $\boldsymbol{l_r}$ como en la Ec. (94) (con $\Delta_i = 0$) y la Ec. (95), respectivamente. Dado que el conjunto de parámetros desconocidos en el caso síncrono es igual a lr como se indica en la Ec. (99), los elementos de la matriz de información de Fisher (FIM) en la Ec. (98) pueden expresarse como sigue:

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})]_{k_1,k_2} = \mathbb{E}\left\{\frac{\partial \Lambda(\varphi)}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \Lambda(\varphi)}{\partial l_{r,k_2}}\right\} \tag{107}$$

Para $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3\}$. A partir de la Ec. (96), la expresión en la Ec. (107) se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}[\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})]_{k_1,k_2} = \frac{R_p^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N_L}\Bigg(& E_2^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_2}} \\ &+ \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}}\int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} s_i(t-\tau_i)\frac{\partial s_i(t-\tau_i)}{\partial l_{r,k_2}}dt \\ &+ \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_2}}\int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} s_i(t-\tau_i)\frac{\partial s_i(t-\tau_i)}{\partial l_{r,k_1}}dt \\ &+ \alpha_i^2 \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} \frac{\partial s_i(t-\tau_i)}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial s_i(t-\tau_i)}{\partial l_{r,k_2}}dt\Bigg)\end{aligned} \tag{108}$$

Donde $E_2^i \triangleq \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} s_i^2(t-\tau_i)dt$, que es igual a la expresión en la Ec. (103) ya que se asume que $s_i(t-\tau_i)$ está completamente contenido en el intervalo de observación $[T_{1,i}, T_{2,i}]$. Dado que $\partial s_i(t-\tau_i)/\partial l_{r,k} = -(\partial \tau_i/\partial l_{r,k})s_i'(t-\tau_i)$, se puede demostrar que la expresión en la Ec. (108) es igual a la de la Ec. (101) basándose en las definiciones en las Ec. (102) y (104); por lo tanto, $\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{J}_{\text{syn}}$. Además, las derivadas parciales en las Ec. (105) y (106) pueden obtenerse a partir de la Ec. (94) (con $\Delta_i = 0$) y la Ec. (95), respectivamente. Finalmente, el CRLB sobre el ECM de cualquier estimador imparcial $\hat{\boldsymbol{l}}_r$ para la ubicación del receptor VLC, $\boldsymbol{l}_r$, se puede expresar en función de la desigualdad en la Ec. (97) como:

$$\mathrm{E}\left\{\left\|\hat{\boldsymbol{l}}_r - \boldsymbol{l}_r\right\|^2\right\} \geq \mathrm{trace}\{\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})^{-1}\} \tag{109}$$

Dado que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})$ en la Ec. (108) es igual a $\mathbf{J}_{\text{syn}}$ en la Ec. (101), como se discutió anteriormente, la expresión en la Ec. (100) se sigue de la Ec. (109).

La expresión de CRLB especificada por las Ec. (100)–(106) ilustra los efectos de las señales transmitidas a través de los parámetros E_1^i, E_2^i y E_3^i así como el impacto de la geometría (configuración) mediante los términos $\partial \tau_i/\partial l_{r,k}$ y $\partial \alpha_i/\partial l_{r,k}$. Por lo tanto, el límite teórico sobre la precisión de la localización puede evaluarse para cualquier sistema dado en función de la expresión proporcionada. Se señala que la expresión de CRLB en la Proposición 1 no ha estado disponible en la literatura y proporciona un límite teórico para sistemas VLP sincrónicos al utilizar información tanto de los factores de atenuación del canal (RSS) como de los parámetros de retardo de tiempo

(TOA). En comparación con la CRLB en la Proposición 1, las de [16, 23, 28] son solo para la estimación de distancia, y las de [29, 49, 50] se centran en la localización basada en RSS. Como se señala en la Proposición 1 y su prueba, la principal diferencia técnica y dificultad en obtener la expresión propuesta de CRLB está relacionada con el uso simultáneo de los parámetros TOA y RSS, lo que requiere el cálculo de las derivadas parciales tanto de $\{\alpha_i\}_{i=1}^{N_L}$ como de $\{\tau_i\}_{i=1}^{N_L}$.

La expresión de CRLB en la Proposición 1 es genérica ya que los transmisores LED y el receptor VLC pueden tener ubicaciones y orientaciones arbitrarias y las señales transmitidas pueden estar en formas genéricas. Los casos especiales se pueden obtener fácilmente a partir de las Ec. (100)–(106). Por ejemplo, si las señales transmitidas satisfacen $s_i(T_{s,i}) = s_i(0)$ para $i = 1, \dots, N_L$, entonces E_3^i en la Ec. (104) se vuelve cero y $[\mathbf{J}_{\text{syn}}]_{k_1 k_2}$ en la Ec. (101) se reduce a:

$$[\mathbf{J}_{\text{syn}}]_{k_1,k_2} = \frac{R_p^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_L} \left(E_2^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_2}} + E_1^i \alpha_i^2 \frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_1}} \frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_2}} \right) \tag{110}$$

A partir de la Ec. (110), se puede observar la contribución individual de los factores de atenuación del canal y los retardos temporales. Es decir, los primeros y segundos elementos en la Ec. (110) están relacionados con la información de ubicación obtenida de los factores de atenuación del canal y los parámetros de retardo temporal, respectivamente. Por lo tanto, se observa que tanto los parámetros RSS como TOA se utilizan para la localización en el escenario síncrono.

3.5.2. Posicionamiento directo. El posicionamiento directo se refiere a la estimación de la ubicación desconocida directamente a partir de las señales recibidas sin ningún paso intermedio para estimar parámetros relacionados con la ubicación, como TOA o RSS [38–40, 42–45, 47, 48] (ver sección 3.5.3). El posicionamiento directo no ha sido considerado previamente para sistemas VLP síncronos, los cuales presentan diferencias significativas respecto a los sistemas de posicionamiento basados en RF. En el posicionamiento directo, el objetivo es estimar la ubicación del receptor VLP, $\boldsymbol{l}_r$, basándose en las señales recibidas en la Ec. (93). A partir de la Ec. (96) y (99), el estimador ML para $\boldsymbol{l}_r$ se puede obtener de la siguiente manera [122]:

$$\hat{\boldsymbol{l}}_r^{\text{DP,syn}} = \arg\max_{\boldsymbol{l}_r} -\sum_{i=1}^{N_L} \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} \left(r_i(t) - \alpha_i R_p s_i(t - \tau_i) \right)^2 dt$$

lo cual puede simplificarse, después de ciertas manipulaciones, a la siguiente expresión:

$$\hat{\boldsymbol{l}}_r^{\mathrm{DP,syn}} = \arg\max_{l_r} \sum_{i=1}^{N_L} \alpha_i \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} r_i(t) s_i(t-\tau_i) dt - \frac{R_p}{2} \sum_{i=1}^{N_L} \alpha_i^2 E_2^i \tag{111}$$

donde E_2^i está definido como en la Ec. (103). Cabe señalar que τ_i y α_i en la Ec. (111) son funciones de $\boldsymbol{l}_r$ según se especifica en la Ec. (94) (con $\Delta_i = 0$) y la Ec. (95), respectivamente. Por lo tanto, el estimador directo de posición por máxima verosimilitud en la Ec. (111) busca entre todos los posibles valores de la posición desconocida l_r basándose en las relaciones de l_r con los factores de atenuación del canal y los retardos de tiempo.

La principal ventaja del enfoque de posicionamiento directo en la Ec. (111) está relacionada con su rendimiento (optimalidad en el sentido de la máxima verosimilitud), como se investiga en la sección 3.7. Por otro lado, puede generar alta complejidad en ciertas aplicaciones debido a los mayores requisitos de almacenamiento y comunicación. Por ejemplo, si la estimación de la ubicación debe realizarse en una unidad central, se vuelve engorroso transmitir todas las señales recibidas al centro.

3.5.3. Posicionamiento en dos pasos. Un método común para el posicionamiento en redes inalámbricas es aplicar un proceso de estimación en dos etapas, donde en la primera etapa se realiza la estimación de parámetros relacionados con la ubicación, como RSS, TOA, TDOA y/o AOA, y en la segunda etapa se estima la ubicación desconocida basándose en esos parámetros [33]. Aunque el posicionamiento en dos etapas ha sido comúnmente considerado para sistemas VLP (por ejemplo, [9, 14, 24, 26, 27, 29, 34, 37]), no existen estudios sobre el diseño de estimadores en dos etapas para sistemas VLP síncronos en los que se pueda utilizar tanto la información de RSS como la de TOA. En el estimador en dos etapas propuesto para sistemas VLP síncronos, se obtienen las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros de TOA y RSS para cada uno de los N_L transmisores LED en la primera etapa, y la ubicación del receptor VLC se estima en la segunda etapa basándose en esos parámetros relacionados con la ubicación, es decir, las estimaciones de TOA y RSS.

En la primera etapa, se obtienen las estimaciones de máxima verosimilitud (ML) de los parámetros de TOA y RSS para cada transmisor LED. Para el i-ésimo transmisor LED, la señal recibida $r_i(t)$ se expresa como en la Ec. (93) y la función de log-verosimilitud correspondiente para $r_i(t)$ se denota por $k_i - \frac{1}{2\sigma^2}\int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} \left(r_i(t) - \alpha_i R_p\right)^2 dt$, donde k_i es una constante que no depende de α_i y τ_i (ver Ec. (96)). Luego,

las estimaciones de ML de los parámetros de TOA y RSS correspondientes al i-ésimo transmisor LED se obtienen de la siguiente manera:

$$(\hat{\tau}_i, \hat{\alpha}_i) = \underset{(\tau_i,\alpha_i)}{\arg\max}\, 2\alpha_i \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} r_i(t) s_i(t-\tau_i) dt - \alpha_i^2 R_p E_2^i \tag{112}$$

para $i = 1, \dots, N_L$. Dado que α_i es no negativo, la solución para $\hat{\tau}_i$ se obtiene al maximizar la expresión integral en la Ec. (112). Por lo tanto, la estimación de máxima verosimilitud $\hat{\tau}_i$ del parámetro de TOA $\hat{\tau}_i$ para el i-ésimo transmisor LED se calcula a partir de:

$$\hat{\tau}_i = \underset{\tau_i}{\arg\max} \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} r_i(t) s_i(t-\tau_i) dt \tag{113}$$

Luego, $\hat{\alpha}_i$ se puede expresar a partir de la Ec. (112) y (113) como:

$$\hat{\alpha}_i = \max_{\alpha_i} 2\alpha_i \tilde{C}_{rs}^i - \alpha_i^2 R_p E_2^i \tag{114}$$

donde:

$$\tilde{C}_{rs}^i \triangleq \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} r_i(t) s_i(t-\hat{\tau}_i) dt \tag{115}$$

El problema en la Ec. (114) conduce a la siguiente expresión en forma cerrada para la estimación de máxima verosimilitud (MLE) del parámetro RSS α_i correspondiente al i-ésimo transmisor LED:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\tilde{C}_{rs}^i}{R_p E_2^i} \tag{116}$$

En el segundo paso, el objetivo es estimar la ubicación del receptor VLC, $\boldsymbol{l}_r$, basándose en las estimaciones de TOA y RSS obtenidas en el primer paso; es decir, $\{\hat{\alpha}_i, \hat{\tau}_i\}_{i=1}^{N_L}$. Con ese fin, primero se presenta el siguiente lema para caracterizar las estadísticas de las estimaciones obtenidas en el primer paso.

Lema 1. Supongamos que $E_3^i = 0$ para $i = 1, \dots, N_L$. Entonces, a altas relaciones señal-ruido (SNR) (es decir, para $\alpha_i^2 R_p^2 E_2^i \gg \sigma^2$), la estimación de TOA en la Ec. (113) y la estimación de RSS en la Ec. (116) pueden aproximadamente modelarse como:

$$\hat{\tau}_i = \tau_i + \nu_i \tag{117}$$

$$\hat{\alpha}_i = \alpha_i + \varsigma_i \tag{118}$$

Para $i = 1, \dots, N_L$, donde ν_i y ς_i son variables aleatorias Gaussianas independientes con media cero y varianzas $\sigma^2/\left(R_p^2\alpha_i^2E_1^i\right)$ y $\sigma^2/\left(R_p^2E_2^i\right)$, respectivamente, y ν_i y ν_j $\left(\varsigma_i \text{ y } \varsigma_j\right)$ son independientes para $i \neq j$.

Prueba. Consideremos la estimación de τ_i y α_i basada en la señal recibida del i-ésimo transmisor LED, es decir, $r_i(t)$ en la Ec. (93). La función de log-verosimilitud para $r_i(t)$ está dada por:

$$\Lambda_i(\tau_i, \alpha_i) = k_i - \frac{1}{2\sigma^2}\int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} \Big(r_i(t) - \alpha_i R_p s_i(t-\tau_i)\Big)^2 dt \tag{119}$$

donde k_i es una constante que no depende de α_i y τ_i (revisar la Ec. (96)). La matriz de información de Fisher (FIM) para (τ_i, α_i) puede ser expresada basándose en la Ec. (98) de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}(\tau_i, \alpha_i) = \begin{bmatrix} E\left\{\left(\dfrac{\partial \Lambda_i(\tau_i,\alpha_i)}{\partial \tau_i}\right)^2\right\} & E\left\{\dfrac{\partial \Lambda_i(\tau_i,\alpha_i)}{\partial \tau_i}\dfrac{\partial \Lambda_i(\tau_i,\alpha_i)}{\partial \alpha_i}\right\} \\ E\left\{\dfrac{\partial \Lambda_i(\tau_i,\alpha_i)}{\partial \alpha_i}\dfrac{\partial \Lambda_i(\tau_i,\alpha_i)}{\partial \tau_i}\right\} & E\left\{\left(\dfrac{\partial \Lambda_i(\tau_i,\alpha_i)}{\partial \alpha_i}\right)^2\right\} \end{bmatrix} \tag{120}$$

los elementos de los cuales pueden calcularse a partir de la Ec. (119) como:

$$[\mathbf{J}(\tau_i, \alpha_i)]_{11} = \frac{\alpha_i^2 R_p^2 E_1^i}{\sigma^2} \tag{121}$$

$$[\mathbf{J}(\tau_i, \alpha_i)]_{22} = \frac{R_p^2 E_2^i}{\sigma^2} \tag{122}$$

$$[\mathbf{J}(\tau_i, \alpha_i)]_{12} = [\mathbf{J}(\tau_i, \alpha_i)]_{21} = \frac{-\alpha_i R_p^2 E_3^i}{\sigma^2} \tag{123}$$

Donde E_1^i, E_2^i y E_3^i están definidos en la Ec. (102), (103) y (104), respectivamente. Dado que $E_3^i = 0$ para $i = 1, \dots, N_L$ según lo declarado en el lema, el FIM en la Ec. (120) puede expresarse a partir de la Ec. (121)-(123) como:

$$J(\tau_i, \alpha_i) = \begin{bmatrix} \dfrac{R_p^2\alpha_i^2E_1^i}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R_p^2E_2^i}{\sigma^2} \end{bmatrix} \tag{124}$$

Como se estudió en [124, 126], las estimaciones de máxima verosimilitud para τ_i y α_i pueden aproximarse, en altas SNR (relaciones señal-ruido), mediante un vector aleatorio gaussiano, donde la media de cada componente es igual al valor verdadero del parámetro y la matriz de covarianza está dada por la inversa del FIM. Por lo tanto,

en altas SNR, la distribución conjunta de probabilidad de $\hat{\tau}_i$ en la Ec. (113) y $\hat{\alpha}_i$ en la Ec. (116) puede aproximarse aproximadamente como:

$$\begin{bmatrix}\hat{\tau}_i \\ \hat{\alpha}_i\end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}\tau_i \\ \alpha_i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{\sigma^2}{R_p^2 \alpha_i^2 E_1^i} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{R_p^2 E_2^i}\end{bmatrix}\right) \tag{125}$$

donde $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ denota la distribución gaussiana con vector de media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$. Por lo tanto, $\hat{\tau}_i$ y $\hat{\alpha}_i$ son variables aleatorias gaussianas independientes como se especifica en la Ec. (117) y (118) en el lema. Además, dado que el ruido $\eta_i(t)$ en la señal recibida, $r_i(t)$, es independiente para diferentes transmisores LED (ver la Ec. (93)), los componentes de ruido en las estimaciones de máxima verosimilitud $\hat{\tau}_i$ y $\hat{\alpha}_i$ también son independientes para diferentes transmisores. Por lo tanto, los componentes de ruido en la Ec. (117) y (118) son independientes según lo especificado en el lema.

El Lema 1 establece las propiedades de insesgadez y eficiencia asintóticas de las estimaciones de máxima verosimilitud $\hat{\tau}_i$ en la Ec. (113) y $\hat{\alpha}_i$ en la Ec. (116) [122], [126]. Basado en el Lema 1, se puede obtener el siguiente estimador para el segundo paso del estimador de dos etapas:

$$\hat{\boldsymbol{l}}_r^{\text{TS,syn}} = \arg\min_{\boldsymbol{l}_r} \sum_{i=1}^{N_L} \left(E_1^i \alpha_i^2 (\hat{\tau}_i - \tau_i)^2 + E_2^i (\hat{\alpha}_i - \alpha_i)^2\right) - \frac{2\sigma^2}{R_p^2} \sum_{i=1}^{N_L} \log \alpha_i \tag{126}$$

donde τ_i y α_i son funciones de $\boldsymbol{l}_r$ como se definen en la Ec. (94) (con $\Delta_i = 0$) y la Ec. (95), respectivamente, y log representa el logaritmo natural. El estimador en la Ec. (126) corresponde al estimador de máxima verosimilitud para $\boldsymbol{l}_r$ basado en las estimaciones de TOA y RSS en el primer paso cuando están distribuidas de manera gaussiana como se especifica en el Lema 1 (consulte el Apéndice 3.6.1 para la derivación). En otras palabras, en SNRs altos, $\hat{\boldsymbol{l}}_r^{\text{TS,syn}}$ en la Ec. (126) es aproximadamente el estimador de máxima verosimilitud para $\boldsymbol{l}_r$ basado en $\{\hat{\alpha}_i, \hat{\tau}_i\}_{i=1}^{N_L}$. Dado que el último término en la Ec. (126) suele ser más pequeño que los demás en SNRs altos, se puede proponer una versión más simple de la Ec. (126) de la siguiente manera:

$$\hat{\boldsymbol{l}}_r^{\text{TS,syn}} = \min_{\boldsymbol{l}_r} \sum_{i=1}^{N_L} \left(E_1^i \hat{\alpha}_i^2 (\hat{\tau}_i - \tau_i)^2 + E_2^i (\hat{\alpha}_i - \alpha_i)^2\right) \tag{127}$$

donde la estimación $\hat{\alpha}_1$ también se reemplaza con α_i en el primer término, teniendo en cuenta los altos SNRs. El estimador simplificado en la Ec. (127) corresponde a un estimador de mínimos cuadrados no lineales (NLS, por sus siglas en inglés).

En resumen, el enfoque de posicionamiento propuesto de dos pasos primero calcula las estimaciones de TOA y RSS a través de la Ec. (113) y (116) para cada transmisor LED, y luego utiliza esas estimaciones para determinar la posición del receptor VLC a través de la Ec. (127). En la sección 3.7, se proporcionan comparaciones entre los enfoques de posicionamiento de dos pasos y directos a través de simulaciones. Para presentar una comparación teórica bajo las condiciones del Lema 1, la siguiente proposición especifica el CRLB para estimar la ubicación del receptor VLC, $\boldsymbol{l}_r$, basado en las estimaciones de TOA y RSS $\{\hat{\alpha}_i, \hat{\tau}_i\}_{i=1}^{N_L}$ obtenidas en el primer paso.

Proposición 2. Supongamos que las condiciones del Lema 1 se cumplen. Entonces, el límite fundamental de la varianza (CRLB) sobre el error cuadrático medio (MSE) de cualquier estimador imparcial $\hat{\boldsymbol{l}}_r$ para la ubicación del receptor VLC $\boldsymbol{l}_r$, basado en las estimaciones de TOA y RSS $\{\hat{\alpha}_i, \hat{\tau}_i\}_{i=1}^{N_L}$ obtenidas de la Ec. (113) y (116), se expresa como:

$$\mathbb{E}\left\{\left\|\hat{\boldsymbol{l}}_r - \boldsymbol{l}_r\right\|^2\right\} \geq \text{trace}\{\mathbf{J}_{\text{TS,syn}}^{-1}\} \tag{128}$$

Donde $\mathbf{J}_{\text{TS,syn}}$ es una matriz 3×3 con los siguientes elementos:

$$\left[\mathbf{J}_{\text{TS,syn}}\right]_{k_1,k_2} = \frac{R_p^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N_L}\left(E_2^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_2}} + E_1^i \alpha_i^2 \frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_2}}\right) \tag{129}$$

para $k_1, k_2 \in \{1,2,3\}$, con $E_1^i, E_2^i, \partial\tau_i/\partial l_{r,k}$ y $\partial\alpha_i/\partial l_{r,k}$ definidos como en la Ec. (102), (103), (105) y (106), respectivamente.

Prueba: La derivada de la función de log-verosimilitud en la Ec. (157) con respecto al parámetro k-ésimo del vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{l}_r$ se calcula como sigue:

$$\frac{\partial \widetilde{\Lambda}(\boldsymbol{l}_r)}{\partial l_{r,k}} = \sum_{i=1}^{N_L}\left(\frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k}} + \frac{(\hat{\alpha}_i - \alpha_i)R_p^2 E_2^i}{\sigma^2}\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k}} + \frac{(\hat{\tau}_i - \tau_i)\alpha_i^2 R_p^2 E_1^i}{\sigma^2}\frac{\partial \hat{\tau}_i}{\partial l_{r,k}} - \frac{(\hat{\tau}_i - \tau_i)^2 \alpha_i R_p^2 E_1^i}{\sigma^2}\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k}}\right) \tag{130}$$

para $k_1, k_2 \in \{1,2,3\}$. Utilizando la fórmula en la Ec. (98) con la expresión en la Ec. (130), la entrada (k_1, k_2) de la matriz de información de Fisher (FIM) se puede obtener después de algunas manipulaciones como sigue:

$$\left[\mathbf{J}_{\mathrm{TS,syn}}\right]_{k_1,k_2} = \frac{R_p^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N_L}\left(\left(1+\frac{2\sigma^2}{\alpha_i^2 R_p^2 E_2^i}\right)E_2^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial}{\partial} + E_1^i \alpha_i^2 \frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \tau_i}{\partial l_{r,k_2}}\right) \tag{131}$$

para $k_1, k_2 \in \{1,2,3\}$. Invocando la suposición de altas SNRs en el Lema 1, donde $\left(\alpha_i^2 R_p^2 E_2^i \gg \sigma^2\right)$, la matriz de información de Fisher (FIM) para la ubicación desconocida del receptor $\boldsymbol{l}_r$ se puede obtener como en la Ec. (129). La expresión del CLRB en la Proposición 2 presenta una importante guía para la comparación asintótica de los enfoques de posicionamiento directo y de dos pasos en sistemas VLP síncronos, como se detalla en la siguiente observación.

Observación 1. Se observa que la expresión en la Ec. (110), que se obtiene para el posicionamiento directo bajo la suposición de $E_3^i = 0$, es igual a la expresión en la Ec. (129), que es para el posicionamiento de dos pasos bajo las suposiciones de $E_3^i = 0$ y $\alpha_i^2 R_p^2 E_2^i \gg \sigma^2$. En otras palabras, haciendo referencia al modelo de señal en la Ec. (93), el rendimiento de los algoritmos de posicionamiento directo y de dos pasos converge entre sí a altas SNRs. Por lo tanto, se puede concluir que los beneficios del posicionamiento directo son más prominentes en el régimen de baja SNR, lo que está en línea con los resultados obtenidos para sistemas RF [38, 43]. Esta conclusión es intuitiva ya que la consistencia entre las estimaciones de TOA y RSS (mediciones) aumenta a medida que aumenta la SNR. En el régimen de baja SNR, la estimación de TOA en la Ec. (113) puede estar lejos del verdadero retardo de tiempo, lo que posiblemente lleve a una falta de coincidencia entre la estimación de RSS correspondiente en la Ec. (116) y la información de posición inferida de esa información de TOA. En tales casos, el enfoque de posicionamiento directo es capaz de estimar la ubicación desconocida con mayor precisión que el enfoque de dos pasos al utilizar señales completas y, por lo tanto, producir estimaciones de ubicación consistentes.

3.5.4. Análisis de complejidad. Se considera un escenario de localización en interiores donde el receptor VLC se mueve dentro de un cierto volumen e intenta estimar su posición. Luego, los análisis de complejidad se pueden realizar implementando el estimador directo de ML en la Ec. (111) y el estimador de ML de dos pasos en la Ec. (127) sobre un espacio de búsqueda finito correspondiente a ese volumen para la ubicación del receptor VLC. Dado que las funciones objetivo en la Ec. (111) y (127) no son convexas con respecto a la ubicación del receptor VLC, $\boldsymbol{l}_r$, se considera el método de búsqueda exhaustiva para identificar el óptimo global. Para los cálculos de complejidad, se asume que las dimensiones de rango (o, equivalente, tiempo) se muestrean con un intervalo de muestreo del orden de Δd. Con ese fin, consideramos

una cuadrícula uniforme tridimensional $\mathcal{U}$ que consiste en $\mathcal{O}(1/\Delta d^3)$ ubicaciones posibles en el volumen considerado para la ubicación del receptor VLC. Basándonos en $\mathcal{U}$, los análisis de complejidad para los algoritmos de posicionamiento directo y de dos pasos se proporcionan de la siguiente manera.

A. Posicionamiento directo. Para el cálculo de la función objetivo en la Ec. (111) en cada ubicación de búsqueda $l_r \in \mathcal{U}$, es necesario calcular α_i mediante la Ec. (95), τ_i mediante la Ec. (94) y la salida del correlador $\int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} r_i(t)\, s_i(t-\tau_i)$ utilizando el valor τ_i calculado. En primer lugar, el cálculo de α_i en la Ec. (95) y τ_i en la Ec. (94) tiene una complejidad de $\mathcal{O}(1)$ ya que estas operaciones toman un tiempo constante para un valor dado de $\boldsymbol{l}_r$. En segundo lugar, evaluar la integral $\int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} r_i(t) s_i(t-\tau_i)$ requiere $\mathcal{O}(1/\Delta d)$ operaciones. Teniendo en cuenta todo el espacio de búsqueda $\mathcal{U}$ (que contiene $\mathcal{O}(1/\Delta d^3)$ puntos) y todos los N_L LED, la complejidad general del método de posicionamiento directo es:

$$\mathcal{O}(N_L \times 1/\Delta d^4) \tag{132}$$

B. Posicionamiento en dos pasos. En el primer paso del estimador de dos etapas en la Ec. (127), se deben calcular $\hat{\tau}_i$ en la Ec. (113) y $\hat{\alpha}_i$ en la Ec. (116). Suponiendo que las señales continuas se muestrean con un número de muestras del orden de $\mathcal{O}(1/\Delta d)$, al igual que en el posicionamiento directo, el cálculo de la expresión integral en la Ec. (113) requiere $\mathcal{O}(1/\Delta d)$ operaciones para un valor dado de τ_i. Dado que τ_i se encuentra en el intervalo finito $[T_{1,i}, T_{2,i} - T_{s,i}]$, se puede suponer que existen $\mathcal{O}(1/\Delta d)$ valores diferentes de τ_i. Por lo tanto, la complejidad total de la Ec. (113) se convierte en $\mathcal{O}(1/\Delta d^2)$. Por otro lado, el cálculo de αˆi a través de la Ec. (116) tiene una complejidad computacional de $\mathcal{O}(1)$ una vez que se obtienen los resultados de la Ec. (113) y (115). En el segundo paso, se deben evaluar τ_i y α_i en la Ec. (127) para cada $\boldsymbol{l}_r \in \mathcal{U}$, cuyo tamaño está en el orden de $\mathcal{O}(1/\Delta d^3)$. Por lo tanto, la complejidad computacional del posicionamiento de dos etapas se expresa como

$$\underbrace{\mathcal{O}(N_L \times 1/\Delta d^2)}_{primer\ paso} + \underbrace{\mathcal{O}(N_L \times 1/\Delta d^3)}_{segundo\ paso} = \mathcal{O}(N_L \times 1/\Delta d^3) \tag{133}$$

donde domina el término correspondiente a los cálculos del segundo paso a medida que el intervalo de muestreo Δd se acerca a cero.

Las propuestas de posicionamiento directo y de dos etapas pueden compararse en función de la complejidad computacional utilizando las expresiones en la Ec. (132) y (133). Por ejemplo, si Δd es lo suficientemente pequeño, es decir, las dimensiones

de rango/tiempo se muestrean lo suficientemente rápido como para lograr una alta resolución, entonces el estimador de posición directa tendrá una complejidad más alta que su contraparte de dos etapas. Además, al comparar la Ec. (132) y (133), se observa que la evaluación de la integral se realiza en cada ubicación de búsqueda $\boldsymbol{l}_r \in \mathcal{U}$ en el posicionamiento directo, mientras que solo aparece en los cálculos de la primera etapa en el posicionamiento de dos etapas. Esto alivia la carga en los cálculos de la segunda etapa en el enfoque de dos etapas, lo que lo hace computacionalmente menos exigente que el enfoque directo. Por lo tanto, la principal carga computacional del posicionamiento directo consiste en evaluar la salida del correlador $\int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} r_i(t)s_i(t-\tau_i)$ en cada ubicación de búsqueda $\boldsymbol{l}_r$.

3.6. Posicionamiento en Sistemas Asíncronos.

En el escenario asincrónico, el receptor VLC no está sincronizado con los transmisores LED, es decir, Δ_i en la Ec. (94) es un parámetro determinista desconocido para cada $i \in \{1, \dots, N_L\}$. En esta sección, se deriva la CRLB para sistemas asincrónicos de VLP, y se investiga la estimación de posición directa y su relación con la estimación de posición de dos etapas.

3.6.1. CRLB. En un sistema asincrónico de VLP, los parámetros desconocidos incluyen los TOAs de las señales recibidas provenientes de los transmisores LED, además de la ubicación del receptor VLC. Por lo tanto, el vector de parámetros desconocidos en la Ec. (96) para el caso asincrónico puede expresarse como:

$$\varphi = \left[l_{r,1}\ l_{r,2}\ l_{r,3}\ \tau_1 \dots \tau_{N_L}\right]^T \tag{134}$$

Entonces, el CRLB para estimar $\boldsymbol{l}_r$ basado en $r_1(t), \dots, r_{N_L}(t)$ en la Ec. (93) se establece en la siguiente proposición.

Proposición 3. Para sistemas asincrónicos de VLP, la CRLB sobre el error cuadrático medio (MSE) de cualquier estimador imparcial $\hat{\boldsymbol{l}}_r$ para la ubicación del receptor VLC está dada por:

$$\mathbb{E}\left\{\left\|\hat{\boldsymbol{l}}_r - \boldsymbol{l}_r\right\|^2\right\} \geq \text{trace}\{\mathbf{J}_{\text{asy}}^{-1}\} \tag{135}$$

donde $\mathbf{J}_{\text{asy}}$ denota una matriz de 3×3 con los siguientes elementos:

$$\left[\mathbf{J}_{\text{asy}}\right]_{k_1,k_2} = \frac{R_p^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N_L}\left(E_2^i - \frac{\left(E_3^i\right)^2}{E_1^i}\right)\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}}\frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_2}} \tag{136}$$

para $k_1, k_2 \in \{1,2,3\}, con\ E_1^i, E_2^i, E_3^i$ y $\partial\alpha_i/\partial l_{r,k}$ definidos como en la Ec. (102), (103), (104) y (106), respectivamente.

Prueba: Consideremos la función de log-verosimilitud en la Ec. (96) para el vector de parámetros desconocidos en la Ec. (134). Luego, a partir de la Ec. (98), la matriz de información de Fisher (FIM) se puede obtener después de algunas manipulaciones como sigue:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J_A} & \mathbf{J_B} \\ \mathbf{J_B}^T & \mathbf{J_D} \end{bmatrix} \tag{137}$$

donde $\mathbf{J_A}$ es una matriz 3×3 con elementos:

$$\left[\mathbf{J_A}\right]_{k_1,k_2} = \frac{R_p^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_L} E_2^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_2}} \tag{138}$$

donde $k_1, k_2 \in \{1,2,3\}$, $\mathbf{J_B}$ es una matriz $3 \times N_L$ con elementos:

$$\left[\mathbf{J_B}\right]_{k,i} = -\frac{R_p^2}{\sigma^2} E_3^i \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k}} \tag{139}$$

donde $k \in \{1,2,3\}$ y $i \in \{1,\dots,N_L\}$ y $\mathbf{J_D}$ es una matriz $N_L \times N_L$ con elementos:

$$\left[\mathbf{J_D}\right]_{i_1,i_2} = \begin{cases} \frac{R_p^2}{\alpha^2} \alpha_{i_1}^2 E_1^{i_1}, \text{si } i_1 = i_2 \\ 0, \quad \text{si } i_1 \neq i_2 \end{cases} \tag{140}$$

para $i_1, i_2 \in \{1,\dots,N_L\}$. En la Ec. (138)–(140), E_1^i, E_2^i, E_3^i y $\partial \alpha_i / \partial l_{r,k}$ están definidos como en la Ec. (102), (103), (104) y (106), respectivamente.

El límite teórico sobre la precisión de localización de la posición $\boldsymbol{l}_r$ del receptor VLC puede expresarse, en función de la Ec. (97), como:

$$\mathbb{E}\left\{\left\|\hat{\boldsymbol{l}}_r - \boldsymbol{l}_r\right\|^2\right\} \geq \text{trace}\{[\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\varphi})]_{3\times 3}\} \tag{141}$$

donde $\hat{\boldsymbol{l}}_r$ es cualquier estimador insesgado para $\boldsymbol{l}_r$. A partir de la Ec. (137), se puede expresar $[\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\varphi})]_{3\times 3}$ como:

$$[\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\varphi})]_{3\times 3} = \left(\mathbf{J_A} - \mathbf{J_B}\mathbf{J_D}^{-1}\mathbf{J_B}\right)^{-1} \tag{142}$$

Basándose en la Ec. (138)-(140), se puede calcular $\mathbf{J_A} - \mathbf{J_B}\mathbf{J_D}^{-1}\mathbf{J_B}$ después de algunas manipulaciones como:

$$\left[\mathbf{J_A} - \mathbf{J_B}\mathbf{J_D}^{-1}\mathbf{J_B}\right]_{k_1,k_2} = \frac{R_p^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_L} \left(E_2^i - \frac{\left(E_3^i\right)^2}{E_1^i}\right) \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_1}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_{r,k_2}} \tag{143}$$

Por lo tanto, La Ec. (141)-(143) conducen a las expresiones en la Ec. (135) y (136) en la proposición.

Se observa que la expresión de CRLB en la Proposición 3 utiliza información relacionada con la posición en los factores de atenuación del canal (RSS) para estimar la ubicación del receptor VLC en el caso asíncrono (ver la Ec. (136)). Por otro lado, en el caso síncrono se dispone de información tanto de los factores de atenuación del canal (RSS) como de los parámetros de retardo de tiempo (TOA), como se puede observar en la Proposición 1. Además, la expresión de CRLB presentada en la Proposición 3 se ha obtenido por primera vez en la literatura; por lo tanto, proporciona una contribución teórica a la localización en sistemas VLP asíncronos. Dado que la expresión en la Ec. (136) se obtiene en función de las señales de observación completas, $r_i(t)$ en la Ec. (93), difiere de la expresión de CRLB en [29], que se deriva para sistemas VLP asíncronos basados en las mediciones RSS sin utilizar directamente las señales recibidas [29]. Por otro lado, cuando $E_3^i = 0$ para $i = 1$, lo cual es válido para muchos pulsos prácticos, la expresión de FIM en la Ec. (136) es equivalente a la de [29]. Por lo tanto, el CRLB proporcionado por la Proposición 3 también abarca el caso más general de $E_3^i \neq 0$ en comparación con el CRLB en [29], que constituye un caso especial de la Ec. (136).

Observación 2. De la Proposición 1 y la Proposición 3, se observa que si $E_3^i = 0$ y $\alpha_i^2 E_1^i \ll E_2^i$ para $i = 1, \dots, N_L$, las expresiones de CRLB en los casos síncrono y asíncrono convergen entre sí. Esto corresponde a escenarios en los que la información relacionada con la posición en los parámetros de retardo de tiempo (TOA) es insignificante en comparación con la de los factores de atenuación del canal (parámetros RSS). Por lo tanto, el sincronismo no proporciona beneficios significativos en tales escenarios. Dado que E_1^i/E_2^i se puede expresar mediante la relación de Parseval como $4\pi^2\beta_i^2$, donde β_i es el ancho de banda efectivo de $s_i(t)$, se puede concluir que los casos síncrono y asíncrono conducen a CRLBs similares cuando las señales transmitidas tienen anchos de banda efectivos pequeños. Este es un resultado intuitivo porque la información del TOA se vuelve menos precisa a medida que disminuye el ancho de banda efectivo [33].

3.6.2. Estimación directa y en dos pasos. La estimación directa de posición implica la estimación de lr, la ubicación del receptor VLC, directamente a partir de las señales recibidas en la Ec. (93). A partir de la Ec. (96), el estimador ML para la posición directa en el caso asíncrono se puede obtener de la siguiente manera:

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{ML} = \arg\max_{\boldsymbol{\varphi}} \sum_{i=1}^{N_L} \left(\alpha_i \int_{T_{1,i}}^{T_{2,i}} r_i(t) s_i(t-\tau_i) dt - \frac{R_p}{2} \alpha_i^2 E_2^i \right) \tag{144}$$

Donde $\boldsymbol{\varphi}$ está definido por (134), α_i está relacionado con l_r como en la Ec. (96), y E_i se da por la Ec. (103). Dado que los α_i son no negativos y las expresiones integrales dependen solo de los τ_i's (Ec. (144)), las estimaciones ML para los τ_i's se pueden calcular como en la Ec. (113). Luego, la estimación ML para $\boldsymbol{l}_r$ se obtiene a partir de la Ec. (144) como:

$$\hat{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{DP,asy}} = \arg\max_{l_r} \sum_{i=1}^{N_L} \left(\alpha_i \tilde{C}_{r_s}^i - 0.5 R_p \alpha_i^2 E_2^i\right) \tag{145}$$

Donde $\tilde{C}_{r_s}^i$ está definido como en la Ec. (115).

Para la estimación de posición en dos etapas en el caso asíncrono, los parámetros de RSS relacionados con N_L transmisores LED se estiman en la primera etapa y la ubicación del receptor VLC se estima en función de esas estimaciones de RSS en la segunda etapa. Debido a la asincronía entre los transmisores LED y el receptor VLC, los parámetros de TOA no pueden relacionarse con la ubicación del receptor VLC (ver Ec. (94)); por lo tanto, no se pueden utilizar para el posicionamiento en este caso (ver sección 3.5.3).

En la primera etapa del estimador de dos etapas, el estimador ML para el parámetro de RSS, αi, se calcula en función de $r_i(t)$ para $i = 1, \dots, N_L$. De manera similar a lo que se hizo en el caso síncrono (ver sección 3.5.3), la estimación ML $\hat{\alpha}_i$ de α_i se expresa como:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\tilde{C}_{r_s}^i}{R_p E_2^i} \tag{146}$$

para $i = 1, \dots, NL$, donde $\tilde{C}_{r_s}^i$ es como en la Ec. (115) y E_2^i está dado por la Ec. (103).

El segundo paso utiliza las estimaciones de RSS en la Ec. (146) para $i = 1, \dots, N_L$ para estimar la ubicación del receptor VLC basándose en el siguiente estimador NLS:

$$\hat{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{TS,asy}} = \arg\min_{\boldsymbol{l}_r} \sum_{i=1}^{N_L} w_i (\hat{\alpha}_i - \alpha_i)^2 \tag{147}$$

donde α_i está definido como en la Ec. (95) y la siguiente expresión es propuesta para los coeficientes de ponderación:

$$w_i = \frac{E_1^i E_2^i - \left(E_3^i\right)^2}{E_1^i} \tag{148}$$

Para $i = 1, \dots, N_L$, donde E_1^i y E_2^i son como se definen en la Ec. (102) y (104), respectivamente. Como se ilustra en el Apéndice 3.6.2, el coeficiente de ponderación

propuesto en la Ec. (148) es inversamente proporcional al CRLB para estimar α_i a partir de $r_i(t)$. Por lo tanto, las estimaciones de RSS con mayor precisión (es decir, CRLBs más bajos) reciben mayores pesos en el estimador NLS en la Ec. (147).

En la siguiente proposición, se muestra que el estimador de posición directa en la Ec. (145) es equivalente al estimador de dos pasos especificado por las Ec. (146)-(148) bajo ciertas condiciones.

Proposición 4. Considere un sistema VLP asincrónico con $E_3^i = 0$ para $i = 1, \dots, N_L$. Entonces, el estimador directo de posición en la Ec. (145) es equivalente al estimador de posición de dos pasos en la Ec. (146)-(148).

Demostración: Cuando $E_3^i = 0$, el coeficiente de ponderación en la Ec. (148) se reduce a:

$$w_i = E_2^i \tag{149}$$

Para $i = 1, \dots, N_L$. Insertando la Ec. (146) y (149) en (147) se obtiene lo siguiente:

$$\hat{l}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{TS,asy}} = \arg\min_{l_r} \sum_{i=1}^{N_L} E_2^i \left(\frac{\tilde{C}_{rs}^i}{R_p E_2^i} - \alpha_i \right)^2 \tag{150}$$

Después de algunas manipulaciones, el estimador en la Ec. (150) puede expresarse como:

$$\hat{l}_r^{\mathrm{TS,asy}} = \arg\min_{l_r} \sum_{i=1}^{N_L} \left(-2\alpha_i \tilde{C}_{rs}^i + \alpha_i^2 R_p E_2^i \right) \tag{151}$$

lo cual es equivalente al estimador de posición directo en la Ec. (145).

La Proposición 4 implica que el estimador de posición de dos pasos es óptimo en el sentido de máxima verosimilitud para sistemas VLP asíncronos; es decir, el posicionamiento directo (basado en estimación de máxima verosimilitud) es equivalente al posicionamiento de dos pasos cuando $E_3^i = 0$ para $i = 1, \dots, N_L$. Dado que $s_i(0) = s_i(T_{s,i})$ para muchas pulsaciones prácticas, $E_3^i = 0$ se encuentra en la práctica (ver Ec. (104)); por lo tanto, el estimador de dos pasos puede utilizarse en sistemas reales como el enfoque óptimo en el sentido de máxima verosimilitud.

Observación 3. Como se demostró en la Proposición 4, si $E_3^i = 0$ para $i = 1, \dots, N_L$, el enfoque de posicionamiento directo es equivalente al enfoque de dos pasos para el escenario asíncrono, mientras que la Observación 1 establece que los dos enfoques son solo asintóticamente equivalentes para el escenario síncrono. La intuición detrás de estos resultados es que la medición de la información de RSS se realiza en el pico

de la salida del correlador durante el intervalo de observación, independientemente del verdadero retardo de tiempo de la señal recibida. Por lo tanto, el posicionamiento directo se reduce al posicionamiento de dos pasos para el caso asíncrono. Por otro lado, cuando la información TOA correspondiente a la ubicación del pico del correlador se incorpora al proceso de estimación en el caso síncrono, el enfoque de posicionamiento directo puede identificar una ubicación más precisa que tenga en cuenta la señal observada, lo que también se implica en la Observación 1.

3.6.3. Análisis de complejidad. En esta parte, se realiza el análisis de complejidad para los estimadores de posición de ML propuestos en la sección 3.6.2. Específicamente, se investiga la complejidad computacional del estimador directo en la Ec. (145) como en la sección 3.5.4A. Primero, $\tilde{C}_{rs}^{i}$ puede ser calculado a través de la Ec. (115) y (113) usando $\mathcal{O}(1/\Delta d^2)$ operaciones. Luego, para cada $l_r \in \mathcal{U}$ e $i \in \{1, \dots, N_L\}$, el sumando en la Ec. (145) requiere $\mathcal{O}(1)$ operaciones. Por lo tanto, la complejidad general del estimador de ML en sistemas VLP asíncronos se obtiene como:

$$\mathcal{O}(N_L \times 1/\Delta d^2) + \mathcal{O}(N_L \times 1/\Delta d^3) = \mathcal{O}(N_L \times 1/\Delta d^3) \tag{152}$$

Se desprende de las Ec. (132), (133) y (152) que el estimador asíncrono tiene el mismo orden de complejidad que el estimador síncrono TS y una complejidad menor que el estimador síncrono DP.

3.7. Resultados numéricos.

En esta sección, se presentan resultados numéricos para corroborar las derivaciones teóricas en las secciones anteriores. Al igual que en [23], se toma la sensibilidad del fotodetector como $R_p = 0.4\ \mathrm{mA/mW}$ y el nivel de densidad espectral del ruido se establece en $\sigma^2 = 1.336 \times 10^{-22}\ \mathrm{W/Hz}$. Además, se toma el orden lambertiano como $m = 1$ y el área S del fotodetector en el receptor VLC es igual a $1\ \mathrm{cm}^2$. La señal transmitida $s(t)$ en la Ec. (93) se modela como [23]:

$$s(t) = A(1 - \cos(2\pi t/T_s))(1 + \cos(2\pi f_c t))\mathbb{I}_{t\in[0,T_s]} \tag{153}$$

donde f_c denota la frecuencia central, A corresponde a la potencia óptica promedio emitida, es decir, la potencia óptica de la fuente, e $\mathbb{I}_{t\in[0,T_s]}$ representa una función indicadora que es igual a 1 si $t \in [0, T_s]$ y cero en caso contrario.

Consideramos una habitación con un ancho, profundidad y altura de [885] m, respectivamente, donde hay 4 transmisores LED ($N_L = 4$) instalados en el techo en las posiciones $l_t^1 = [2\ 2\ 5]^2$ m, $l_t^2 = [6\ 2\ 5]^T$ m, $l_t^3 = [2\ 6\ 5]^T$ m y $l_t^4 = [4]\ [6\ 6\ 5]^T$m, como se muestra en la figura N°16. Los vectores de orientación de los LED son los siguientes:

$$n_t^i = [\sin\theta_i \cos\phi_i \sin\theta_i \sin\phi_i \cos\theta_i]^T \quad (154)$$

para $i = 1, \dots, NL$, donde θ_i y ϕ_i denotan los ángulos polar y azimutal, respectivamente. En la configuración de la figura N°16, los ángulos polar y azimutal se toman como $(\theta_1, \phi_1) = (150°, 45°), (\theta_2, \phi_2) = (150°, 135°), (\theta_3, \phi_3) = (150°, -45°)$ y $(\theta_4, \phi_4) = (150°, -135°)$. El receptor VLC se encuentra ubicado en $l_r = [4\ 4\ 1]^T$ m y mira hacia arriba, es decir, el vector de orientación está dado por $\boldsymbol{n}_r = [0\ 0\ 1]^T$.

En las siguientes subsecciones, se evalúan los límites fundamentales de la CRLB y el rendimiento de los estimadores de posición directa (DP) y los estimadores de dos pasos (TS) tanto para sistemas VLP síncronos como asíncronos. Los límites fundamentales de la CRLB se calculan en base a la Proposición 1 y la Proposición 3, y los estimadores de DP se implementan mediante las Ec. (111) y (145) para los casos síncronos y asíncronos, respectivamente. Además, el estimador de dos pasos (TS) en el escenario síncrono se obtiene a través de las Ec. (113), (116) y (127). Además, se implementa el estimador de error medio absoluto mínimo (MMAE) propuesto en [13] para comparar los estimadores propuestos con los actuales de última generación.

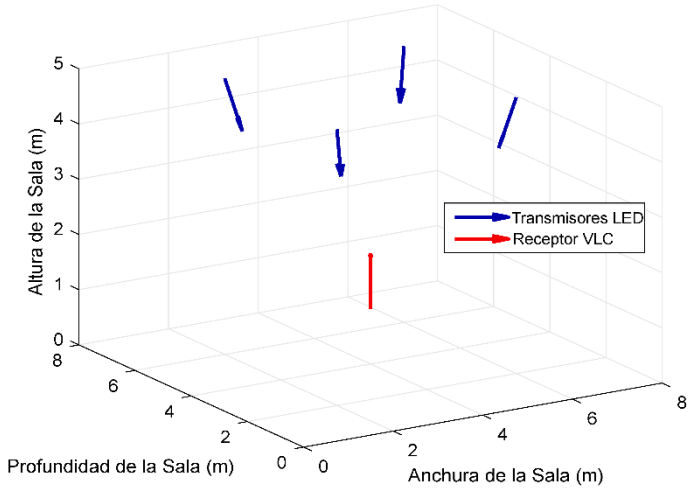


Figura N°16: Configuración del sistema VLP en las simulaciones, donde las reflexiones en las paredes se omiten al asumir un escenario de línea de visión directa (LOS, por sus siglas en inglés).
Fuente: Elaboración propia.

3.7.1. Límites teóricos de precisión en toda la habitación. Para observar el rendimiento de localización en toda la habitación, se calculan los límites teóricos de precisión (CRLB) para los sistemas VLP síncrono y asíncrono a medida que el receptor VLC se desplaza dentro de la habitación, y los resultados se presentan en los gráficos de contorno de la figura N°17 y figura N°18, respectivamente.

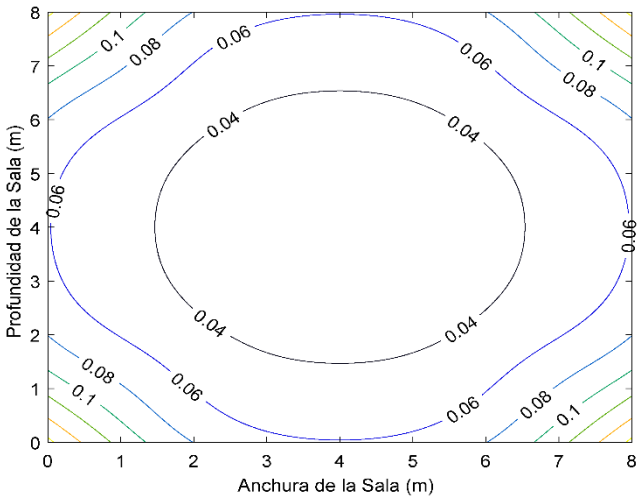


Figura N°17: El límite teórico de precisión (CRLB) en metros para un sistema VLP síncrono a medida que el receptor VLC se desplaza dentro de la habitación, con $T_s = 0.1\ ms, f_c = 100$ MHz y $A = 100$ mW, se muestra en el gráfico de contorno de la figura. Fuente: Elaboración propia.

Se obtuvieron los límites teóricos de precisión (CRLB) para la estimación de la posición de un receptor VLC con una altura fija $l_{r,3} = 1$ m, que se mueve a lo largo del plano $x - y$ sobre la habitación. Como se observa en la figura N°17 y figura N°18, el rendimiento de localización disminuye a medida que el receptor se aleja del centro de la habitación, lo cual es un resultado esperado ya que ese movimiento conlleva un aumento en la distancia, el ángulo de incidencia y el ángulo de irradiación entre el receptor VLC y los transmisores LED, lo que reduce la intensidad de la señal, como lo implica la fórmula de Lambert en la Ec. (95). Además, el nivel de aumento en el CRLB desde el centro hacia las esquinas es mucho mayor en el caso asíncrono que en el caso síncrono, ya que la información de TOA puede ser utilizada de manera efectiva para facilitar el proceso de localización en las esquinas de la habitación, donde la información de RSS se vuelve menos útil. Además, los CRLBs son significativamente más bajos en el caso síncrono que en el caso asíncrono debido a que la frecuencia portadora es bastante alta, lo cual concuerda con la Observación 2.

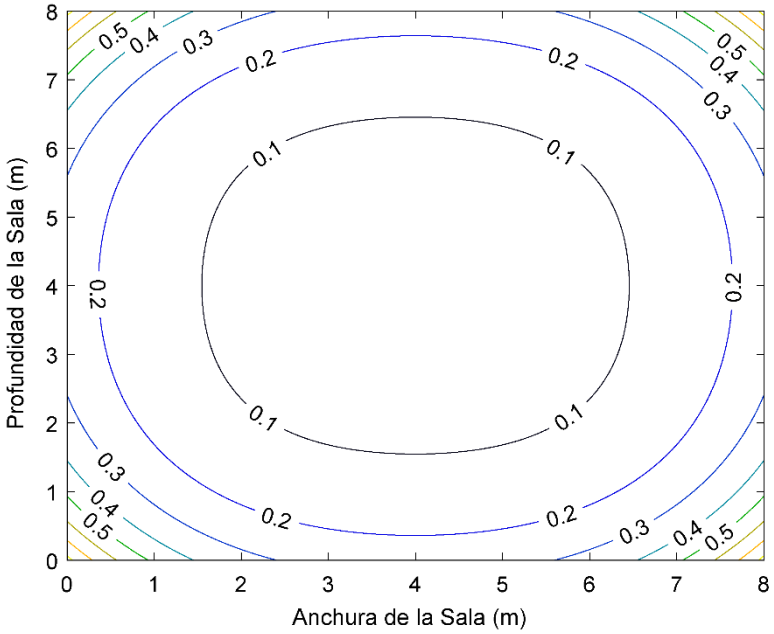


Figura N°18: CRLB (en metros) para un sistema VLP sincrónico a medida que el receptor VLC se mueve dentro de la habitación, donde $T_s = 0.1$ ms, $f_c = 100$ MHz y $A = 100$ mW. Fuente: Elaboración propia.

3.7.2. Rendimiento de los estimadores directos y de dos pasos con respecto a la potencia óptica. En esta subsección, se representan en las figuras N°19 y N°20 los errores cuadráticos medios (RMSE) correspondientes a los estimadores DP y TS propuestos, el estimador MMAE en [13] y los CRLB con respecto a la potencia óptica de la fuente, A, para $f_c = 100$ MHz y $f_c = 10$ MHz, respectivamente. En primer lugar, se observa que el enfoque DP puede proporcionar mejoras significativas en el rendimiento en comparación con el enfoque TS en escenarios síncronos, especialmente en la región de baja a media relación señal-ruido (aproximadamente 4.5 m de mejora para $A = 4.64$ W y $fc = 100$ MHz). También se puede inferir de las figuras que la utilización de la información del retardo de tiempo en el estimador DP síncrono conlleva ganancias de rendimiento considerablemente mayores en comparación con su contraparte asíncrona (0.26 m de mejora para $A = 215$ mW y $f_c = 100$ MHz).

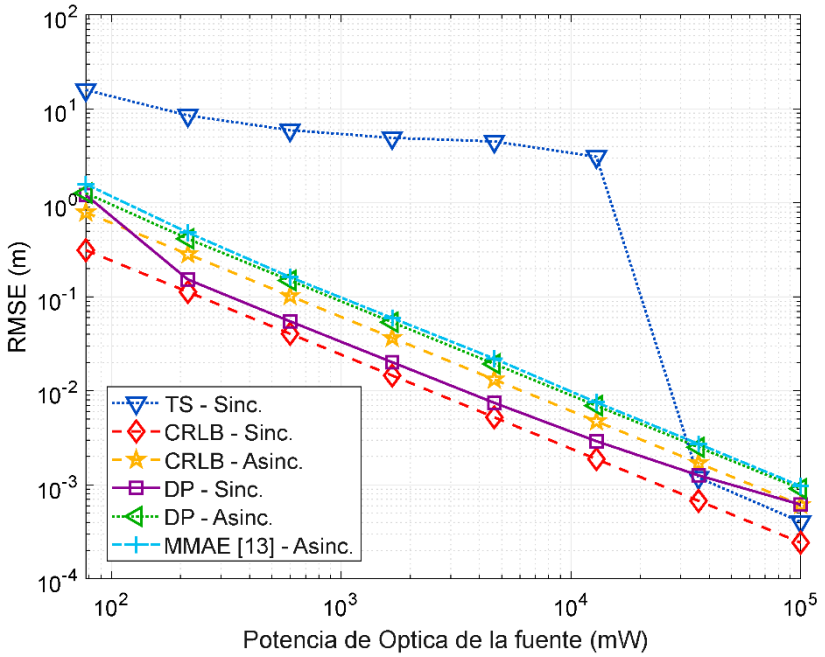


Figura N°19: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos en función de la potencia óptica de la fuente, donde $T_s = 1\ \mu s$ y $f_c = 100\ MHz$.
Fuente: Elaboración propia.

Es importante destacar que el aumento en el rendimiento debido a la sincronización se vuelve mayor a medida que aumenta la frecuencia central, en cumplimiento con la Observación 2. A continuación, se observa que el rendimiento del estimador DP en el caso síncrono converge al del estimador TS en valores altos de SNR (en potencias ópticas de fuente elevadas) ya que los beneficios del posicionamiento directo se vuelven insignificantes a medida que aumenta el SNR, lo cual cumple con la Proposición 2 y la Observación 1. Por lo tanto, se deduce que el enfoque de posicionamiento de dos pasos en los sistemas VLP síncronos es más adecuado para escenarios de alto SNR, donde el posicionamiento directo y el de dos pasos logran un rendimiento de localización similar con este último método que requiere menos recursos computacionales, como se exploró en la sección 3.5.4. Además, el enfoque DP propuesto supera al algoritmo en [13] en todos los niveles de SNR y frecuencias centrales.

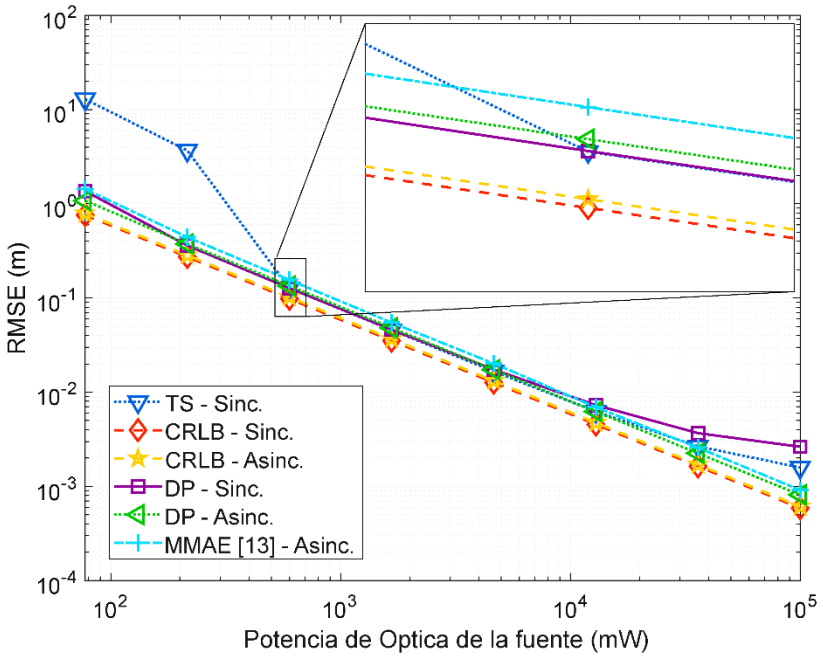


Figura N°20: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos en función de la potencia óptica de la fuente, donde $T_s = 1\ \mu s$ y $f_c = 10$ MHz.
Fuente: Elaboración propia.

3.7.3. Rendimiento de los estimadores directo y de dos pasos en función de las coordenadas del receptor VLC. En esta subsección, se investigan los límites teóricos y el rendimiento de los estimadores a lo largo de una trayectoria horizontal dentro de la habitación. En la figura N°21 y N°22, se ilustran los CRLBs y los RMSEs de los estimadores DP y TS y el algoritmo en [13] para $f_c = 100$ MHz y $f_c = 10\ MHz$, respectivamente, mientras el receptor VLC se mueve en una línea recta desde [4 0 1] m hasta [4 8 1] m dentro de la habitación. Se observa que el rendimiento de los estimadores tiende a disminuir a medida que el receptor se mueve hacia el borde de la habitación, como indica la fórmula de Lambert en la Ec. (95). Además, el estimador TS para $f_c = 10$ MHz muestra un rendimiento significativamente mayor que el de $f_c = 100$ MHz. La razón de este comportamiento es que los errores de estimación de TOA en el primer paso son ponderados por el inverso de los CRLBs analíticos correspondientes en la Ec. (127), que no proporcionan límites ajustados a bajos SNR para las estimaciones ML de TOA en el primer paso en la Ec. (113). Además, las figuras muestran que el esquema directo propuesto en el caso asíncrono alcanza un rendimiento más alto que el algoritmo de localización en [13] en la mayoría de las ubicaciones en la habitación.

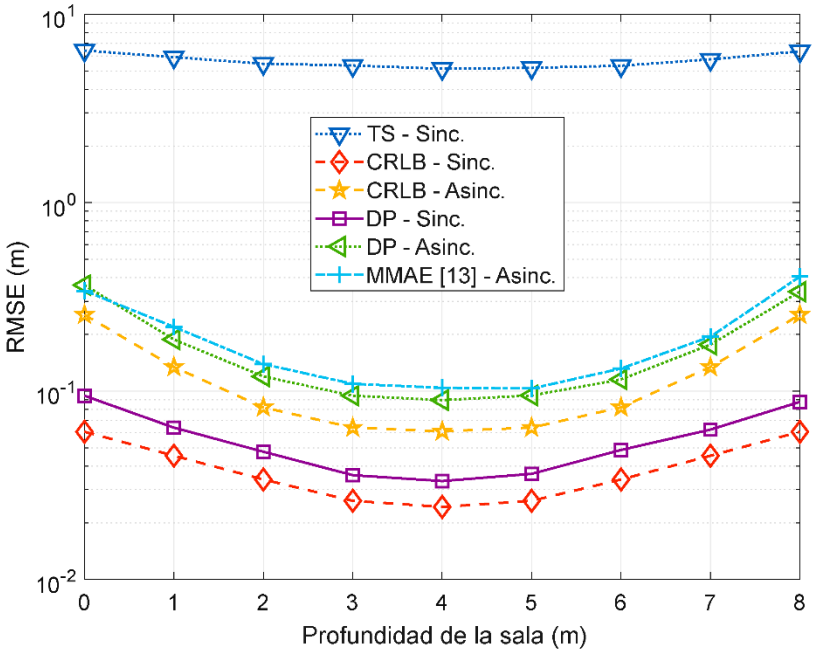


Figura N°21: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos a medida que el receptor VLC se mueve en línea recta dentro de la habitación, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1\ \text{W}$ y $f_c = 100\ \text{MHz}$.
Fuente: Elaboración propia.

3.7.4. Rendimiento de los estimadores directos y de dos pasos en presencia de incertidumbres del modelo. En esta parte, se evalúa el rendimiento de los estimadores directos y de dos pasos propuestos en presencia de incertidumbres relacionadas con el modelo de atenuación para canales de luz visible, es decir, el modelo lambertiano en la Ec. (95). Dado que el conocimiento de los parámetros relacionados con el modelo no es perfecto en escenarios prácticos de localización, es importante evaluar el rendimiento de la localización bajo diversos grados de incertidumbre, lo que permite revelar la robustez de los algoritmos propuestos frente a desajustes de parámetros/modelos.

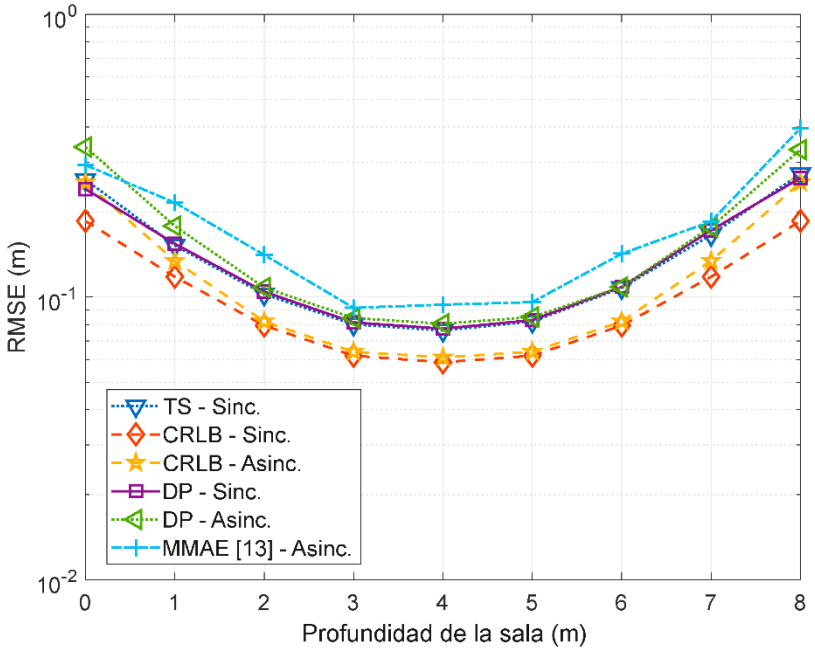


Figura N°22: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos a medida que el receptor VLC se mueve en línea recta en la habitación, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 10$ MHz.
Fuente: Elaboración propia.

A. Rendimiento con respecto a la incertidumbre en el orden lambertiano. Primero, consideramos el caso en el que el orden lambertiano m_i en la Ec. (95) se conoce con cierto grado de incertidumbre. Para ello, se utiliza un valor medido (estimado) $\widehat{m}_i$, que no coincide perfectamente con el valor verdadero m_i, en los estimadores DP y TS propuestos y en el algoritmo de localización en [13]. En las simulaciones, m_i se establece en 1 y $\widehat{m}_i$ varía en el intervalo $[0.75\ 1.25]$ para $i \in \{1, \dots, NL\}$. La figura N°23 y N°24 muestran el rendimiento de localización de los enfoques considerados con respecto al valor medido del orden lambertiano para $f_c = 100$ MHz y $f_c = 10$ MHz, respectivamente. Se observa en las figuras que el rendimiento de localización empeora a medida que el orden lambertiano medido/estimado se desvía del valor verdadero, como era de esperar. Además, se nota que el estimador DP síncrono es más robusto a desajustes en el orden lambertiano que los algoritmos asíncronos. La razón es que la información TOA, que es independiente del orden lambertiano (ver Ec. (94)), se convierte en el factor dominante que afecta el rendimiento de localización a medida que crece la incertidumbre en el orden lambertiano, dificultando el uso efectivo de la información RSS (ver Ec. (95)). Por lo tanto, la robustez del posicionamiento síncrono ante incertidumbres en el orden lambertiano es más evidente a altas frecuencias centrales con un aumento en la precisión de la información TOA [33],

lo que también se puede observar al comparar la figura N°23 y N°24. Además, en el caso asíncrono, el algoritmo propuesto tiene un rendimiento ligeramente mejor que el de [13] para varios grados de incertidumbre.

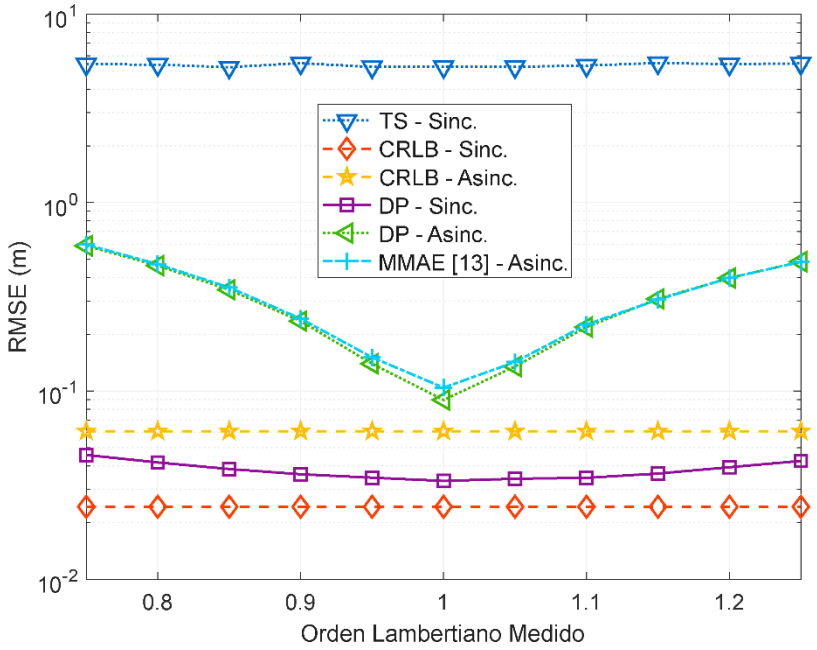


Figura N°23: CRLBs y RMSEs de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos con conocimiento imperfecto del orden lambertiano, donde el valor verdadero del orden lambertiano es $1, T_s = 1\ \mu s, A = 1\ \text{W}$ y $f_c = 100$ MHz.
Fuente: Elaboración propia.

B. Rendimiento en función de la incertidumbre en el modelo de transmisión. A continuación, investigamos el rendimiento de los estimadores en presencia de incertidumbre en el modelo general de transmisión en la Ec. (95). Como en [131], asumimos un modelo de incertidumbre multiplicativa que representa todas las incertidumbres individuales incluidas en la Ec. (93) (por ejemplo, $\boldsymbol{l}_t^i, \boldsymbol{n}_t^i, \boldsymbol{n}_r$ y m_i) en forma de una multiplicación del modelo de transmisión verdadero. Más concretamente, la estimación de la posición se realiza considerando el siguiente modelo de transmisión:

$$\alpha_i^{\text{meas}} = (1 + \varepsilon_i)\alpha_i, i = 1, \dots, N_L \tag{155}$$

En el modelo mencionado, αi se define como en la Ec. (95) y $\varepsilon_i \in [\varepsilon_i^{\min}, \varepsilon_i^{\max}]$ especifica el grado de discrepancia entre el modelo de transmisión verdadero y el estimado. En la figura N°25 y N°26, se muestran los RMSE de los estimadores en función del grado de incertidumbre, ε_i, para $f_c = 100\ MHz$ y $f_c = 10\ MHz$, respectivamente, donde $\varepsilon_i^{\min} = -0.25$ y $\varepsilon_i^{\max} = 0.25$ para $i = 1, \dots, N_L$. Como se observa en las figuras, las curvas de rendimiento de localización con respecto al

grado de incertidumbre en el modelo de transmisión muestran tendencias similares a las del caso de incertidumbre en la orden Lambertiana.

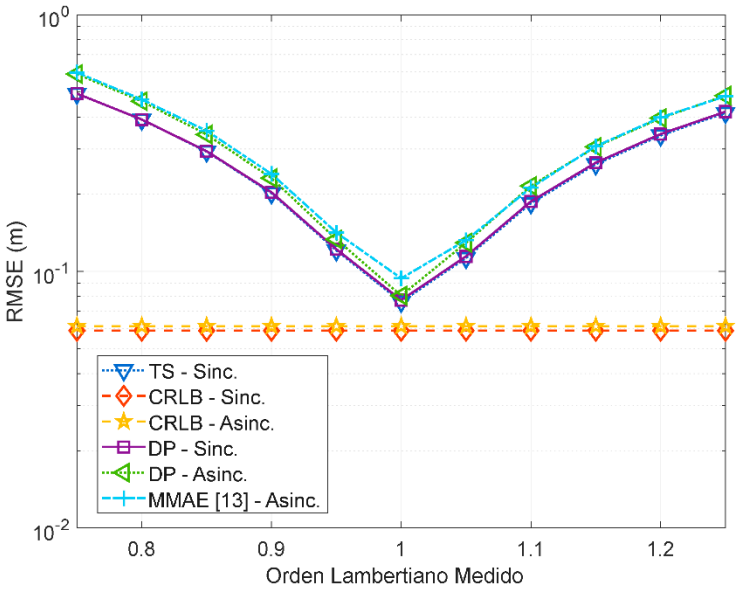


Figura N°24: CRLBs y RMSE de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos con conocimiento imperfecto de la orden Lambertiana, donde la verdadera orden Lambertiana es $1, T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 10$ MHz.
Fuente: Elaboración propia.

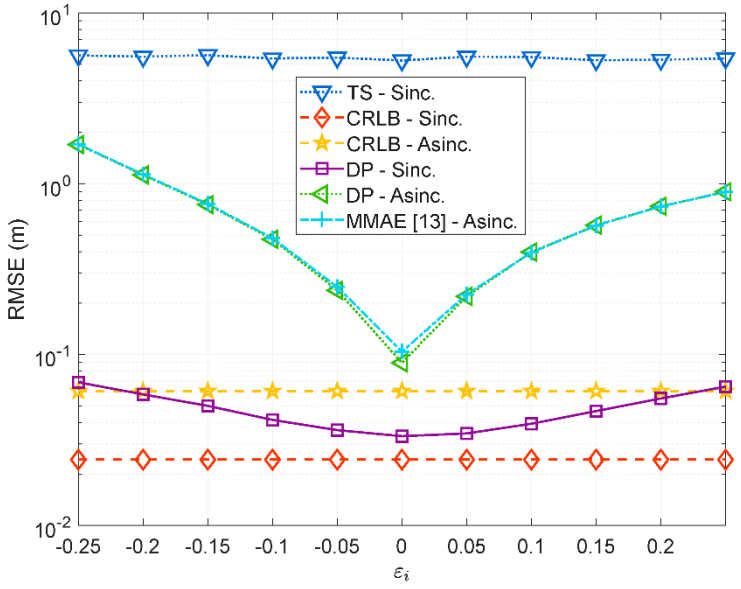


Figura N°25: CRLBs y RMSE de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos con modelo de transmisión desajustado, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 100$ MHz.
Fuente: Elaboración propia.

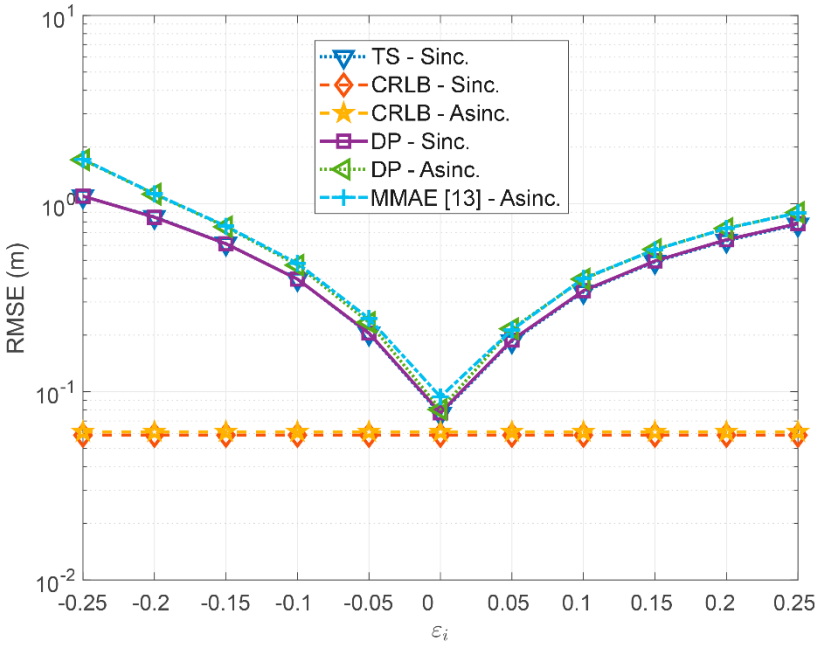


Figura N°26: CRLBs y RMSE de los estimadores para sistemas VLP síncronos y asíncronos con modelo de transmisión desajustado, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1$ W y $f_c = 10\ MHz$.
Fuente: Elaboración propia.

3.7.5. Caso especial: Localización bidimensional. En esta sección, investigamos el rendimiento de la localización bidimensional de los estimadores propuestos y realizamos comparaciones con el método de trilateración, que es uno de los métodos más comúnmente utilizados en la localización bidimensional con luz visible. Para los cálculos de CRLB y las implementaciones del algoritmo, asumimos que se conoce la altura del receptor y realizamos la estimación de posición bidimensional en consecuencia. En los experimentos, los ángulos polares y azimutales de los LED se establecen en $(\theta_i, \phi_i) = (180°, 0°)$ para $i = 1, \dots, N_L$, es decir, los LED están mirando hacia abajo.

A. Rendimiento en función de la Potencia Óptica. En la figura N°27, presentamos el rendimiento en términos de RMSE de los algoritmos propuestos de DP y TS, el algoritmo en [13] y el algoritmo de trilateración basado en LLS en [9], con respecto a la potencia óptica para $f_c = 100$ MHz y $l_r = [4\ 6\ 1]\ m$. Se observa que, en el caso asincrónico, el estimador directo propuesto es capaz de superar tanto al estimador MMAE en [13] como al algoritmo de trilateración en [9] en casi todos los niveles de SNR. Por ejemplo, para $A = 215$ mW, las mejoras en el rendimiento de localización logradas por el método DP propuesto son de alrededor de 10 cm y 40 cm en comparación con los métodos de posicionamiento en [13] y [9], respectivamente. Además, notamos que el estimador DP síncrono supera a todos los estimadores asíncronos al utilizar la información de retardo de tiempo. Además,

el estimador TS síncrono propuesto converge a la CRLB en el régimen de alto SNR, lo que resulta de su propiedad de optimalidad asintótica, como se muestra en la Proposición 2 y la Observación 1. Por lo tanto, de manera similar a las figuras N°19 y N°20 en la sección 3.7.2, la figura N°27 ilustra el equilibrio entre el posicionamiento directo y de dos pasos en términos de rendimiento de localización y complejidad computacional en diferentes regímenes de SNR.

B. Rendimiento en función de las coordenadas del receptor VLC. La figura N°28 representa el rendimiento de localización bidimensional a medida que el receptor VLC se desplaza a lo largo de la línea horizontal desde [4 0 1] m hasta [4 8 1] m para $f_c = 100\ MHz$. Se observa que la técnica de posicionamiento directo basada en ML propuesta puede lograr un rendimiento de localización más alto que los algoritmos en [13] y [9] en todas las ubicaciones a lo largo de la línea. Además, el rendimiento del algoritmo en [9] empeora a medida que el receptor se aleja del centro de la habitación hacia los bordes. Esto se debe a que el método basado en trilateración en [9] es un enfoque subóptimo de tres pasos que primero estima las distancias a los LEDs utilizando las observaciones de RSS, luego ajusta las distancias estimadas mediante normalización y finalmente emplea el método LLS basado en las distancias normalizadas. A medida que la simetría se reduce en los bordes de la habitación, el método de normalización aplicado en [9], que asigna la misma constante y factor de normalización a las estimaciones de distancia de diferentes LEDs, se vuelve menos preciso. El estimador basado en ML propuesto, por otro lado, alcanza niveles de RMSE cercanos a la CRLB en todas las posiciones a lo largo de la línea y, por lo tanto, conduce a una mejora sustancial en el rendimiento de localización en comparación con el método en [9] (una mejora de aproximadamente 63 cm para $\boldsymbol{l}_r = [4\ 8\ 1]\ m$).

3.8. Conclusiones.

Se han investigado los paradigmas de posicionamiento directo y de dos pasos para sistemas VLP. En particular, se han derivado las CRLBs y los estimadores de posición directa y de dos pasos en sistemas VLP síncronos y asíncronos. Las expresiones propuestas de CRLB aprovechan la señal de observación completa en el receptor VLC y pueden aplicarse a cualquier sistema VLP en el que los transmisores LED y el receptor VLC puedan tener orientaciones arbitrarias.

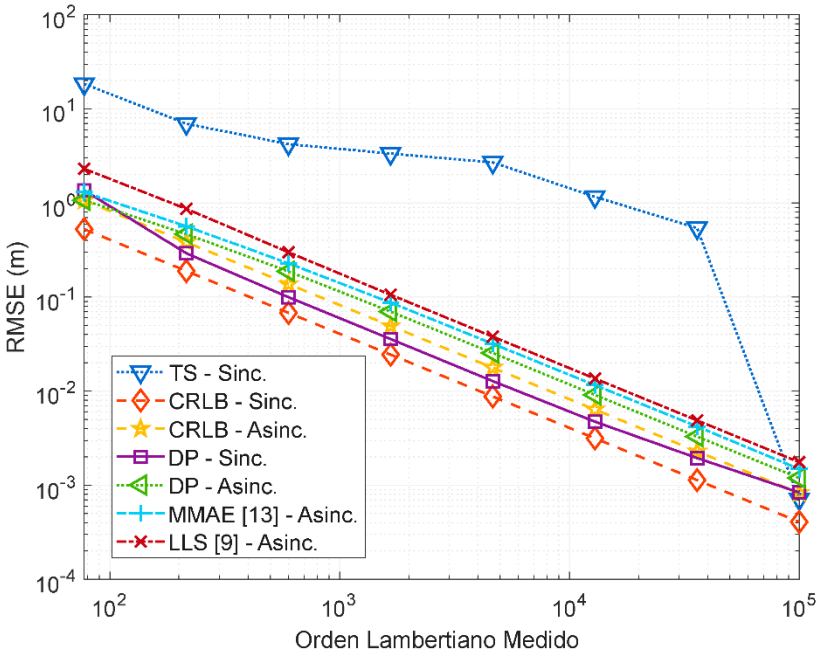


Figura N°27: CRLBs y RMSE de los estimadores para la localización bidimensional en sistemas VLP síncronos y asíncronos con respecto a la potencia óptica de la fuente, donde $T_s = 1\ \mu s$ y $f_c = 100\ MHz$.

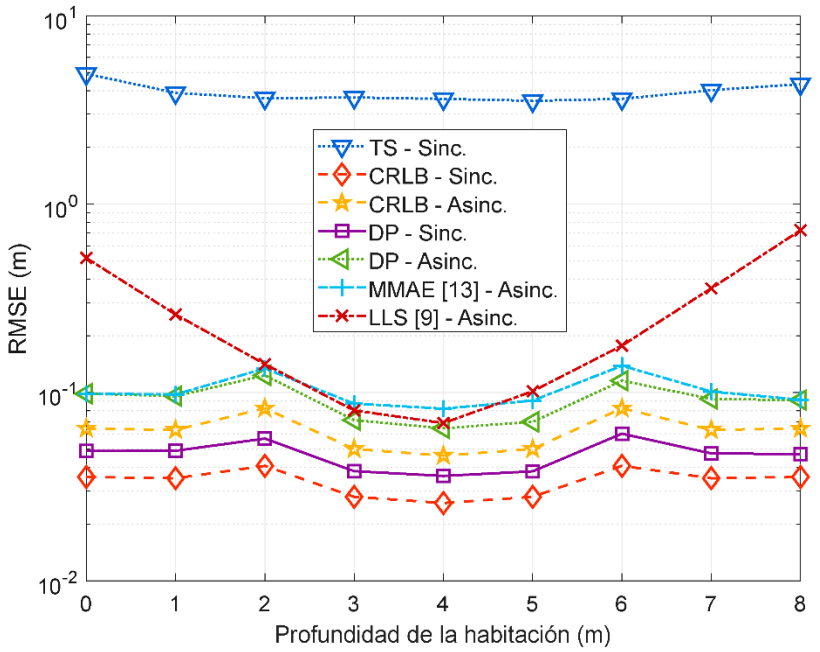


Figura N°28: CRLBs y RMSE de los estimadores para la localización bidimensional en sistemas VLP síncronos y asíncronos con respecto a la profundidad de la habitación, donde $T_s = 1\ \mu s, A = 1\ W$ y $f_c = 100\ MHz$.

El CRLB en la precisión de la localización de sistemas VLP síncronos que utilizan tanto la información de TOA como la de RSS se ha derivado por primera vez en la literatura. Además, el CRLB presentado para el caso asíncrono generaliza una expresión disponible en la literatura para cualquier tipo de pulsos transmitidos. El análisis comparativo del rendimiento

de los sistemas síncronos y asíncronos ha indicado que la ventaja del posicionamiento síncrono se hace más evidente a medida que aumenta el ancho de banda efectivo del pulso transmitido. Además, para explorar la relación entre los enfoques de posicionamiento directo y de dos pasos, se han identificado las condiciones de equivalencia (asintótica) de estos dos enfoques. Se ha demostrado que el estimador de dos pasos converge al estimador directo a altas SNR para sistemas síncronos, mientras que los dos estimadores son equivalentes para sistemas asíncronos en todas las SNR para formas de pulso prácticas. Por lo tanto, los beneficios del posicionamiento directo en la precisión de la localización pueden ser significativos para sistemas síncronos en SNR bajas a medias. Además, las complejidades computacionales de los enfoques propuestos se han presentado para demostrar el equilibrio entre la complejidad de implementación y la precisión de la localización. Se han proporcionado varios ejemplos numéricos para ilustrar los efectos del posicionamiento directo en el rendimiento de los sistemas VLP y para presentar una evaluación comparativa de escenarios síncronos y asíncronos. Como trabajo futuro, se pueden analizar los efectos de los errores de sincronización para la localización tridimensional en sistemas VLP. En particular, en presencia de errores de sincronización significativos, puede no ser útil utilizar las mediciones de TOA además de las mediciones de RSS para fines de localización. Por lo tanto, cuantificar la información que se puede extraer de las mediciones de TOA con errores de sincronización es un problema importante. Como otra dirección para trabajos futuros, se puede considerar VLP en presencia de incertidumbre en el modelo y en los parámetros, con el objetivo de diseñar estimadores de posición robustos.

IV. DISCUSIÓN

Los estudios previos habían propuesto métodos de posicionamiento por luz visible (VLP) utilizando técnicas de machine learning para reducir el error de localización en interiores. Lograron errores medios de posicionamiento de 0.038 m, 0.125 m, 2.3 m y 0.164 m con árbol de decisión, máquina de vectores de soporte, redes neuronales de 1 capa y redes neuronales de 10 capas, respectivamente. Sin embargo, en este nuevo estudio se derivan expresiones teóricas más precisas para los límites inferiores de error (CRLB) considerando información de tiempo de llegada (TOA) y potencia recibida (RSS). Se demuestra que el límite CRLB híbrido TOA/RSS logra la menor cota inferior. Además, se proponen nuevos estimadores de máxima verosimilitud que logran errores cuadráticos medios muy cercanos a los límites CRLB. Por lo tanto, este nuevo trabajo aporta un análisis teórico más profundo sobre los límites fundamentales y el rendimiento óptimo de localización en VLP.

En investigaciones previas se había propuesto un esquema de asignación de potencia robusta para redes VLPC que minimizaba el límite inferior de Cramer-Rao (CRLB) del error de posicionamiento. Se logró una precisión centimétrica con este enfoque. Sin embargo, en este nuevo estudio se deriva y analiza el límite superior de Ziv-Zakai (ZZB), que proporciona cotas más ajustadas en ciertos escenarios. Además, se compara el ZZB con el error cuadrático medio del estimador de máxima a posteriori (MAP), demostrando que el ZZB es un límite inferior más razonable para el estimador MAP. También se analizan el error cuadrático medio del estimador con información previa (ECRB) y la cota de Cramer-Rao bayesiana (BCRB). Por lo tanto, este trabajo aporta nuevos límites teóricos y comparaciones para caracterizar de forma más precisa el desempeño óptimo en sistemas VLP.

En trabajos previos se habían propuesto métodos de posicionamiento VLP en tres dimensiones utilizando redes neuronales convolucionales-recurrentes (CRNN) para modelar la relación no lineal entre la intensidad de señal recibida y las coordenadas de posición. Se lograron precisiones centimétricas con este enfoque basado en deep learning. No obstante, en esta nueva investigación se derivan expresiones analíticas para el límite inferior de Cramer-Rao (CRLB) y estimadores de máxima verosimilitud (MLE) para sistemas VLP con múltiples transmisores LED. Se evalúan estimadores de posición directa y en dos etapas, demostrando un excelente desempeño cercano a los límites CRLB. Por lo tanto, este trabajo provee un análisis teórico más sólido sobre el rendimiento óptimo de localización 3D en VLP con múltiples transmisores.

V. CONCLUSIONES

Esta investigación realizó un análisis teórico riguroso sobre los límites fundamentales y estimadores óptimos para sistemas de posicionamiento por luz visible (VLP). Se derivaron expresiones para los límites de Cramer-Rao (CRLB) considerando estimación basada en tiempo de llegada (TOA), potencia recibida (RSS) e híbrida TOA/RSS. Se demostró analíticamente que el límite CRLB híbrido TOA/RSS logra la cota inferior más ajustada. Además, se propusieron nuevos estimadores de máxima verosimilitud (MLE) que alcanzaron errores cuadráticos medios muy cercanos a los límites CRLB en las simulaciones. Por lo tanto, este estudio aporta límites teóricos y estimadores óptimos novedosos para caracterizar y lograr el desempeño óptimo en sistemas VLP.

En este trabajo se derivó y analizó el límite superior de Ziv-Zakai (ZZB) para sistemas VLP, el cual provee cotas más ajustadas que otros límites como el error cuadrático medio del estimador con información previa (ECRB) y la cota de Cramer-Rao bayesiana (BCRB) en ciertos escenarios. A través de comparaciones con el estimador de máxima a posteriori (MAP), se demostró que el ZZB es un límite inferior más razonable en algunos casos. Por ende, este estudio aporta un nuevo límite teórico (ZZB) para caracterizar de forma más precisa el desempeño óptimo alcanzable en sistemas VLP.

En este trabajo se derivaron expresiones analíticas para el límite inferior de Cramer-Rao (CRLB) y estimadores de máxima verosimilitud (MLE) para sistemas VLP 3D con múltiples transmisores LED. A través de simulaciones, se evaluaron estimadores de posición directa y en dos etapas, demostrando un excelente desempeño cercano a los límites CRLB. Por lo tanto, esta investigación provee un análisis teórico novedoso sobre los límites fundamentales y estimadores óptimos para localización 3D precisa en sistemas VLP con múltiples transmisores LED

VI. RECOMENDACIONES

Además de considerar los límites teóricos para la estimación de distancia en VLP con incertidumbre sobre la altura del receptor, sería valioso explorar métodos adaptativos que puedan ajustarse a variaciones en la altura sin comprometer la precisión. Al desarrollar límites fundamentales bajo este escenario de altura desconocida, se puede explorar la posibilidad de algoritmos que se adapten dinámicamente a las variaciones de altura para obtener resultados aún más robustos.

El estudio experimental puede ser ampliado para incluir diferentes entornos y condiciones atmosféricas que podrían influir en la precisión de los estimadores de máxima verosimilitud. Esto no solo validaría los resultados teóricos, sino que también permitiría identificar posibles limitaciones o fortalezas en contextos del mundo real. Además, considerar la implementación de diferentes configuraciones de hardware y equipos permitiría evaluar la generalidad de los resultados obtenidos.

Para complementar el análisis de sistemas VLP con errores de sincronización y resolución finita en las estimaciones de tiempo de llegada, se puede explorar la viabilidad de técnicas de corrección de errores o algoritmos de compensación que puedan mitigar estos efectos prácticos. Además, sería beneficioso investigar cómo estos errores afectan la eficiencia de los algoritmos de localización y explorar estrategias para minimizar su impacto, lo que permitiría una caracterización más completa del desempeño óptimo en entornos VLP reales.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] A. Abdalmajeed, et al., “Improved visible light positioning system using machine learning”, Optical and Quantum Electronics, vol. 55, nro. 209, pp. 1-15, 2023.

[2] N. Al-Dhahir, et al., “Robust Power Allocation for Integrated Visible Light Positioning and Communication Networks”, IEEE Transactions on Communication, vol. 1, pp.1-13, 2023.

[3] W. Ding, et al., “Four-dimensional indoor visible light positioning: A deep-learning-based perspective”, Journal of the Franklin Institute, vol. 360, nro. 6, pp. 4071-4090, 2023.

[4] M. Aziz, et al., “A Comprehensive Survey on MIMO Visible Light Communication: Current Research, Machine Learning and Future Trends”, Sensors, vol. 23, nro. 739, pp. 1-28, 2023.

[5] H. Yang, et al., “Coordinated Resource Allocation-Based Integrated Visible Light Communication and Positioning System for Indoor IoT”, IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 19, nro. 7, pp. 4671-4684, 2020.

[6] S. Javier, “Diseño e implementación de un prototipo de punto de acceso para red de comunicación por luz visible”, tesis de pregrado, Facultad de Ingeniería de Producción y Servicios, Universidad Nacional San Arequipa, Arequipa, Perú, 2021.

[7] H. Haas, et al., “VLC: Beyond point-to-point communication”, IEEE Communications Magazine, vol. 52, pp. 98-105, jul. 2014.

[8] P. Hu y P. Mohapatra, “Visible light communication, networking, and sensing: A survey, potential and challenges”, IEEE Communications Surveys Tutorials, vol. 17, pp. 2047-2077, Fourthquarter, 2015.

[9] A. Jovicic, J. Li, and T. Richardson, \Visible light communication: Opportunities, challenges and the path to market," IEEE Communications Magazine, vol. 51, pp. 26{32, Dec. 2013.

[10] D. Karunatilaka, F. Zafar, V. Kalavally, and R. Parthiban, \LED based indoor visible light communications: State of the art," IEEE CommunicationsSurveys Tutorials, vol. 17, pp. 1649{1678, thirdquarter 2015.

[11] J. Armstrong, Y. Sekercioglu, and A. Neild, \Visible light positioning: A roadmap for international standardization," IEEE Communications Magazine, vol. 51, pp. 68{73, Dec. 2013.

[12] C. G. Gavrincea, J. Baranda, and P. Henarejos, \Rapid prototyping of standard-compliant visible light communications system," IEEE Communications Magazine, vol. 52, pp. 80-87, July 2014.

[13] L. Grobe, A. Paraskevopoulos, J. Hilt, D. Schulz, F. Lassak, F. Hartlieb, C. Kottke, V. Jungnickel, and K. D. Langer, \High-speed visible light communication systems," IEEE Communications Magazine, vol. 51, pp. 60-66, Dec. 2013.

[14] K. Panta and J. Armstrong, \Indoor localisation using white LEDs," Electronics Letters, vol. 48, no. 4, pp. 228{230, 2012.

[15] H.-S. Kim, D.-R. Kim, S.-H. Yang, Y.-H. Son, and S.-K. Han, \An indoor visible light communication positioning system using a RF carrier allocation technique," Journal of Lightwave Technology, vol. 31, pp. 134-144, ene, 2013.

[16] M. F. Keskin, A. D. Sezer, and S. Gezici, \Localization via visible light systems," Proceedings of the IEEE, vol. 106, pp. 1063-1088, June 2018.

[17] Z. Ghassemlooy, L. N. Alves, S. Zvanovec, and M.-A. Khalighi, Visible Light Communications: Theory and Applications. CRC Press, 2017.

[18] T. Komine and M. Nakagawa, \Fundamental analysis for visible-light communication system using LED lights," IEEE Transactions on Consumer Electronics, vol. 50, pp. 100-107, Feb. 2004.

[19] L. Li, P. Hu, C. Peng, G. Shen, and F. Zhao, \Epsilon: A visible light based positioning system," in 11th USENIX Symposium on Networked Systems Design and Implementation (NSDI), (Seattle, WA), pp. 331-343, Apr. 2014.

[20] W. Zhang, M. I. S. Chowdhury, and M. Kavehrad, \Asynchronous indoor positioning system based on visible light communications," Optical Engineering, vol. 53, no. 4, pp. 045105-1 – 045105-9, 2014.

[21] S.-H. Yang, E.-M. Jung, and S.-K. Han, \Indoor location estimation based on LED visible light communication using multiple optical receivers," IEEE Communications Letters, vol. 17, pp. 1834-1837, Sep. 2013.

[22] M. F. Keskin and S. Gezici, \Comparative theoretical analysis of distance estimation in visible light positioning systems," Journal of Lightwave Technology, vol. 34, pp. 854-865, Feb. 2016.

[23] M. F. Keskin, E. Gonendik, and S. Gezici, \Improved lower bounds for ranging in synchronous visible light positioning systems," Journal of Lightwave Technology, vol. 34, pp. 5496-5504, Dec. 2016.

[24] M. F. Keskin, S. Gezici, and O. Arikan, \Direct and two-step positioning in visible light systems," IEEE Transactions on Communications, vol. 66, pp. 239{254, Jan. 2018.

[25] M. F. Keskin, A. D. Sezer, and S. Gezici, \Optimal and robust power allocation for visible light positioning systems under illumination constraints,"IEEE Transactions on Communications, under review, 2018.

[26] M. F. Keskin, O. Erdem, and S. Gezici, \Cooperative localization in hybrid infrared/visible light networks: Theoretical limits and distributed algorithms,"IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks, accepted for publication, 2018.

[27] D. Ganti, W. Zhang, and M. Kavehrad, \VLC-based indoor positioning system with tracking capability using Kalman and particle filters," in IEEE International Conference on Consumer Electronics (ICCE), pp. 476-477, ene, 2014.

[28] Z. Zhou, M. Kavehrad, and P. Deng, \Indoor positioning algorithm using light-emitting diode visible light communications," Optical Engineering, vol. 51, no. 8, p. 085009, 2012.

[29] T. Wang, Y. Sekercioglu, A. Neild, and J. Armstrong, \Position accuracy of time-of-arrival based ranging using visible light with application in indoor localization systems," Journal of Lightwave Technology, vol. 31, pp. 3302-3308, oct. 2013.

[30] S.-Y. Jung, S. Hann, and C.-S. Park, \TDOA-based optical wireless indoor localization using LED ceiling lamps," IEEE Transactions on Consumer Electronics, vol. 57, pp. 1592-1597, nov. 2011.

[31] M. Bilgi, A. Sevincer, M. Yuksel, and N. Pala\Optical wireless localization, "Wireless Networks", vol. 18, pp. 215-226, feb. 2012.

[32] S.-K. Han, et al, "Three-dimensional visible light indoor localization using AOA and RSS with multiple optical receivers", Journal of Lightwave Technology, vol. 32, pp. 2480 – 2485, July 2014.

[33] Y. Eroglu, et al, "AOA-based localization and tracking in multi-element VLC systems", IEEE 16th Annual Wireless and Microwave Technology Conference (WAMICON), Apr. 2015.

[34] J. Duan, et al, "Theoretical accuracy analysis of indoor visible light communication positioning system based on received signal strength indicator", Journal of Lightwave Technology, vol. 32, pp. 4180 – 4186, Nov. 2014.

[35] Y. S. Eroglu, et al, "Hybrid 3-D localization for visible light communication systems", Journal of Lightwave Technology, vol. 33, pp. 4589 – 4599, Nov. 2015.

[36] C.-C. Chong, et al, "Improved lower bounds on time-ofarrival estimation error in realistic UWB channels", IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICUWB), pp. 531–537, Sep. 2006.

[37] H. L. Van Trees, y K. L. Bell (editors), Bayesian bounds for parameter estimation and nonlinear filtering/tracking. New Jersey: Wiley-Interscience, 2007.

[38] E. Gonendik, y S. Gezici, "Fundamental limits on RSS based range estimation in visible light positioning systems", IEEE Communications Letters, vol. 19, pp. 2138 – 2141, Dec. 2015.

[39] Z. Sahinoglu, S. Gezici, y I. Guvenc, Ultra-Wideband Positioning Systems: Theoretical Limits, Ranging Algorithms, and Protocols. New York, Cambridge University Press, 2008.

[40] M. Aminikashani, W. Gu, y M. Kavehrad, “Indoor positioning with OFDM visible light communications”, 2016 13th IEEE Annual Consumer Communications Networking Conference (CCNC), pp. 505 – 510, Jan. 2016.

[41] X. Chi, et al, “The research of indoor positioning based on visible light communication”, China Communications, vol. 12, pp. 85 – 92, Aug. 2015.

[42] W. Xu, J. Wang, H. Shen, H. Zhang, and X. You, “Indoor positioning for multiphotodiode device using visible-light communications”, IEEE Photonics Journal, vol. 8, pp. 1 – 11, Feb. 2016.

[43] G. B. Prince, y T. D. C. Little, “Latency constrained device positioning using a visible light communication two-phase received signal strength - angle of arrival algorithm”, 2015 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), pp. 1 – 7, Oct. 2015.

[44] A. J. Weiss, y A. Amar, “Direct position determination of multiple radio signals”, EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, vol. 2005, nro. 1, pp. 37 – 49, 2005.

[45] O. Bialer, D. Raphaeli, y A. J. Weiss, “Maximum-likelihood direct position estimation in dense multipath”, IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 62, pp. 2069 – 2079, June 2013.

[46] A. J. Weiss, “Direct position determination of narrowband radio frequency transmitters”, IEEE Signal Processing Letters, vol. 11, pp. 513 – 516, May 2004.

[47] A. Amar, y A. J. Weiss, “New asymptotic results on two fundamental approaches to mobile terminal location”, 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, pp. 1320 – 1323, Mar. 2008.

[48] P. Closasy, et al, “Direct position estimation approach outperforms conventional two-steps positioning”, 2009 17th European Signal Processing Conference, pp. 1958 – 1962, Aug. 2009.

[49] A. Amar, y A. J. Weiss, “Localization of narrowband radio emitters based on doppler frequency shifts”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, pp. 5500 – 5508, Nov. 2008.

[50] X. Chi, et al, “The research of indoor positioning based on visible light communication”, China Communications, vol. 12, pp. 85 – 92, Aug. 2015.

[51] H. Shen, et al, “Indoor positioning for multiphotodiode device using visible-light communications”, IEEE Photonics Journal, vol. 8, pp. 1 – 11, Feb. 2016.

[52] G. B. Prince, y T. D. C. Little, “Latency constrained device positioning using a visible light communication two-phase received signal strength - angle of arrival algorithm”, 2015 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), pp. 1 – 7, Oct. 2015.

[53] A. J. Weiss and A. Amar, “Direct position determination of multiple radio signals”, EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, vol. 2005, nro. 1, pp. 37 – 49, 2005.

[54] O. Bialer, D. Raphaeli, y A. J. Weiss, “Maximum-likelihood direct position estimation in dense multipath”, IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 62, pp. 2069 – 2079, June 2013.

[55] A. J. Weiss, “Direct position determination of narrowband radio frequency transmitters”, IEEE Signal Processing Letters, vol. 11, pp. 513 – 516, May 2004.

[56] A. Amar, y A. J. Weiss, “New asymptotic results on two fundamental approaches to mobile terminal location”, 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, pp. 1320 – 1323, Mar. 2008.

[57] P. Closasy, C. Fernández-Pradesz, y J. A. Fernández-Rubioy, “Direct position estimation approach outperforms conventional two-steps positioning”, 2009 17th European Signal Processing Conference, pp. 1958 – 1962, Aug. 2009.

[58] A. Amar, y A. J. Weiss, “Localization of narrowband radio emitters based on doppler frequency shifts”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, pp. 5500 – 5508, Nov. 2008.

[59] R. J. Baxley, et al, “Joint optimization of precoder and equalizer in MIMO VLC systems”, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 33, pp. 1949 – 1958, Sep. 2015.

[60] Q. Gao, et al, “Linear transceiver designs for MIMO indoor visible light communications under lighting constraints”, IEEE Transactions on Communications, vol. 65, pp. 2494 – 2508, June 2017.

[61] L. Hanzo, et al, “Joint dimming control and transceiver design for MIMO-aided visible light communication”, IEEE Communications Letters, vol. 20, pp. 2193 – 2196, Nov. 2016.

[62] Q. Gao, C. Gong, y Z. Xu, “Joint transceiver and offset design for visible light communications with input-dependent shot noise”, IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 16, pp. 2736 – 2747, May 2017.

[63] K. H. Park, Y. C. Ko, y M. S. Alouini, “On the power and offset allocation for rate adaptation of spatial multiplexing in optical wireless MIMO channels”, IEEE Transactions on Communications, vol. 61, pp. 1535 – 1543, Apr. 2013.

[64] D. Bykhovsky, y S. Arnon, “Multiple access resource allocation in visible light communication systems”, Journal of Lightwave Technology, vol. 32, pp. 1594 – 1600, Apr. 2014.

[65] Q. Gao, et al, “Power and rate optimization for visible light communication system with lighting constraints”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 63, pp. 4245 – 4256, Aug. 2015.

[66] Z. Ding, et al, “Offset and power optimization for DCO-OFDM in visible light communication systems”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 64, pp. 349 – 363, Jan. 2016.

[67] Y. S. Ero˘glu, et al, “Multi-element VLC networks: LED assignment, power control, and optimum combining”, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 36, pp. 121 – 135, Jan. 2018.

[68] L. Dai, “Multi-user sum-rate optimization for visible light communications with lighting constraints”, Journal of Lightwave Technology, vol. 34, pp. 3943 – 3952, Aug. 2016.

[69] Q. Gao, et al, “User grouping and power allocation for NOMA visible light communication multi-cell networks”, IEEE Communications Letters, vol. 21, pp. 777 – 780, Apr. 2017.

[70] H. Haas, et al, “Joint user association and power allocation for cell-free visible light communication networks”, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 36, pp. 136 – 148, Jan. 2018.

[71] T. V. Pham, H. Le-Minh, y A. T. Pham, “Multi-user visible light communication broadcast channels with zero-forcing precoding”, IEEE Transactions on Communications, vol. 65, pp. 2509 – 2521, June 2017.

[72] S. Dimitrov, et al, “Optimal power allocation in spatial modulation OFDM for visible light communications”, 2012 IEEE 75th Vehicular Technology Conference (VTC Spring), pp. 1 – 5, May 2012.

[73] J. Lian, y M. Brandt-Pearce, “Multiuser MIMO indoor visible light communication system using spatial multiplexing”, Journal of Lightwave Technology, vol. 35, pp. 5024 – 5033, Dec. 2017.

[74] W. W. L. Li, et al, “Robust power allocation for energy-efficient location-aware networks”, IEEE/ACM Transactions on Networking, vol. 21, pp. 1918 – 1930, Dec. 2013.

[75] Y. Shen, W. Dai, and M. Z. Win, “Power optimization for network localization”, IEEE/ACM Transactions on Networking, vol. 22, pp. 1337 – 1350, Aug. 2014.

[76] W. Dai, Y. Shen, y M. Z. Win, “Distributed power allocation for cooperative wireless network localization”, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 33, pp. 28 – 40, Jan. 2015.

[77] A. F. Molisch, et al, “Joint allocation of spectral and power resources for non-cooperative wireless localization networks”, IEEE Transactions on Communications, vol. 64, pp. 3733 – 3745, Sep. 2016.

[78] J. Chen, et al, “Power management for cooperative localization: A game theoretical approach”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 64, pp. 6517 – 6532, Dec. 2016.

[79] A. Shahmansoori, G. Seco-Granados, y H. Wymeersch, “Power allocation for OFDM wireless network localization under expectation and robustness constraints”, IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 16, pp. 2027 – 2038, Mar. 2017.

[80] W. Dai, Y. Shen, y M. Z. Win, “A computational geometry framework for efficient network localization”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 64, pp. 1317 – 1339, Feb. 2018.

[81] W. Dai, Y. Shen, y M. Z. Win, “Energy-efficient network navigation algorithms”, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 33, pp. 1418 – 1430, July 2015.

[82] T. Wang, G. Leus, y L. Huang, “Ranging energy optimization for robust sensor positioning based on semidefinite programming”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, pp. 4777 – 4787, Dec. 2009.

[83] J. Chen, et al, “Resource management games for distributed network localization”, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 35, pp. 317 – 329, Feb. 2017.

[84] H. Elgala, R. Mesleh, y H. Haas, “An LED model for intensitymodulated optical communication systems”, IEEE Photonics Technology Letters, vol. 22, pp. 835 – 837, June 2010.

[85] J. Gancarz, H. Elgala, and T. D. C. Little, “Impact of lighting requirements on VLC systems”, IEEE Communications Magazine, vol. 51, pp. 34 – 41, Dec. 2013.

[86] C. P. M. J. Baggen, et al, “An illumination perspective on visible light communications”, IEEE Communications Magazine, vol. 52, pp. 64–71, July 2014.

[87] Y. S. Eroglu, et al, “Multi-element transmitter design and performance evaluation for visible light communication”, 2015 IEEE Globecom Workshops, pp. 1 – 6, Dec. 2015.

[88] J. Grubor, S. Randel, K. D. Langer, and J. W. Walewski, “Broadband information broadcasting using LED-based interior lighting”, Journal of Lightwave Technology, vol. 26, pp. 3883 – 3892, Dec. 2008.

[89] N. S. Correal, et al, “Locating the nodes: cooperative localization in wireless sensor networks”, IEEE Signal Processing Magazine, vol. 22, pp. 54 – 69, July 2005.

[90] H. Wymeersch, J. Lien, y M. Z. Win, “Cooperative localization in wireless networks”, Proceedings of the IEEE, vol. 97, pp. 427 – 450, Feb. 2009.

[91] S. Gezici, et al, Cooperative Positioning in Wireless Networks, pp. 1 – 19. Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, 2016.

[92] P. Biswas, et al, “Semidefinite programming based algorithms for sensor network localization”, ACM Transactions on Sensor Networks, vol. 2, nro. 2, pp. 188 – 220, 2006.

[93] F. K. W. Chan, “Semi-definite programming algorithms for sensor network node localization with uncertainties in anchor positions and/or propagation speed”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, pp. 752 – 763, Feb. 2009.

[94] R. W. Ouyang, A. K. S. Wong, and C. T. Lea, “Received signal strengthbased wireless localization via semidefinite programming: Noncooperative and cooperative schemes”, IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 59, pp. 1307–1318, Mar. 2010.

[95] P. Tseng, “Second-order cone programming relaxation of sensor network localization”, SIAM Journal on Optimization, vol. 18, pp. 156 – 185, Feb. 2007.

[96] G. Naddafzadeh-Shirazi, M. B. Shenouda, y L. Lampe, “Second order cone programming for sensor network localization with anchor position uncertainty”, IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 13, pp. 749 – 763, Feb. 2014.

[97] C. Soares, J. Xavier, and J. Gomes, “Simple and fast convex relaxation method for cooperative localization in sensor networks using range measurements”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 63, pp. 4532 – 4543, Sep. 2015.

[98] D. Blatt and A. O. Hero, “Energy-based sensor network source localization via projection onto convex sets”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 54, pp. 3614 – 3619, Sep. 2006.

[99] M. R. Gholami, et al, “Wireless network positioning as a convex feasibility problem”, EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, vol. 2011, nro. 1, pp. 161, 2011.

[100] Y. Censor, “Cooperative wireless sensor network positioning via implicit convex feasibility”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 61, pp. 5830 – 5840, Dec. 2013.

[101] Y. Hong, et al, “Distributed projection-based algorithms for source localization in wireless sensor networks”, IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 14, pp. 3131 – 3142, June 2015.

[102] J. A. Costa, N. Patwari, y A. O. Hero, III, “Distributed weighted multidimensional scaling for node localization in sensor networks”, ACM Transactions on Sensor Networks, vol. 2, pp. 39 – 64, Feb. 2006.

[103] A. Bekkali, et al, “Visible light communication for vehicular networking: Performance study of a V2V system using a measured headlamp beam pattern model”, IEEE Vehicular Technology Magazine, vol. 10, nro. 4, pp. 45 – 53, 2015.

[104] A.-M. C˘ailean, y M. Dimian, “Toward environmental-adaptive visible light communications receivers for automotive applications: A review”, IEEE Sensors Journal, vol. 16, nro. 9, pp. 2803–2811, 2016.

[105] R. D. Roberts, et al, “Smart automotive lighting for vehicle safety”, IEEE Communications Magazine, vol. 51, nro. 12, pp. 50 – 59, 2013.

[106] A. C˘ailean and M. Dimian, “Current challenges for visible light communications usage in vehicle applications: A survey”, IEEE Communications Surveys Tutorials, vol. 19, pp. 2681 – 2703, Fourthquarter 2017.

[107] M. Kavehrad, “Sustainable energy-efficient wireless applications using light”, IEEE Communications Magazine, vol. 48, nro. 12, pp. 66 – 73, 2010.

[108] D. Tagliaferri, y C. Capsoni, “High-speed wireless infrared uplink scheme for airplane passengers’ communications”, Electronics Letters, vol. 53, nro. 13, pp. 887 – 888, 2017.

[109] V. Guerra, et al, “Reading lamp-based visible light communication system for in-flight entertainment”, IEEE Transactions on Consumer Electronics, vol. 59, nro. 1, pp. 31 – 37, 2013.

[110] J. M. Kahn and J. R. Barry, “Wireless infrared communications”, Proceedings of the IEEE, vol. 85, nro. 2, pp. 265 – 298, 1997.

[111] Y. Censor, y A. Segal, “Algorithms for the quasiconvex feasibility problem”, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 185, nro. 1, pp. 34 – 50, 2006.

[112] A. N. Iusem, B. F. Svaiter, y M. Teboulle, “Entropy-like proximal methods in convex programming”, Mathematics of Operations Research, vol. 19, nro. 4, pp. 790 – 814, 1994.

[113] T. Jia and R. M. Buehrer, “A set-theoretic approach to collaborative position location for wireless networks”, IEEE Transactions on Mobile Computing, vol. 10, nro. 9, pp. 1264 – 1275, 2011.

[114] A. Carmi, Y. Censor, y P. Gurfil, “Convex feasibility modeling and projection methods for sparse signal recovery”, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 236, nro. 17, pp. 4318 – 4335, 2012.

[115] P. L. Combettes, “Convex set theoretic image recovery by extrapolated iterations of parallel subgradient projections”, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 6, pp. 493 – 506, Apr. 1997.

[116] Y. Censor, et al, “The implicit convex feasibility problem and its application to adaptive image denoising”, arXiv:1606.05848, 2016.

[117] Y. Censor, y A. Segal, “Iterative projection methods in biomedical inverse problems”, Procceding of the interdisciplinary workshop on Mathematical Methods in Biomedical

Imaging and Intensity-Modulated Radiation Therapy (IMRT), pp. 65 – 96, Pisa, Italy, Oct. 2008.

[118] D. Butnariu, et al, “On the behavior of subgradient projections methods for convex feasibility problems in Euclidean spaces”, SIAM Journal on Optimization, vol. 19, nro. 2, pp. 786 – 807, 2008.

[119] M. Yasir, S. W. Ho, y B. N. Vellambi, “Indoor positioning system using visible light and accelerometer”, Journal of Lightwave Technology, vol. 32, pp. 3306 – 3316, Oct. 2014.

[120] A. Hatami and K. Pahlavan, “Hybrid TOA-RSS based localization using neural networks”, IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM), Nov. 2006.

[121] C. Fritsche and A. Klein, “Cramer-Rao lower bounds for hybrid localization of mobile terminals”, Workshop on Positioning, Navigation and Communication (WPNC), pp. 157 – 164, Mar. 2008.

[122] B. Sieskul, T. Kaiser, and F. Zheng, “A hybrid SS-ToA wireless NLoS geolocation based on path attenuation: Cramer-Rao bound”, IEEE 69th Vehicular Technology Conference (VTC Spring), Apr. 2009.

[123] S. Gezici, et al, “Localization via ultra-wideband radios: A look at positioning aspects for future sensor networks”, IEEE Signal Processing Magazine, vol. 22, pp. 70 – 84, July 2005.

[124] Z. Liu, et al, “The Ziv-Zakai bound for time-of-arrival estimation of new generation GNSS signals”, International Technical Meeting of The Institute of Navigation, (Monterey, CA), pp. 639 – 646, Jan. 2016.

[125] D. Dardari, y M. Win, “Ziv-Zakai bound on time-of-arrival estimation with statistical channel knowledge at the receiver”, IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICUWB), pp. 624 – 629, Sep. 2009.

[126] Y. Qi, y H. Kobayashi, “Cramér-Rao lower bound for geolocation in nonline-of-sight environment”, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), vol. 3, pp. III – 2473 – III – 2476, May 2002.

[127] N. Decarli, y D. Dardari, “Ziv-Zakai bound for time delay estimation of unknown deterministic signals”, IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), pp. 4673 – 4677, May 2014.

[128] H. V. Poor, An Introduction to Signal Detection and Estimation. New York: Springer-Verlag, 1994.

[129] H. Arslan, “Fundamental limits on time delay estimation in dispersed spectrum cognitive radio systems”, IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 8, pp. 78 – 83, Jan. 2009.

[130] S. Gezici, y Z. Sahinoglu, “Ranging in a Single-Input Multiple-Output (SIMO) system”, IEEE Communications Letters, vol. 12, pp. 197 – 199, Mar. 2008.

[131] D. H. Kwon, S. H. Yang, y S. K. Han, “Modulation bandwidth enhancement of white-LED-based visible light communications using electrical equalizations”, Proceedings of SPIE, vol. 9387, pp. 93870T – 1 – 93870T– 6, 2015.

[132] Y. Qi, H. Kobayashi, y H. Suda, “On time-of-arrival positioning in a multipath environment”, IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 55, pp. 1516 – 1526, Sep. 2006.

[133] Y. Hou, et al, “Multiple access scheme based on block encoding time division multiplexing in an indoor positioning system using visible light”, IEEE/OSA Journal of Optical Communications and Networking, vol. 7, pp. 489 – 495, May 2015.

[134] K. L. Bell, et al, “Extended ZivZakai lower bound for vector parameter estimation”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 43, pp. 624 – 637, Mar. 1997.

[135] C. Amini, et al, “On the more accurate channel model and positioning based on time-of-arrival for visible light localization”, Optical Engineering, vol. 56, nro. 1, pp. 016110, 2017.

[136] A. Goldsmith, Wireless Communications. Cambridge University Press, 2004.

[137] A. Mostafa y L. Lampe, “Optimal and robust beamforming for secure transmission in MISO visible-light communication links”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 64, pp. 6501 – 6516, Dec. 2016.

[138] J. P. Goemaere, et al, “A survey on multiple access visible light positioning”, IEEE International Conference on Emerging Technologies and Innovative Business Practices for the Transformation of Societies (EmergiTech), pp. 38 – 42, Aug. 2016.

[139] H. L. V. Trees, Detection, Estimation, and Modulation Theory. John Wiley & Sons, New York, 2004.

[140] T. D. C. Little, y H. Elgala, “Adaptation of OFDM under visible light communications and illumination constraints”, 2014 48th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, pp. 1739–1744, Nov. 2014.

[141] H. Ma, L. Lampe, y S. Hranilovic, “Coordinated broadcasting for multiuser indoor visible light communication systems”, IEEE Transactions on Communications, vol. 63, pp. 3313–3324, Sep. 2015.

[142] L. Chen, B. Krongold, y J. Evans, “Theoretical characterization of nonlinear clipping effects in IM/DD optical OFDM systems”, IEEE Transactions on Communications, vol. 60, pp. 2304–2312, Aug. 2012.

[143] E. F. Schubert, Light-Emitting Diodes. Cambridge University Press, 2003.

[144] A. Pandharipande, y D. Caicedo, “Adaptive illumination rendering in LED lighting systems”, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, vol. 43, pp. 1052 – 1062, Sep. 2013.

[145] S. Boyd, y L. Vandenberghe, Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.

[146] M. Grant, y S. Boyd, “CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1.” http://cvxr.com/cvx, Mar. 2014.

[147] Y. C. Eldar, A. Ben-Tal, y A. Nemirovski, “Robust mean-squared error estimation in the presence of model uncertainties”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 53, pp. 168 – 181, Jan. 2005.

[148] M. B. Shenouda, y T. N. Davidson, “On the design of linear transceivers for multiuser systems with channel uncertainty”, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 26, pp. 1015 – 1024, Aug. 2008.

[149] J. Wang, y D. P. Palomar, “Worst-case robust MIMO transmission with imperfect channel knowledge”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, pp. 3086 – 3100, Aug. 2009.

[150] Y. Hu, y G. Leus, “Robust differential received signal strength-based localization”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 65, pp. 3261 – 3276, June 2017.

[151] A. Ben-Tal, y A. Nemirovski, Lectures on Modern Convex Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

[152] S. Boyd, et al, Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM, 1994.

[153] L. Vandenberghe, y S. Boyd, “Semidefinite programming”, SIAM Review, vol. 38, nro. 1, pp. 49 – 95, 1996.

[154] J. L¨ofberg, “YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in Matlab”, Proceedings of the CACSD Conference, (Taipei, Taiwan), 2004.

[155] Z. Q. Luo, et al, “Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems”, IEEE Signal Processing Magazine, vol. 27, pp. 20 – 34, May 2010.

[156] E. Xu, Z. Ding, y S. Dasgupta, “Source localization in wireless sensor networks from signal time-of-arrival measurements”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 59, pp. 2887 – 2897, June 2011.

[157] R.-L. Sheu, y J. Lin, “Solving continuous min-max problems by an iterative entropic regularization method”, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 121, nro. 3, pp. 597 – 612, 2004.

[158] H. M. Soliman, y A. Leon-Garcia, “Game-theoretic demand-side management with storage devices for the future smart grid”, IEEE Transactions on Smart Grid, vol. 5, pp. 1475 – 1485, May 2014.

[159] I. Din, y H. Kim, “Energy-efficient brightness control and data transmission for visible light communication”, IEEE Photonics Technology Letters, vol. 26, pp. 781 – 784, Apr. 2014.

[160] M. Keskinoz, et al, “Energy aware iterative source localization for wireless sensor networks”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 58, pp. 4824 – 4835, Sep. 2010.

[161] Y. E. Ustev, O. Durmaz Incel, y C. Ersoy, “User, device and orientation independent human activity recognition on mobile phones: Challenges and a proposal”, Proceedings of the 2013 ACM conference on Pervasive and ubiquitous computing adjunct publication, pp. 1427 – 1436, ACM, 2013.

[162] F. Li, C. Zhao, G. Ding, J. Gong, C. Liu, and F. Zhao, “A reliable and accurate indoor localization method using phone inertial sensors”, Proceedings of the 2012 ACM Conference on Ubiquitous Computing, pp. 421 – 430, ACM, 2012.

[163] V. Renaudin, y C. Combettes, “Magnetic, acceleration fields and gyroscope quaternion (MAGYQ)-based attitude estimation with smartphone sensors for indoor pedestrian navigation”, Sensors, vol. 14, nro. 12, pp. 22864 – 22890, 2014.

[164] S. Gezici, “Theoretical limits for estimation of periodic movements in pulsebased UWB systems”, IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, vol. 1, pp. 405 – 417, Oct. 2007.

[165] E. A. Boettner, y J. R. Wolter, “Transmission of the ocular media”, Investigative Ophthalmology & Visual Science, vol. 1, nro. 6, pp. 776 – 783, 1962.

[166] J. Michel, J. Liu, y L. C. Kimerling, “High-performance Ge-on-Si photodetectors”, Nature Photonics, vol. 4, nro. 8, pp. 527, 2010.

[167] D. Bachmann, et al, “CMOS-compatible graphene photodetector covering all optical communication bands”, Nature Photonics, vol. 7, nro. 11, pp. 892, 2013.

[168] T. Mueller, F. Xia, y P. Avouris, “Graphene photodetectors for highspeed optical communications”, Nature Photonics, vol. 4, nro. 5, pp. 297, 2010.

[169] F. LopezHernandez, et al, “Visible light communication systems for passenger in-flight data networking”, Consumer Electronics (ICCE), 2011 IEEE International Conference on, pp. 445 – 446, IEEE, 2011.

[170] M. Falcitelli, y P. Pagano, “Visible light communication for cooperative ITS”, Intelligent Transportation Systems, pp. 19 – 47, Springer, 2016.

[171] Y. Alayli, et al, “Visible light communications: Application to cooperation between vehicles and road infrastructures”, Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2012 IEEE, pp. 1055 – 1059, IEEE, 2012.

[172] L. N. Alves, et al, “Visible light communications in intelligent transportation systems”, Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2012 IEEE, pp. 748 – 753, IEEE, 2012.

[173] X. Li, R. Zhang, y L. Hanzo, “Optimization of visible-light optical wireless systems: Network-centric versus user-centric designs”, IEEE Communications Surveys Tutorials, 2018.

[174] R. Roberts, P. Gopalakrishnan, y S. Rathi, “Visible light positioning: Automotive use case”, Vehicular Networking Conference (VNC), 2010 IEEE, pp. 309 – 314, IEEE, 2010.

[175] M. Brooke, “Sparsity constrained split feasibility for dose-volume constraints in inverse planning of intensity-modulated photon or proton therapy”, Physics in Medicine and Biology, vol. 62, pp. 3599, May 2017.

[176] S. Yousefi, H. Wymeersch, X. W. Chang, and B. Champagne, “Tight twodimensional outer-approximations of feasible sets in wireless sensor networks”, IEEE Communications Letters, vol. 20, pp. 570 – 573, Mar. 2016.

[177] M. R. Gholami, M. Rydstrom, y E. G. Strom, “Positioning of node using plane projection onto convex sets”, 2010 IEEE Wireless Communication and Networking Conference, pp. 1 – 5, Apr. 2010.

[178] S. Gezici, et al, “A distributed positioning algorithm for cooperative active and passive sensors”, Proc. IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC), Sep. 2010.