Universidad Nacional
SAN LUIS GONZAGA

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN LUIS GONZAGA
EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

CONSTANCIA

El que suscribe, deja constancia que se ha realizado el análisis con el software de verificación de similitud al documento cuyo título es:

"LAS TRANSFORMACIONES LINEALES Y MODELOS ECONÓMICOS EN LA REGIÓN ICA, 2023"

Presentado por:

Mag. CESAR LOZA ROJAS

Lic. LUZ VERONICA ALTAMIRANO CONTEÑA

Lic. NAÚN JOSE ALVARADO FELIX MAGALLANES

Est. VLADIMIR ALDAIR HERRERA YALLICO

El resultado obtenido es el **6% de Similitud,** por el cual se otorga el calificativo de:

APROBADO, según Reglamento de Evaluación de la Originalidad

Se adjunta al presente el reporte de evaluación con el software de verificación de originalidad.

Ica, 03 de Enero del 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"
FACULTAD DE CIENCIAS
DR. CARLOS APARCANA AQUIJE
Director (e) de la Unidad de Investigación

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN LUIS GONZAGA

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS

Las transformaciones lineales y modelos económicos en la región Ica, 2023

Línea de investigación: Ciencias naturales, tecnologías y desarrollo sostenibles

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN

Investigador principal: Mag. Cesar Loza Rojas

Cesar.loza@unica.edu.pe

Orcid: 0000-0002-2543-525X

Equipo investigador

1. Luz Veronica Altamirano Conteña
Licenciada en Matemática
Veroacl1012@gmail.com

3. Vladimir Aldair Herrera Yallico
Estudiante Matemática e Informática
Código: 20170630
e-mail: 20170630@unica.edu.pe

2. Naún José Alvarado Félix Magallanes
Licenciado en Matemática
njafeflix147@gmail.com

Ica, Perú

2023

ÍNDICE

Índice de Tablas

Índice de Figuras

RESUMEN

Actualmente el avance tecnológico se debe prioritariamente al progreso de las matemáticas especialmente en modelos matemáticos y algoritmos los cuales no son bien aprovechados en nuestra región Ica, conocida por sus frutales como uva, mango, palta entre otras, generando en el sector agrario rubro agroexportación la elaboración, transporte y otras aplicaciones de productos a fin de minimizar sus costos operativos, para ello aplicamos transformaciones lineales en modelos económicos empleando funciones matemáticas en teoría económica mediante investigación cualitativa, teoría fundamentada en un diseño transversal-longitudinal de datos las cuales están representadas de forma matricial, que es una presentación de las transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión finita, cuyos temas más profundos son parte del álgebra lineal, no enmarcadas en este reporte. Al plantearnos un problema de programación lineal, minimización, su parte resolutiva se inicia con la identificación de variables de decisiones, es decir $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^n, n = 1,2,3,4,5,6$, determinamos función objetivo, las restricciones, lema de Farkas, el cual determina si existen soluciones, se modela matemáticamente los datos encontrados, lo insertamos en el software solver generando su solución, se presenta sus gráficas en el caso cuando n=2, n=3 y con los valores obtenidos se analiza en el modelo presentado propiciando una toma de decisión en las empresas de nuestra región Ica.

Palabras claves: Transformación lineal, modelos económicos, lema de Farkas, programación lineal.

ABSTRACT

Currently, technological advance is primarily due to the progress of mathematics, especially in mathematical models and algorithms, which are not well used in our Ica region, known for its fruit trees such as grapes, mango, avocado, among others, generating in the agricultural sector the agro-export category. manufacturing, transportation and other applications of products in order to minimize their operating costs, for this we apply linear transformations in economic models using mathematical functions in economic theory through qualitative research, theory based on a transversal-longitudinal design of data which are represented in a matrix, which is a presentation of linear transformations in finite-dimensional vector spaces, whose deeper topics are part of linear algebra, not covered in this report. When considering a linear programming problem, minimization, its solving part begins with the identification of decision variables, that is, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^n, n = 1,2,3,4,5,6$, we determine the objective function, the restrictions, Farkas's lemma, which determines if there are solutions, the data found is mathematically modeled, we insert it into the solver software generating its solution, its graphs are presented in The case when n=2, n=3 and with the values obtained is analyzed in the model presented, promoting decision-making in the companies of our Ica region.

Keywords: Linear transformation, economic models, Farkas' lemma, linear programming.

I. INTRODUCCIÓN

En el presente informe de investigación, se emplean las funciones matemáticas en teoría económica de la región Ica, al plantearnos un problema de minimización, se obtiene un modelo como solución y podemos adecuarlos a nuestras dificultades, mediante el empleo tecnológico nos proporciona una visualización al problema materia de análisis, para ello utilizamos investigación cualitativa, en teoría fundamentada. Las transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión finita son representadas por matrices el cual pueden ser cuadradas y no cuadradas, ello nos ayuda en los planteos de nuestros problemas, pues podemos ingresar varias variables, de manera que se forma un sistema finito de desigualdades lineales, en la obtención de solución se ocupa el teorema de solubilidad o lema Farkas haciendo un problema de programación lineal analizarla mediante dualidad en transporte, dieta, mezcla optima de producción y así aplicarlas a las industrias agroexportadoras, textilería, pesquería de nuestra región a fin de optimizar nuestros recursos humanos.

II. METODOLOGÍA

Se dispone de textos digitales, computadoras y materiales de oficina, se usa teoría fundamentada, el cual busca en los datos conceptualizaciones emergentes en patrones integrados y categorizados analizando, a través de pasos rigurosos, en un proceso de constante comparación, diseñado para generar conceptos y teorías que se fundamentan en los datos, de ahí su nombre, nos provee de instrumentos y guías analíticas estructuradas y explícitas para estudiar procesos y permitir la apertura para todos los posibles entendimientos teóricos engranando las interpretaciones alternativas de los datos mediante la codificación, categorización y construye verificaciones sistemáticas.

III. RESULTADOS

Definición 3.1. Sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V de dimensión n, sobre un cuerpo K, consideremos V∋ $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, denotaremos $[v]_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Definición 3.2. Sean V y U espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Si T: V→U se denomina **aplicación lineal o transformación lineal u homomorfismo de espacios vectoriales**, si se cumple:

1. $\forall u, w \in V: T(u + w) = T(u) + T(w)$.
2. $\forall u \in V,\ \forall \alpha \in K: T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Observación: Una definición alternativa a 3.2 es:

$$\forall u, w \in V, \forall a, b \in K: T(au + bw) = aT(u) + bT(w).$$

Se aplica cuando los espacios vectoriales son de dimensión finita.

Definición 3.3. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V sobre el cuerpo K y sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V, como T es un operador lineal, entonces $\{T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)\}$ una base de un espacio vectorial W, tenemos

$$\begin{array}{rl} T(e_1) = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\ T(e_2) = & a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ T(e_n) = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \end{array}$$

La transpuesta de la matriz de los coeficientes denotada por $[T]_e$ es:

$$[T]_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema 3.1. Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F, y W un espacio vectorial de dimensión m sobre F. Sean ß una base ordenada de V y ß' una base ordenada de W. Para cada transformación lineal T de V en W, existe una matriz m×n, A, cuyos elementos pertenecen a F, tal que $[T\alpha]_{ß} = A[\alpha]_{ß'}$, para todo vector α en V. Además, T→A es una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W y el conjunto de todas las matrices m×n sobre el cuerpo F. [1]

Ejemplo: Sea la transformación lineal

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (a, b, c) & \mapsto & T(a, b, c) = (2a + b - c, 3a - 2b + 4c) \end{array}$$

Demostrar que se cumple $[T\alpha]_{ß} = A[\alpha]_{ß'}$, donde ß={(1,1,1); (1,1,0); (1,0,0)}; ß'={(1,3); (1,4)} bases en cada espacio.

Resolución: Identificando $V=\mathbb{R}^3; W = \mathbb{R}^2$, espacios de dimensión finita, su transformación lineal asociada a una matriz de orden 2×3, entonces en ß: $T(1,1,1) = (2,5)$; $T(1,1,0) = (3,1)$; $T(1,0,0) = (2,3)$. En ß': sea $v=(s,t)=u_1(1,3)+u_2(1,4)$ entonces $(s,t)=(4s-t)(1,3)+(t-3s)(1,4)$ es combinación lineal de base ß'. Luego $T(1,1,1)=(2,5)=3(1,3)+(-1)(1,4)$;$T(1,1,0)=(3,1)=11(1,3)+(-8)(1,4)$;

$T(1,0,0)=(2,3)=5(1,3)+(-3)(1,4)$, cuya matriz asociada es $\begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix} = A$, sea $\alpha=(a,b,c)$, entonces $(a,b,c)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)$, hallando x, y, z en función de a, b, c es decir $(a,b,c)=c(1,1,1)+(b-c)(1,1,0)+(a-b)(1,0,0)$, luego $T(\alpha)=T(a,b,c)=(2a+b-c,3a-2b+4c)=(5a+6b-8c)(1,3)+(-3a-5b+7c)(1,4)$ obtenemos $T(\alpha) = \begin{bmatrix} 5a+6b-8c \\ -3a-5b+7c \end{bmatrix}$,

como $A[\alpha]_{ß'}=\begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a+6b-8c \\ -3a-5b+7c \end{bmatrix}$, esto cumple el teorema.

Lema 3.1 (Farkas): Sea $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$, S es un cono convexo cerrado en $\mathbb{R}^n$ y el doble cono de S es $S^*=\{z\in\mathbb{R}^n / z^T x \geq 0, \forall x\in S\}$. Si el cono convexo $C(A)=\{Ax / x\in S\}$ está cerrado, entonces exactamente una de las dos afirmaciones siguientes es verdadera:

1. existe un $x\in\mathbb{R}^n$ tal que $Ax=b$; $x\in S$.
2. existe un $y\in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y \in S^*$ y $b^T<0$.[3]

Ejemplo:

Sean $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; X; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, por el lema de Farkas, cual es la condición para que existan $X\epsilon \mathbb{R}^n$.

Resolución: De $A\in\mathbb{R}^{m\times n}= \mathbb{R}^{2\times 2}$ entonces m=n=2, $X=[x_1 \quad x_2]^T$, donde $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, se cumple AX=b, luego

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = b_1 \\ 3x_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1 = \frac{6b_2 - b_1}{14} \geq 0;\ \exists x_2 = \frac{3b_1 - 4b_2}{14} \geq 0$$

Teorema 3.2 (Weierstrass) Si la función objetivo es continua y el conjunto factible es cerrado y acotado entonces existen un mínimo y un máximo globales.[4]

Teorema 3.3 (local-global) Cuando el conjunto factible es convexo: si la función objetivo es convexa en caso de que exista un mínimo éste es un mínimo global (si es estrictamente convexa sería único y de carácter estricto.

APLICACIONES

1. La agroexportadora "VIRGEN DE GUADALUPE" en la provincia de Pisco, región Ica, compra azúcar blanca a \$3.0 y azúcar rubia a \$3.50 el kilo respectivamente. La siguiente tabla muestra las cantidades (en kilos) de enlatados de uva, mango y palta que pueden ser producidas por cada kilo de clase de azúcar.

Tabla III.1: Azúcar-Fruta

	Uva	Mango	Palta
Azúcar blanca	0.20	0.15	0.25
Azúcar rubia	0.18	0.32	0.16

La agroexportadora debe abastecer pedidos de 150 kilos de enlatados de uva, 80 kilos de enlatados de mango y 70 kilos de enlatados de palta. Formule un modelo matemático para determinar la cantidad óptima de kilos de azucares que deberá comprar para abastecer la demanda a un costo mínimo.

Resolución:

i. Variables de decisión: cantidad de kilos de azúcar a ser comprada: x_1=azúcar blanca, x_2=azúcar rubia.

ii. Función objetivo: $M(x_1, x_2)=3x_1+3.5x_2$. Esta expresión deberá ser minimizada

iii. Restricciones

a. De capacidad $\begin{cases} 0.2x_1 + 0.18x_2 \geq 150 & \text{(Uva)} \\ 0.15x_1 + 0.32x_2 \geq 80 & \text{(Mango)} \\ 0.25x_1 + 0.16x_2 \geq 70 & \text{(Palta)} \end{cases}$

b. De variables (cantidades) enteras: $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$.

c. De manera matricial: $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.18 \\ 0.15 & 0.32 \\ 0.25 & 0.16 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} \geq \begin{bmatrix} 150 \\ 80 \\ 70 \end{bmatrix}_{3\times 1} \Leftrightarrow AX = B$, por el lema de Farkas, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$, m=3, n=2, entonces existe $X\in\mathbb{R}^2$.

iv. El modelo matemático solicitado es: Min: $3x_1+3.5x_2$

s. a.

$$\begin{cases} 0.20x_1 + 0.18x_2 \geq 150 \\ 0.15x_1 + 0.32x_2 \geq 80 \\ 0.25x_1 + 0.16x_2 \geq 70 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

v. Solución del modelo: Aplicando SOLVER, su solución es: x_1= 750; x_2=0, es decir, se debe de colocar 750 kilos de azúcar blanca, 0 kilos de azúcar rubia, cuyo costo mínimo es de 2,250 dólares, se adjunta el gráfico, donde la intersección de la línea roja y azul es A=(750,0), el punto a minimizar.

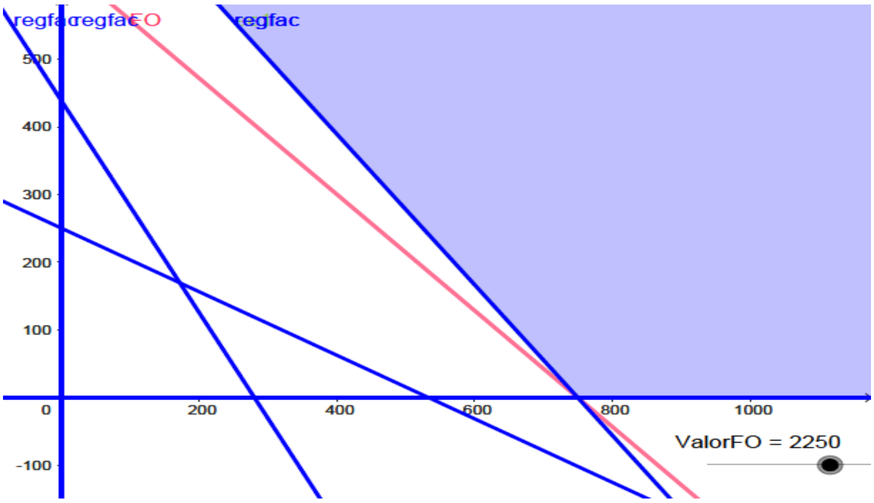

Fig. III.1: n=2

2. El departamento nutricional de la agroexportadora ''BETA" en la ciudad de Chincha presenta la siguiente tabla sobre el contenido de una dieta alimentaria para sus empleados.

Tabla III.2: Factores de una dieta

	Leche (lt.)	Legumbres(Kg.)	Zumo (lt.)	Necesidades
Niacina	6 mg.	50 mg.	5 mg.	40 mg
Tiamina	1.12 mg.	15 mg	19 mg.	15 mg
Vitamina "c"	32 mg.	0	150 mg.	100 mg.
Costo	1.25	2	1.1	Dólares

Se debe tener en cuenta que no puede contener más de 3 litros de líquidos y 500 gramos de legumbres. Formule el modelo matemático que permita obtener el costo mínimo y cuál es su valor. [6]

Resolución:

i. Variables de decisión: cantidad de alimentos de cada tipo que forman parte de la dieta: x_1=litros de leche, x_2=kilos de legumbres y x_3=litros de zumo

ii. Función objetivo: $C(x_1, x_2, x_3)=1.25x_1+2x_2+1.1x_3$. Esta expresión deberá ser minimizada

iii. Restricciones

a. De capacidad $\begin{cases} 6x_1 + 50x_2 + 5x_3 \geq 40 & \text{(Niacina)} \\ 1{,}12x_1 + 15x_2 + 19x_3 \geq 15 & \text{(Tiamina)} \\ 32x_1 + 150x_3 \geq 100 & \text{(vitamina c)} \\ x_1 + x_2 \leq 3 & \text{(líquidos)} \\ x_2 \leq 0{,}5 & \text{(legumbres)} \end{cases}$

b. De variables (cantidades) enteras: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^+$.

c. De manera matricial: $\begin{bmatrix} 6 & 50 & 5 \\ 1.12 & 15 & 19 \\ 32 & 0 & 150 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 15 \\ 100 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$ por el lema de

Farkas, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, m=4, n=3, entonces existe $X \in \mathbb{R}^3$.

iv. El modelo matemático solicitado es: Min: $1{,}25x_1 + 2x_2 + 1{,}1x_3$

sujeto a

$$\begin{cases} 6x_1 + 50x_2 + 5x_3 \geq 40 \\ 1{,}12x_1 + 15x_2 + 19x_3 \geq 15 \\ 32x_1 + 150x_3 \geq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 0{,}5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

v. Solución del modelo: Aplicando SOLVER, su solución es: x_1= 2,283; x_2= 0,5; x_3 = 0,26, es decir, se debe de colocar 2.283 litros de leche, 0.5 kilogramos de legumbres y 0.26 de zumo en su dieta, cuyo costo mínimo es de 4.14 dólares.

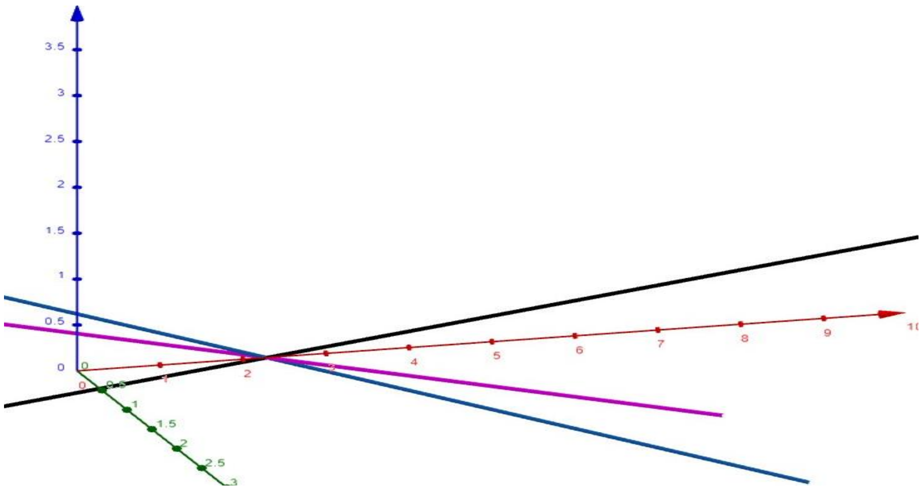

Fig. III.2: n=3

2. Un agricultor del sector de Ocucaje, tiene una parcela de 640m^2 para dedicarla al cultivo de árboles frutales: naranjos, perales, manzanos y limoneros. Cada naranjo necesita un mínimo de 16m^2, cada peral 4m^2, cada manzano 8m^2 y cada limonero 12m^2. El agricultor dispone de 900 horas de trabajo al año, necesitando cada naranjo 30 horas

al año, cada peral 5 horas, cada manzano 10 horas, y cada limonero 20 horas. Además, a causa de la sequía, el agricultor tiene restricciones para el riego y le han asignado 200m^3 de agua anuales. Las necesidades anuales son de 2m^3 por cada naranjo, 3m^3 por cada peral, 1m^3 por cada manzano, y 2m^3 por cada limonero. Determinar cómo repartir la superficie de la parcela entre las variedades para conseguir el máximo beneficio si los beneficios unitarios son de 50, 25, 20, y 30 dólares por cada naranjo, peral, manzano y limonero plantado, respectivamente y cuál es su beneficio.[2]

Resolución:

i. Variables de decisión: unidades a plantar de cada árbol x_1= # naranjas, x_2=#peras, x_3= # manzanas, x_4=#limón

ii. Función objetivo: $M(x_1, x_2, x_3, x_4)=50x_1+25x_2+20x_3+30x_4$. Esta expresión deberá ser maximizada

iii. Restricciones

a. De capacidad: $\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 \leq 640 & (superficie) \\ 30x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 20x_4 \leq 900 & (horas - trabajo) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 200 & (agua) \end{cases}$

b. De variables (cantidades) enteras: $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}^+$.

c. De manera matricial: $\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 & 12 \\ 30 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 640 \\ 900 \\ 200 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX \leq B$ por el lema de

Farkas, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, m=3, n=4, entonces existe $X \in \mathbb{R}^4$.

iv. El modelo matemático solicitado es: máx: $50x_1+25x_2+20x_3+30x_4$

sujeto a

$$\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 \leq 640 \\ 30x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 20x_4 \leq 900 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 200 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

v. Solución del modelo: Aplicando SOLVER, su solución es: x_1=10; x_2=48; x_3=36; x_4= 0, es decir, se debe de repartir las superficies en: 10 m^3 para las naranjas, 48 m^3 para las peras, 36 m^3 para las manzanas, 0 m^3 para los limones, cuyo beneficio máximo es de 2,420 dólares.

3. El comedor municipal del gobierno regional de Ica debe proporcionar un menú de costo mínimo, pero proporcionando al menos 1800 kilocalorías de energía; 60 gramos de

proteínas y 600 miligramos de calcio. La siguiente tabla muestra la cantidad de cada producto alimenticio y lo que esa cantidad aporta en energía, proteína y calcio:

Tabla III.3: Producto-Contenido del menú

Producto alimenticio	Cantidad del producto	Energía (Kilcal)	Proteína (gr)	Calcio (ml gr.)	Precio (S/.)
Leche	300 cm^3	160	10	300	1.0
Huevo	2 unidades	160	13	60	1.5
Pollo	100 gr.	205	35	12	1.5
Carne	260 gr.	260	14	80	4.0
Torta(mango)	180 gr.	430	4	25	2.0

Se recomienda que el menú no contenga más de 300 gramos de pollo, ni más de 2 huevos, ni más de 500 cm^3 de leche, ni más de 360 gramos de Torta, ni más de 520 gramos de carne. Formule el modelo matemático y determine el costo mínimo.

Resolución:

i. Variables de decisión: cantidad de producto alimenticio en dieta óptima x_1= leche, x_2=huevos, x_3=pollo, x_4=carne, x_5=torta.

ii. Función objetivo: C (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)= $x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 + 4x_4 + 2x_5$ .Esta expresión deberá ser minimizada

iii. Restricciones

a. De capacidad $\begin{cases} 160x_1 + 160x_2 + 205x_3 + 260x_4 + 430x_5 \geq 1800 \\ 10x_1 + 13x_2 + 35x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 60 \\ 300x_1 + 60x_2 + 12x_3 + 80x_4 + 25x_5 \geq 1800 \\ x_1 \leq 500 \\ x_2 \leq 2 \\ x_3 \leq 300 \\ x_4 \leq 520 \\ x_5 \leq 360 \end{cases}$

b. De variables (cantidades) enteras: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}^+$.

c. De manera matricial: $\begin{bmatrix} 160 & 160 & 205 & 260 & 430 \\ 10 & 13 & 35 & 14 & 4 \\ 300 & 60 & 12 & 80 & 25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1800 \\ 60 \\ 600 \\ 500 \\ 2 \\ 300 \\ 520 \\ 360 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = b$ por el lema de Farkas, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, m=8, n=5, entonces existe $X \in \mathbb{R}^5$.

iv. El modelo matemático solicitado es:

Min: $x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 + 4x_4 + 2x_5$

Sujeto a:

$$\begin{cases} 160x_1 + 160x_2 + 205x_3 + 260x_4 + 430x_5 \geq 1800 \\ 10x_1 + 13x_2 + 35x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 60 \\ 300x_1 + 60x_2 + 12x_3 + 80x_4 + 25x_5 \geq 1800 \\ x_1 \leq 500 \\ x_2 \leq 2 \\ x_3 \leq 300 \\ x_4 \leq 520 \\ x_5 \leq 360 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

v. Solución del modelo: Aplicando SOLVER, su solución es, x_1=1.7; x_2=0;x_3=0.9; x_4=0; x_5=3.14, evaluado en la función objetivo $x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 + 4x_4 + 2x_5$=9.33, es decir el menú económico sugerido tiene un costo mínimo de S/. 9.33

4. La agroexportadora ”Victoria” de la provincia de Ica, posee dos plantas donde elaboran enlatados de mango y uva a razón de 500 y 800 unidades diarias, que debe ser repartidos entre las ciudades de Chincha, Pisco y Marcona cuyas demandas son de 400, 400 y 500 unidades, si los costos del transporte por cada unidad que se envía a las ciudades mencionadas desde la planta 1 es en dólares de 2.1; 2.5 y 1.5 respectivamente y de la planta 2 es en dólares de 2.8; 1.3 y 1.9 respectivamente. Formule un modelo matemático que permite satisfacer el costo mínimo y cuál es su valor. [2]

Resolución:

i. Variables de decisión: n◦ de unidades transportadas desde cada planta hasta cada centro de distribución x_{ij}= unidades transportadas desde la planta i hasta el centro de distribución j con i=1,2; j=1,2,3, cuya matriz asociada es

ii. Función objetivo: C (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = $2,1x_{11} + 2,5x_{12} + 1,5x_{13} + 2,8x_{21} + 3,1x_{22} + 1,9x_{23}$. Esta expresión deberá ser minimizada

iii. Restricciones

a. De capacidad $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 800 \\ x_{11} + x_{21} \geq 400 \\ x_{12} + x_{22} \geq 400 \\ x_{13} + x_{23} \geq 500 \end{cases}$

b. De variables (cantidades) enteras: $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbb{Z}^+$.

iv. El modelo matemático solicitado es:

Min: $2,1x_{11} + 2,5x_{12} + 1,5x_{13} + 2,8x_{21} + 3,1x_{22} + 1,9x_{23}$

Sujeto a:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 800 \\ x_{11} + x_{21} \geq 400 \\ x_{12} + x_{22} \geq 400 \\ x_{13} + x_{23} \geq 500 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{cases}$$

v. Solución del modelo: Aplicando SOLVER, su solución es, de la planta 1, se distribuyen a Chincha 400 unidades; 100 unidades a Marcona, de la planta 2, se distribuyen a Pisco 400 unidades y 400 unidades a Marcona, cuyo costo mínimo de transporte es de 2,270 dólares

III. DISCUSIÓN

En la obtención de los resultados empleamos programación lineal cuyas componentes básicas son matrices el cual es una representación de una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, el lema de Farkas nos manifiesta la existencia de soluciones, en donde las matrices son no cuadradas, para luego emplear el algoritmo solver se plantean con variables finitas, iniciando en n=2 hasta n=6, cuyas gráficas se muestran cuando n=2,3 y en otros casos se presentan las soluciones para ser evaluadas en nuestra función objetivo a fin de obtener el costo mínimo, ayudando a las agroexportadoras en toma de decisión y así optimizar nuestros recursos, de esta forma usamos conocimientos matemáticos mediante modelo matemático y modelo económico los cuales son aplicables en nuestra región Ica.

IV. CONCLUSIONES

Se dispone de propiedades del Álgebra lineal, transformaciones lineales y matrices, lema de Farkas, en el planteamiento de situaciones cotidianas de nuestra región los que son modelados matemáticamente y resueltos mediante programación lineal con variables finitas originando modelos económicos en obtención de soluciones

V. RECOMENDACIONES

1. Ampliar las técnicas del álgebra matricial mediante software.
2. Desarrollar y ampliar temas en optimización y programación matemática.
3. Emplear el modelo matemático y modelo económico en materia económica para el desarrollo de nuestra región.
4. Utilizar software a fin de considerar más de una variable pues los problemas en la vida cotidiana, desde el punto vista de minimización y maximización.

VI. AGRADECIMIENTO

Al vicerrectorado de investigación por el apoyo brindado al presente proyecto mediante N°23-VRI-UNICA-2023

VII. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS

[1] K. Hoffman y R. Kunze, Álgebra lineal, Madrid: Prentice/Hall internacional, 1972.

[2] O. Guler, Foundation of Optimization, Londres: Springer, 2010.

[3] D. Escobar Uribe, Economía matemática, Bógota: Ediciones Uniandes: alfaomega colombiana, 2005.

[4] T. Holey y A. Wiedemann, Analysis and Linear Algebra. An introduction for economists, Berlin: Springer, 2023.

[5] A. Ventre, Calculus and Linear Algebra. Fundamentals and Applications, Suiza: Springer, 2023.

[6] J. S. Golan, The Linear Algebra a Beginning graduate student ought to know, New York: Springer, 2012.