



Universidad Nacional
SAN LUIS GONZAGA



Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional

Esta licencia permite a otras combinar, retocar, y crear a partir de su obra de forma no comercial, siempre y cuando den crédito y licencia a nuevas creaciones bajo los mismos términos.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>



UNIVERSIDAD NACIONAL SAN LUIS GONZAGA
EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

CONSTANCIA

El que suscribe, deja constancia que se ha realizado el análisis con el software de verificación de similitud al documento cuyo título es:

“MODELO MATEMÁTICO PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE Y ASIGNACIÓN DE RECURSOS”

Presentado por:

Dr. DE LA CRUZ TORRES JORGE LUIS

Dr. MORALES ALMORA JOSÉ LUIS

Dr. MAGALLANES YUI JAVIER EDUARDO

Mg. LANDEO ALFARO ELMER LEONIDAS

El resultado obtenido es el **6% de Similitud**, por el cual se otorga el calificativo de:

APROBADO, según Reglamento de Evaluación de la Originalidad

Se adjunta al presente el reporte de evaluación con el software de verificación de originalidad.

Ica, 03 de Enero del 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL "SAN LUIS GONZAGA"
FACULTAD DE CIENCIAS



Carlos Aparcana Aquije
DR. CARLOS APARCANA AQUJE
Director (e) de la Unidad de Investigación

UNIVERSIDAD NACIONAL “SAN LUIS GONZAGA”

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS



“Modelo matemático para el problema de transporte y asignación de recursos”

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Investigador Principal: Dr. De la Cruz Torres, Jorge Luis, Docente Principal Dedicación Exclusiva de la Universidad Nacional “San Luis Gonzaga” Adscrito a la Facultad de Ciencias

 [0000-0002-5622-4471](https://orcid.org/0000-0002-5622-4471)

Investigador Asociado: Dr. Morales Almora, José Luis, Docente Principal a Dedicación Exclusiva de la Universidad Nacional “San Luis Gonzaga” Adscrito a la Facultad de Ciencias

 [0000-0003-4089-4320](https://orcid.org/0000-0003-4089-4320)

Investigador Asociado: Dr. Magallanes Yui, Javier Eduardo, Docente Principal a Dedicación Exclusiva de la Universidad Nacional “San Luis Gonzaga” Adscrito a la Facultad de Ciencias

 [0000-0003-0943-9186](https://orcid.org/0000-0003-0943-9186)

Investigador Colaborador: Mg. Landeo Alfaro, Elmer Leonidas, Docente Auxiliar a Tiempo Parcial de la Universidad Nacional “San Luis Gonzaga” Adscrito a la Facultad de Ciencias.

 [0000-0003-1569-5629](https://orcid.org/0000-0003-1569-5629)

Línea de Investigación

Ciencias Naturales, Ingeniería y Tecnologías Sostenibles

Ica – Perú – 2023

1. RESUMEN

Los problemas en el mundo real precisan de soluciones rápidas y precisas para tomar una decisión rápida. Estos problemas pueden ser formulados matemáticamente como un problema de optimización lineal o no lineal, sujeto a diferentes restricciones. En este trabajo fue estudiado el problema de optimización lineal. El principal algoritmo computacional más utilizado para resolver este tipo de problemas es el método simplex. Este método precisa de algunas modificaciones cuando las restricciones están en estado de igualdad, lo que muchas veces lo hace costoso computacionalmente.

Por ejemplo, el problema de transporte es un problema clásico de programación lineal, que consiste en determinar una forma eficiente de transportar un bien disponible en cantidades limitadas de determinados locales para otros donde el bien es necesario, o designar una cantidad fija de n - individuos a realizar n -tareas, esto es un individuo por tarea y viceversa. Este problema de optimización lineal con restricciones de igualdad en el lenguaje matemático es un problema de optimización.

Resolver un problema básico de optimización lineal consisten en: obtener una solución básica o admisible, que satisface el criterio de optimalidad, hasta encontrar la mejor solución.

En este trabajo, fue propuesto utilizar métodos prácticos para encontrar soluciones básicas o admisibles para tratar con el costo computacional, los métodos estudiados fueron: Método de la esquina noroeste y Método de Vogel. Estas estrategias ayudaron a encontrar soluciones rápidas para tomar una decisión. Otro caso particular del problema de transporte es el problema de designación que es un problema también estudiado.

La estrategia propuesta fue aplicada a diferentes problemas existentes en la literatura. Estos algoritmos fueron programados utilizando bibliotecas del código Python-TensorFlow de Colaboratory da Google.

Palabras Claves: Problema de transporte, Logística de transporte, Optimización de rutas, Eficiencia en transporte, Método simplex de transporte

2. SUMMARY

Problems in the real world require quick and accurate solutions to make a quick decision. These problems can be formulated mathematically as a linear or nonlinear optimization problem, subject to different constraints. In this work the linear optimization problem was studied. The main computational algorithm most used to solve this type of problems is the simplex method. This method requires some modifications when the constraints are in a state of equality, which often makes it computationally expensive.

For example, the transportation problem is a classic linear programming problem, which consists of determining an efficient way to transport a good available in limited quantities from certain locations to others where the good is needed, or designating a fixed number of n -individuals. to perform n -tasks, that is, one individual per task and vice versa. This linear optimization problem with equality constraints in mathematical language is an optimization problem.

Solving a basic linear optimization problem consists of: obtaining a basic or admissible solution, which satisfies the optimality criterion, until the best solution is found.

In this work, it was proposed to use practical methods to find basic or admissible solutions to deal with the computational cost, the methods studied were: the northwest corner method and Vogel's method. These strategies helped to find quick solutions to make a decision. Another

particular case of the transportation problem is the designation problem, which is a problem also studied.

The proposed strategy was applied to different problems existing in the literature. These algorithms were programmed using Python-TensorFlow code libraries from Google Colaboratory.

Keywords: Transportation problem, Transportation logistics, Route optimization, Transportation efficiency, Simplex transportation method

3. INTRODUCCIÓN

Este proyecto se inicia con una amplia revisión bibliográfica de diferentes artículos científicos, tesis, libros para formular y desenvolver el problema propuesto. Entre los años de 1950 - 1960, creció el interés de resolver problemas aplicados al comercio e industria, en la actualidad esos problemas precisan de soluciones óptimas para tomar decisiones y ellas deben ser acuradas. El problema propuesto consistió en determinar una forma eficiente de transportar un bien disponible en cantidades limitadas de determinados locales para otros donde el bien es necesario, o designar una cantidad fija de n - individuos a realizar n -tareas, esto es un individuo por tarea y viceversa. El primer problema es llamado el problema de transporte, el segundo problema es el de asignación; el segundo un caso particular del primer problema.

El problema de transporte y asignación de recursos, es un problema de optimización lineal, particularmente problema de programación lineal sujeto a condicionamientos lineales (Moreira, 2010). Entre los diversos problemas en programación lineal, ambos son clasificados como los más importantes, porque presentan diferentes alternativas en la obtención de una solución. Por lo general, el problema puede ser resuelto de 3 maneras: gráficamente (apenas para dos o tres variables), analítica y numérica a través del computador (Miller y Liberman, 1991).

Resolver un problema básico de optimización lineal o programación lineal consisten en: obtener una solución básica o admisible, que satisface el criterio de optimalidad, hasta encontrar la mejor solución. El proceso de obtener una solución básica admisible muchas veces puede tornarse costoso computacionalmente.

En este trabajo fueron estudiadas las tres estrategias mencionadas. En la forma analítica fueron presentadas métodos sofisticados que ayudan a encontrar una solución básica para la resolución rápida de problemas de esta índole, el Método de la esquina noroeste y el Método de Vogel.

El método de la esquina noroeste goza de su mayor mérito, que es de fácil aplicación y su desmérito es que no considera la matriz de costos en la identificación de la solución básica admisible. El otro método estudiado fue el Método de Vogel o de las penalidades, esta estrategia permite obtener soluciones aproximadas para el problema de transporte, siendo esta su mayor ventaja y requiere la matriz de costos.

En el problema de asignación de recursos utilizamos el algoritmo húngaro o de Munkres, es un método óptimo para encontrar soluciones óptimas para este tipo de problemas. Todos los algoritmos fueron programados utilizando la biblioteca python.

Los métodos estudiados presentaron ventajas cuando fueron comparados con el método simples en diferentes problemas de aplicación. En las próximas secciones detallaremos los materiales y método utilizados en el desenvolvimiento de este trabajo, por fin presentaremos los principales resultados en diferentes aplicaciones.

3.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

3.1.1. Problema general

¿Existe una modificación del método simplex en la programación lineal para resolver el problema de transporte y asignación?

3.1.2. Problemas específicos

PE1: ¿Es posible resolver el modelo matemático del problema de transporte por el método simplex en la programación lineal?

PE2: ¿Es posible resolver el modelo matemático del problema de asignación de recursos por el método simplex en la programación lineal?

3.2. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

3.2.1. Justificación.

La investigación se justifica, debido a la necesidad de generar un nuevo método de solución de programas lineales como lo es el modelo de transporte y asignación. El método a utilizar es una variante del método simplex. El método de inicio para obtener una solución básica es el Método de la esquina noreste y el Método de Vogel.

3.2.2. Importancia.

La importancia de este trabajo consiste en que se dará a conocer una aplicación de la programación lineal al modelo de transporte y asignación. El problema de transporte es un instrumento de los modelos cuantitativos tendientes a mejorar diversas clases de problemas y ayudar en la elección adecuada. En este trabajo de investigación consideramos el modelo de transporte, que como parte de su trabajo, un gerente tiene que descubrir la forma más rentable y satisfactoria para el cliente de hacer llegar los productos de sus diferentes tiendas a sus clientes.

Este modelo se utiliza para hacer cosas como realizar un seguimiento del inventario, programar trabajos, asignar personal, gestionar el flujo de caja y establecer cantidades de reserva en las prensas, entre otras cosas.

3.3. HIPOTESIS Y VARIABLES

3.3.1. Hipótesis General.

Existe una modificación del método simplex en la programación lineal para resolver el problema de transporte y asignación.

3.3.2 Hipótesis Específicas

H1. Es posible resolver el modelo matemático para el problema de transporte por el método simplex en la programación lineal.

H2. Es posible resolver el modelo matemático para el problema de asignación de recursos por el método simplex en la programación lineal.

3.3.3. Variables

3.3.3.1. Variable Independiente

Problema de Transporte y asignación.

3.3.3.2. Variable Dependiente.

Modelo matemático

3.3.3.3. Variable Interviniente.

Método simplex.

3.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

3.4.1. Objetivo general.

Demostrar que existe una modificación del método simplex en la programación lineal para resolver el problema de transporte y asignación.

3.4.2. Objetivos específicos

OE1. Demostrar que es posible resolver el modelo matemático para el problema de transporte por el método simplex en la programación lineal.

OE2. Demostrar que es posible resolver el modelo matemático para el problema de asignación de recursos por el método simplex en la programación lineal.

4. MATERIALES Y MÉTODOS

En la recolección de la presente información básica, para concretar los objetivos y verificar las hipótesis planteadas se usará los siguientes instrumentos para la recolección de datos. Grupos de discusión y ficheros para la toma de apuntes diversos. Impresiones de libros y artículos científicos especializados. Reuniones de trabajo con investigadores en el área de nuestra investigación.

4.1. Formulaciones del problema de programación lineal

El problema de programación lineal en la forma general o mixta fue expreso:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a:} & h(\mathbf{x}) = 0 \\ & g(\mathbf{x}) < 0 \end{array}$$

donde,

- $f(\mathbf{x})$ = representa una función lineal
- $h(\mathbf{x})$ = denota la restricción de igualdad
- $g(\mathbf{x})$ = representa la restricción de desigualdad
- $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]^T$ denota el vector de las variables de decisión o de proyecto en el problema.

La función lineal de variable vectorial puede ser expresa como:

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_ix_i + \dots + c_nx_n$$

donde c_i representa un número real constante y x_i denota la i -ésima variable de decisión. Una forma simplificada de la función lineal puede ser dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_ix_i$$

o en su forma matricial como $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, donde $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Las propiedades fundamentales de la programación lineal son las siguientes:

1. La correlación entre las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo son lineales.
Esto significa que, si duplicamos las variables de decisión, también las variables de la función objetivo y de las restricciones también se duplican.
2. Las restricciones y la función objetivo se pueden sumar o restar, y la solución óptima del problema resuelto es la suma o resta de las soluciones óptimas de los problemas individuales.
3. El conjunto de soluciones factibles que cumplen con las restricciones, es un conjunto convexo. Esto significa que cualquier combinación lineal de dos soluciones factibles asimismo es una solución factible.
4. Si el problema tiene solución óptima, entonces existe un máximo (o mínimo) en uno de sus vértices.
5. Si el máximo (o mínimo) ocurre en más de un punto extremo, entonces asumirá el mismo valor en cualquier combinación convexa de esos puntos.
6. Cada problema de programación lineal tiene un problema dual asociado, que se puede obtener mediante la transformación de las restricciones en variables de decisión y viceversa. El problema dual posee una función objetivo y restricciones diferentes, pero su solución óptima es la misma que la del problema original.

El problema de programación lineal puede ser resuelto utilizando el método el método simplex, pero este método presenta algunas desventajas.

4.2. Problema de Transporte

Entre 1950 y 1960, creció el interés y desenvolvimiento de la pesquisa operacional debido a su aplicación en el comercio e industria (em logística, cadena de suministros, gestión de inventarios, entre otros). El problema de estos tiempos surge de la necesidad de determinar a forma más eficiente de enviar un bien disponible en cantidades limitadas en determinados locales para otros locales donde es necesario. Por ejemplo, una fábrica produce diferentes componentes que deben ser transportados a una central de ensamblaje central para ser ensamblados en un producto final. En la agricultura, los agricultores necesitan transportar sus productos a los mercados o centros de distribución. Las ideas presentadas están asociados al problema de Transporte.

O el problema de transporte puede ser muy complejo y costoso, especialmente cuando hay muchos puntos de origen y destino y se deben tener en cuenta múltiples factores, como el costo de transporte, la capacidad de carga, las restricciones de tiempo y la disponibilidad de recursos. Por lo tanto, necesitamos desarrollar métodos que ayuden a resolver este tipo de problemas y así obtener la solución más eficiente y rentable.

El problema de transporte en su forma general puede ser expreso como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } x \in \mathbb{R}^n & C(x) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \text{sujeto a:} & \sum_{j=1}^n x_{ij} &= f_i, \quad i = 1 \dots m \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1 \cdots n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

donde, la primera restricción está asociada con la capacidad de la fábrica, la segunda restricción está asociada con la capacidad de destino, x_{ij} representa la cantidad transportada de la fábrica i para el destino j , c_{ij} denota el costo unitario del transporte de la fábrica i para el destino j , m y n representan el número de fábricas y destinos, respectivamente.

Observaciones:

1. El problema de transporte es utilizado para minimizar el costo de envío.
2. Las fábricas no pueden producir más de lo que su capacidad y los centros do desean recibir volúmenes ultrapasando sus demandas.
3. En la restricción 1, mutante ofertado debe ser igual al demandado.
4. En la restricción 2 el sumatorio de las cantidades recibidas debe ser igual a lo ofertado.

Observado en la formulación del problema que existe una relación directa entre la cantidad enviada y recibida, pero muchas veces puede ocurrir factores externos que hagan que esto no sea satisfecho, por ejemplo, puede ocurrir que la oferta sea mayor que la cantidad demandada o que la demanda sea mayor que la oferta.

Caso 1.- Si la cantidad ofertada es mayor que la demanda: $\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq f_i, i = 1 \cdots m$: en este caso debemos introducir un destino fantasma, llamado *dummy*, que tenga los costos de transporte de todas las fábricas iguales a cero. Además de eso, la demanda del centro de consumidor de ser igual a la diferencia entre el ofertado y el total demandado.

Caso 2.- Si la cantidad demandada es mayor que la oferta:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq d_j, j = 1 \cdots n$$

en este caso debemos introducir una fuente de oferta fantasma, que tenga los costos de transportes para todos los destinos iguales a cero y una capacidad igual a la diferencia entre el total demandado y el total ofertado.

El sumatorio de las cantidades recibidas para cada centro consumidor de las m fábricas debe ser igual al total demandado por cada destino d_j , sumando ambos lados de las restricciones tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} &= \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} &= \sum_{i=1}^m d_j \end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$\sum_{i=1}^m f_i = \sum_{i=1}^m d_j$$

Esta última igualdad es la condición suficiente y necesaria para que cualquier problema de transporte tenga una solución óptima.

Caso 3.- Cuando la oferta es mayor que la demanda, o sea ni todas las fábricas producirán en plena capacidad, pero los consumidores recibirán la cantidad deseada:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq f_i$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j$$

Caso 4.- Cuando la demanda es mayor que la oferta, o sea ni todos los centros recibirán las cantidades deseadas, pero las fábricas producirán la capacidad deseada:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = f_i$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d_j$$

De ocurrir un desequilibrio entre la oferta y la demanda las siguientes acciones e interpretaciones pueden ocurrir.

Si la capacidad es mayor que la demanda, la acción es buscar nuevos consumidores y su interpretación sería que tenemos una capacidad ociosa de las fábricas, por ejemplo, mucho personal. Si la demanda es mayor que la capacidad, la acción es crear una nueva fábrica y la interpretación es que la demanda no es atendida

El método simplex es un procedimiento iterativo, que puede ser utilizados para la resolución de problemas de programación lineal con ciento o millares de variables, donde su principal requisito es que el problema sea formulado en la forma padrón.

En el problema de transporte las restricciones son definidas en igualdad, y corresponden a los m orígenes e n destinos. Estas restricciones no pueden ser tratadas directamente por el método simplex, por lo tanto, la alternativa correcta es adicionar variables artificiales para cada restricción. Las variables artificiales aumentan la tabla simplex para $(m+n+1)$ filas y $(m+1)$ $(n+1)$ columnas, La tabla simplex puede crecer rápidamente a medida que el número de destinos y orígenes aumenten:

Variable básica	Ecuación.	Coeficientes de:								Lado Derecho
		Z	...	x_{ij}	...	z_i	...	z_{m+j}	...	
Z	(0)	-1		c_{ij}		M		M		0
	(1)									
	⋮									
z_i	(i)	0		1		1				s_i
	⋮									
z_{m+j}	(m + j)	0		1				1		d_j
	⋮									
	(m + n)	0								

En la tabla simplex, los valores que no son exhibidos en las columnas son iguales a cero. Ahora para completar la primera iteración del método simplex falta eliminar algebraicamente los coeficientes no nulos de variables básicas (artificiales) iniciales. Después de cualquier iteración subsecuente, la fila cero asumirá la siguiente expresión:

Var.b ás.	Ec.	Coeficientes de:								Lado Derecho
		Z	...	x_{ij}	...	z_i	...	z_{m+j}	...	
Z	(0)	-1		$c_{ij} - u_i - v_i$		$M - u_i$		$M - v_i$		$\sum_{i=1}^m s_i u_i$ $- \sum_{i=1}^m s_i u_i$

donde, u_i es un múltiplo de la fila original i que es sustraído de la línea original 0 por el método simplex durante todas las iteraciones, llevando a la tabla simplex actual. v_i es un múltiplo de la fila original $m + j$ que es sustraído de la línea original 0 por el método simplex durante todas las iteraciones, llevando a la tabla simplex actual. Ahora se x_{ij} fuese una variable no básica, $c_{ij} - u_i - v_i$ será interpretada como la razón en la cual Z cambiará a medida que x_{ij} va incrementando.

Seguidamente, podemos emplear el método simplex a este problema modificado con objetivo de disminuir el costo total del transporte, llevando en consideración lo siguiente:

1. La inicialización para lograr una solución básica factible, que se efectúa artificialmente por medio de la inclusión de las variables artificiales como variables básicas iniciales y configurándolas como s_i y d_j .
2. El análisis de optimalidad verifica si todos los coeficientes de la variable básica en la primera fila de tabla simplex que todavía son no negativos.
3. La etapa 1 de una iteración requiere el conocimiento de la primera fila actual que se obtiene sustraendo determinado múltiplo de otra fila de la fila anterior. La etapa 2 determina la variable básica que sale e identifica la variable básica que llega a cero primero a medida que la variable básica que entra es aumentada. La etapa 3 determina la nueva solución básica posible que es encontrada sustraendo ciertos múltiplos de una fila de las demás filas de tabla simplex actual.

El método simplex, ira iterando entre soluciones básicas y un conjunto de variables no básicas. En cada iteración, la variable de entrada es escogida para entrar en la base y la variable de salida es escogida para deja la base, de modo que sea posible mejora la solución actual. Este procedimiento termina cuando alcanza una solución óptima.

5. RESULTADOS

A continuación, listamos todas las estrategias propuestas para resolver de forma más simplificada el problema de transporte y asignación.

5.1. Método Simplex Modificado para el Problema de Transporte

Basado en estas limitaciones, proponemos modificaciones al método simplex, al cual llamaremos método simplex de transporte, este nuevo método no necesita adicionar variables artificiales a las restricciones del problema de transporte para construir una solución básica o

viable inicial, que la primera fila de la tabla simplex puede ser obtenida sin usar cualquier otra fila, calculando directamente los valores actuales de u_i y v_i resolviendo apenas un conjunto de ecuaciones y establecer la variable básica que sale sin usar los coeficientes de la variable básica que entra. La principal contribución es que casi toda la tabla simplex puede ser eliminada. El método precisa de datos de entrada, esto son los valores de entrada c_{ij} , s_i y d_i , las únicas informaciones necesarias para el método simple de transporte son la solución básica factible actual, el valor actual de u_i y v_i , y los valores resultantes de $c_{ij} - u_i - v_i$ para variables no básicas x_{ij} .

Si resolvemos el problema manualmente, podemos registrar esas informaciones para cada iteración en la llamada tabla simplex de transporte:

		Destino				oferta	u_i
		1	2	...	n		
Origen	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	s_1	
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	s_2	
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	
	m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	s_m	
Demanda		d_1	d_2	...	d_n	$Z =$	
	v_i						
Informaciones adicionales a ser considerada en cada célula		Si x_{ij} é una variable básica		Si x_{ij} no es una variable básica			
		c_{ij} x_{ij}		c_{ij} $c_{ij} - u_i - v_j$			

En la tabla, los valores de x_{ij} y $c_{ij} - u_i - v_j$ son diferenciados. A diferencia entre el método simplex y simplex de transporte será vista en una aplicación más adelante.

Recordemos que el objetivo de la inicialización es lograr una solución básica inicial. Debido a que todas las restricciones del problema de transporte son de igualdad, el método simplex tradicional lograría la solución básica adicionando variables artificiales y usarlas como las variables básicas iniciales. En el caso del método simplex de transporte contornea este procedimiento y construye directamente una solución básica general.

Debemos precisar:

1. El número de variables básicas en cualquier solución básica de un problema de transporte es menor de lo que esperamos.
2. En un problema de programación lineal, existe una variable básica para cada restricción funcional.
3. En el caso del problema de transporte, el número de restricciones funcionales es $m + n$.
4. El número de variables básicas es $m + n - 1$.
5. En el problema de transporte, las restricciones funcionales son de igualdad y ese conjunto de $m + n$ ecuaciones no posee ninguna ecuación extra que pueda ser eliminada sin alterar la región de soluciones viables. Esto significa que cualquier de una de las restricciones es automáticamente satisfecha toda vez que las otros $m + n - 1$ sean satisfechas.
6. El procedimiento para construir una solución básica inicial seleccionamos las $m + n - 1$ variables básicas de una sola vez. Después de cada selección, un valor que iría satisfacer una restricción adicional.

A seguir discutiremos cada punto propuesto para enunciar el método simplex modificado.

5.2. Procedimiento genérico para construir una solución básica inicial:

Todas las filas del origen y columna de destino de la tabla simplex de transporte inicialmente son consideradas para fornecer una variable básica. Este procedimiento puede ser obtenido en 4 pasos:

1. A partir de las filas y columnas aún en cuestión, seleccionamos la próxima variable básica de acuerdo con algún criterio.
2. Hacer que la distribución sea suficientemente grande para consumir con exactitud la oferta restante en su fila o demanda restante en su columna, aquella que sea la menor.
3. Eliminar la fila o columna (aquella que tenga la menos oferta o demanda restante) de consideración adicional. Si la fila y columna tienen la misma oferta o demanda, entonces seleccione arbitrariamente la línea como aquella a ser eliminada. La columna será utilizada posteriormente para fornecer una variable básica degenerada, esto es una distribución igual a cero, envuelta en un círculo.
4. Si apenas una fila o una única columna permanece para consideración, entonces el procedimiento es concluido seleccionándose toda variable restante asociada a aquella fila o columna a ser básica con la única distribución viable. Caso contrario, retorne para el paso 1.

Los procedimientos alternativos a la etapa 1 son el método de extremo noroeste, el método de aproximación de Vogel e el método de la aproximación de Russel. Estas estrategias serán discutidas en el siguiente informe.

5.3. Método de extremo Noroeste

La principal ventaja del método es su fácil aplicación y su mayor desventaja es que no considera la matriz de costos en la identificación de la SBA inicial ($x_{ij} \geq 0$). La SBA por el algoritmo del canto noroeste puede ser obtenido en los siguientes pasos:

1. Definir $x_{ij} = x_{11}$ como la primera variable básica para $i = 1 \cdots n$ y $j = 1 \cdots m$.

Donde:

$$x_{ij} = \{demanda - j, oferta - i\}$$

$$x_{ij} = \{d_j, f_i\}$$

2. Actualización

2.1. Si $x_{ij} = d_j$, entonces actualizamos la oferta f_i :

$$f_i \leftarrow f_i - x_{ij}$$

luego eliminamos las j –ésimas líneas restantes.

2.2. Si $x_{ij} = f_j$, entonces actualizamos la oferta d_j :

$$d_j \leftarrow d_j - x_{ij}$$

luego eliminamos las i –ésimas columnas restantes:

$$f_i \leftarrow f_j - x_{ij}$$

3. Luego regresamos al paso 1 para la segunda variable básica y así sucesivamente.

5.4. Método de la aproximación de Vogel

El método de aproximación de Vogel o también conocido como el método de las penalidades es una rutina de cálculos que permite lograr una solución cercana para la problemática de transporte.

La gran ventaja de ejecutar el método es que el proporciona una solución bien próxima del óptimo o a veces la propia solución óptima.

Para aplicar el método de Vogel es necesario la existencia de una matriz de transporte. O sea, los valores de los costos ya deben ser sido calculados antes de ejecutar el algoritmo.

El algoritmo realiza las distribuciones de forma indirecta por medio de los costos. Su realización envuelve cálculos para especificar las penalidades. La penalidad es definida como la diferencia positiva entre los dos menores costos inseridos en la misma línea o la misma columna.

De la pose de la penalidad debidamente calculada, se verifica en cual línea, o columna, es obtenido el mayor valor de la penalidad. En esta línea, o columna, se localiza la célula que posee el menor costo para atribuir la cantidad de suministros de acuerdo a las cantidades de capacidad y demanda.

Caso el valor de la demanda fuese completamente suprimido, la entidad de destino es retirada de los cálculos de las próximas penalidades que son reiniciados. Caso las penalidades encontradas sean iguales, se captura el menor valor de los costos para finalizar el restante de los cálculos. Este procedimiento es repetido hasta que los valores de demanda sean satisfechos o los finalizados.

Algoritmo de Vogel:

1. Para cada fila y cada columna de la matriz de transporte, determina la diferencia entre el primer costo y segundo menor costo, constituyendo entonces la penalidad asociada.

2. Identificar la fila o columna con mayor penalidad (o costo de oportunidad).
3. En la fila de menor o mayor penalidad, encontrar la célula de costo mínimo.
4. Distribuir tanto posible la célula identificada, o sea, la demanda u oferta mínima.
5. Eliminar de los cálculos restantes la fila o columna que fue completamente satisfecha por la locación.
6. Recalcular las penalidades para la matriz transparente, la excepción de los valores de fila o columna ya satisfechos.
7. Repetir los pasos de 2 a 5 hasta que no sea posible realizar nuevos cálculos de penalidad, distribuyendo las cantidades restantes en las posiciones aún disponibles y de acuerdo con sus valores de demanda y capacidad.

5.5. Formulación del método de designación:

El problema de designación es un caso particular del problema de transporte. El problema consiste en designar n individuos a n tareas, o sea, un individuo por tarea y una tarea por individuo, y su objetivo es disminuir o maximizar el costo total envuelto en el problema, siendo conocidos los costos unitarios, c_{ij} , de designar el individuo i a la tarea j ($i, j = 1, \dots, n$).

El problema de designación puede ser expresado matemáticamente como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } x \in R^n & C(x) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \text{sujeto a:} & \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 1 \dots n \\ & & \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1, \quad j = 1 \dots n \end{aligned}$$

Si $x_{ij} = 1$, significa que el individuo i fue designado a la tarea j . Si $x_{ij} = 0$ el individuo i no fue designado a la tarea j . El conjunto de restricciones garantiza que cada individuo es enviado exactamente a solamente una tarea, y que cada tarea es realizada por exactamente un solo individuo, respectivamente.

Existen varios algoritmos para resolver el problema de designación, por ejemplo, el algoritmo húngaro, propuesto por Harold Kunh en 1955 y fue revisado por James Munkres en 1957. y los algoritmos de programación lineal entera, normalmente estas técnicas buscan encontrar una solución óptima o aproximada.

Las aplicaciones del problema de asignación es una parte esencial de la investigación, optimización combinatoria, proporcionando una forma simple para resolver problemas complejos en diferentes áreas de la matemática e ingeniería, por ejemplo:

- Optimización de recursos: es utilizado para optimizar la asignación de recursos limitados, como trabajadores, máquinas, tiempo o presupuesto. Al encontrar la asignación más

eficiente, se puede lograr un uso óptimo de los recursos utilizables y minimizar el desperdicio.

- En Logística y distribución: es fundamental para optimizar el transporte de bienes y servicios, garantizando que los productos se entreguen a los destinos adecuados de la manera más eficiente posible.
- En Gestión de proyectos, la asignación adecuada de tareas a los miembros del equipo es crucial para garantizar que los proyectos se completen de manera efectiva y dentro de los plazos establecidos.
- Planificación de horarios: En sectores como el transporte público, la salud o la educación, la asignación adecuada de horarios y turnos a los empleados o recursos es esencial para garantizar un funcionamiento sin problemas y una atención oportuna a los usuarios.
- Atribución de responsabilidades: En situaciones donde múltiples personas o entidades deben ser responsables de diferentes tareas o roles, el problema de asignación ayuda a determinar quién debe asumir cada responsabilidad de manera justa y eficiente.
- En Economía: La asignación eficiente de trabajadores y empleos puede influir en la productividad económica, el desarrollo y el desarrollo de las empresas y la sociedad en general.

Principales propiedades del problema de asignación:

1. El problema de asignación involucra dos conjuntos disjuntos de elementos, comúnmente denominados "conjunto de origen" y "conjunto de destino". Los elementos de un conjunto deben asignarse a los elementos correspondientes del otro conjunto, y cada elemento debe asignarse exactamente a un elemento del otro conjunto.
2. La unicidad de asignación: Cada elemento del conjunto de origen se asigna a exactamente un elemento del conjunto de destino, y viceversa. No se permiten asignaciones duplicadas o múltiples asignaciones para un solo elemento.
3. Las restricciones: El problema puede incluir restricciones que limiten ciertas asignaciones. Estas restricciones pueden surgir de limitaciones de recursos, preferencias, capacidades o cualquier otra condición que deba cumplirse en la asignación.
4. Posee una estructura matricial: Una forma común de representar el problema de asignación es mediante una matriz de costos o beneficios. Esta matriz muestra el costo o el beneficio de asignar cada elemento del conjunto de origen a cada elemento del conjunto de destino. La estructura matricial facilita la aplicación de algoritmos y técnicas para hallar la asignación óptima.
5. La solución única o múltiple: Dependiendo de la naturaleza de los costos y las restricciones, el problema de asignación puede tener una única solución óptima o múltiples soluciones óptimas que logran el mismo resultado objetivo.

Principales desventajas del problema de asignación:

El problema de asignación es una técnica valiosa y ampliamente usada en la busca de soluciones, también presenta algunas desventajas y limitaciones:

1. A medida que el tamaño de los conjuntos de elementos aumenta, la complejidad computacional del problema de asignación también puede aumentar significativamente, resultando costoso computacionalmente.

2. En algunos casos, se pueden presentar restricciones complejas y difícil de modelar, lo cual dificulta encontrar una solución óptima.
3. En algunos casos puede haber múltiples soluciones óptimas o soluciones que cumplen con los mismos criterios de optimización. Esto puede dificultar la elección de la mejor solución o interpretar los resultados.
4. La solución del problema de asignación puede depender en gran medida de los costos o beneficios asignados a cada combinación de elementos. Pequeñas variaciones en los costos pueden llevar a diferentes soluciones óptimas, lo que puede hacer que el problema sea más delicado y dependiente de los valores asignados.

Es importante tener en cuenta estas desventajas al utilizar el problema de asignación, una alternativa para superar estas limitaciones es utilizar estrategias híbridas o técnicas adicionales para encontrar una solución.

Algoritmo para resolver el problema de Asignación

El algoritmo de asignación, también conocido como algoritmo húngaro o algoritmo de Munkres, es un método eficiente para encontrar la solución óptima en un problema de asignación. Este algoritmo se basa en el concepto de encontrar el conjunto mínimo de líneas que cubren todas las células o celdas con el valor mínimo necesario para resolver el problema. A seguir, detallamos paso a paso el procedimiento del algoritmo de asignación:

Primero vamos a suponer que tenemos una matriz cuadrada de costos o beneficios a la que llamamos "matriz de costos" que representa el problema de asignación, donde las filas representan los elementos del conjunto de origen y las columnas simbolizan los elementos del conjunto de destino.

Paso 1: Restar los mínimos locales de las filas: Restar el valor mínimo de cada fila de sus respectivos elementos. Esto asegura que al menos un cero esté presente en cada fila.

Paso 2: Restar los mínimos locales de las columnas: Restar el valor mínimo de cada columna de sus respectivos elementos. Esto asegura que al menos un cero esté presente en cada columna.

Paso 3: Marcar los ceros con líneas verticales y horizontales. Encontrar el conjunto mínimo de líneas horizontales y verticales que cubran todos los valores cero de la matriz. Esto se hace para identificar una posible solución inicial.

Paso 4: Verificar si la solución es óptima: Si el número de líneas mínimas necesarias para cubrir todos los ceros es igual al tamaño de la matriz (es decir, hay tantas líneas como filas o columnas), entonces la solución presente es óptima y se puede proceder al paso 6. Si no, continúe con el paso 5.

Paso 5: Actualizar la matriz de costos y regresar al paso 3. Encuentre el valor más pequeño que no está cubierto por ninguna línea y réstelo de todos los elementos no cubiertos por líneas. Luego, agregue este valor a los elementos cubiertos por dos líneas. Regrese al paso 3 para marcar los nuevos ceros.

Paso 6: Realice la asignación basada en las líneas marcadas:

- Si una fila está sin marcar, asigne el elemento con valor cero de esa fila al elemento correspondiente en la columna.
- Si una columna está marcada, asigne el elemento con valor cero de esa columna al elemento correspondiente en la fila.

Paso 7: Finalización: La asignación realizada en el paso 6 es la solución óptima para el problema de asignación original.

5.6. Códigos de programación

5.6.1. Algoritmo simplex

IMPORTANDO LIBRERIAS

```
from scipy.optimize import linprog
from time import time
```

El Defaul de este código es minimizar, o sea:

1. Para maximizar debemos multiplicar los coeficientes de la función objetivo por el signo "-".

Ejemplo de maximizar un problema de programación lineal:

```
#
# f = 5x[0] + 3x[1] + 0.5x[2]
#
# 1x[0] + 3x[1] + 4x[2] <= 7
# 2x[0] + 0.4x[1] + 6x[2] <= 10
#     x[1] >= 0
#     x[2] >= 0
#     x[3] >= 0
# defina
# 1.- options_solver = 0 para minimizar
# 2.- options_solver = 1 para maximizar
options_solver = 1
c = [5, 3, 0.5]
A = [[1, 3, 4], [2, 0.4, 6]]
b = [7, 10]
if options_solver==1:
    c = [-x for x in c]
# el límite inferior es 0 y el superior es cualquier.
x0_bounds = (0, None)
# el límite inferior es 0 y el superior es cualquier.
x1_bounds = (0, None)
# el límite inferior es 0 y el superior es cualquier.
x2_bounds = (0, None)
# El default de scipy es método simplex.
# Restriciones de la forma A x <= b
# Llamada de la función objetivo.
res = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=(x0_bounds, x1_bounds, x2_bounds),
              options={"disp": True})
# Imprimiendo las respuestas después de optimización.
if options_solver==0:
    print('Función objetivo =', res.fun)
elif options_solver==1:
    print('Función objetivo =', -1*res.fun)
    print('variable optima x[0] =', res.x[0])
    print('variable optima x[1] =', res.x[1])
    print('variable optima x[2] =', res.x[2])
```

```
print(res.message)
print('número de iteraciones =',res.nit)
```

5.6.2. Método de transporte

#Importando las bibliotecas

```
# Importando la biblioteca Numpy:
```

```
import numpy as np
```

```
# Importando la biblioteca scipy:
```

```
from scipy. optimize import linear_sum_assignment
```

#Defina la capacidad de producción

```
# Capacidad de producción:
```

```
capacidad_fabrica = []
```

#Defina la demanda:

```
# Demanda dos Armazéns
```

```
demanda_almacen = []
```

#Defina los costos de transporte en la matriz

```
# Defina los costos de transporte como una matriz.
```

```
# Cada elemento (i, j) representa el costo de transportar
```

```
# del origen i para el destino j.
```

```
cost_matrix = np. Array ([])
```

```
# imprimiendo el tamanho de la matriz
```

```
cost_matrix. shape
```

#Utilizando la función para resolver el problema

```
# Usando o algoritmo de designação linear para encontrar a alocação ótima
```

```
row_ind, col_ind = linear_sum_assignment(cost_matrix)
```

#Proceso para encontrar los valores óptimos

```
# Imprimiendo los valores optimos y costos
```

```
total_cost = 0
```

```
for i in range(len(row_ind)):
```

```
    row = row_ind[i]
```

```
    col = col_ind[i]
```

```
    costo_unitario = cost_matrix[row][col]
```

```
    cantidad_distribuida = min(capacidade_fbricas[row], demanda_almacen[col])
```

```
    costo_total = cantidad_distribuida * costo_unitario
```

```
    print(f"Fábrica {row + 1} -> Almacen {col + 1} (Costo: {costo_total}, Cantidades:  
{cantidad_distribuida})")
```

```
    total_cost += costo_total
```

```
    capacidad_fabrica[row] -= cantidad_distribuida
```

```
    demanda_almacen[col] -= cantidad_distribuida
```

```
print(f"Custo total: {total_cost}")
```

5.6.3. Método de designación

#Importando las bibliotecas

```
import numpy as np
```

```
from scipy. optimize import linear_sum_assignment
```

#Defina la matriz de costos

```
# Matriz de costos de atribución  
cost_matrix = np. array ([])
```

#Llamada del algoritmo de designación

```
# Usando o algoritmo de designação linear para encontrar a alocação ótima  
row_ind, col_ind = linear_sum_assignment(cost_matrix)
```

#Proceso de encontrar las asignaciones óptimas

```
# Imprimiendo la distribución óptima y los costos asociados  
total_cost = 0  
for i in range (len(row_ind)):  
    cost = cost_matrix[row_ind[i]] [col_ind[i]]  
    total_cost += cost  
    trabajador = f"W{row_ind[i]+1}"  
    tarea = f"T{col_ind[i]+1}"  
    print(f"{trabajador} -> {tarea} (Custo: {cost})")  
print (f"Costo total: {total_cost}")
```

Aplicación: Tenemos tres trabajadores (W1, W2, W3) y tres tareas (T1, T2, T3) y queremos atribuir cada trabajador a una tarea de forma que los costos totales sean minimizados. Los costos asociados a cada combinación trabajador-tarea.

	T1	T2	T3
W1	8	3	7
W2	4	2	6
W3	5	8	5

W1 -> T2 (Costo: 3)

W2 -> T1 (Costo: 4)

W3 -> T3 (Costo: 5)

Costo total: 12

6. DISCUSION

Si el problema de transporte es equilibrado, se garantiza la solución óptima. En cambio, si el problema no es equilibrado, se hacen algunas modificaciones en los orígenes o en los destinos, esto de acuerdo al problema que no está equilibrado.

Los métodos utilizados en este trabajo de investigación también se pueden aplicar a estos problemas no equilibrados. Pero en la solución final, en el caso de orígenes ficticios, los flujos a enviar a los destinos, no deben enviarse nada, o de lo contrario van a quedar almacenados en esta fuente y los costos de envío de orígenes ficticios a los destinos ficticios van a ser cero.

Un método utilizado es el método simplex modificado, este método modificado utiliza el programa dual del problema de minimización de transporte, en algunos textos aparece un método

llamado método de cruce de arroyo, el cual utiliza un poco de teoría de flujos (ciclos), similarmente al método simplex, este método termina cuando se cumple la prueba de optimalidad.

En este trabajo de investigación se han hecho programas de computación para resolver la problemática de transporte y otro para resolver el problema de asignación de recursos. Estos programas sirven para resolver los problemas de transporte y asignación cuando hay muchas variables, en caso contrario los cálculos son muy lentos y se pueden cometer muchos errores en ellos.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo fue presentado el problema de transporte y designación originarios del problema de programación lineal. Fueron expuestas diferentes estrategias para encontrar una solución básica para su solución. Los métodos más importantes para encontrar una solución básica es el método de la esquina noroeste, el método húngaro y el método de Vogel, por otro lado, todos estos métodos fueron programados utilizando el lenguaje de programación python. Dentro del estudio realizado tenemos las siguientes conclusiones:

1. El problema planteado en este trabajo monográfico, tiene solución, puesto que se plantea como un problema de transportación equilibrado. En el caso de exista exceso de suministro, se utiliza un cliente figurado para absorber el suministro de exceso y para balancear el problema.
2. En el caso de que exista un exceso de demanda, se utiliza un suministro figurado para cumplir con la demanda excesiva y para equilibrar el problema.
3. La versión del método simplex para el problema de transportación, es sencilla de aplicar, solo consiste en encontrar una base, y luego resolver los pasos de determinar los ciclos, se verifica si esta solución es óptima, en caso contrario se busca una nueva base y se hace el pivoteo.
4. A fin de producir la representación adecuada para una celda (variable) no básica dada, simplemente se localiza el único ciclo, en la gráfica básica, que contiene el arco asociado con la celda no básica particular. Entonces, para la representación de la celda no básica se requieren todas las celdas básicas de la matriz de transporte asociada con los arcos del ciclo en la gráfica. El proceso de localizar la representación directamente sobre la matriz de transportación es esencialmente el mismo, salvo que no se utilizan todas las celdas básicas en el ciclo único. En este caso solamente se usan aquellas celdas de la cadena para las cuales existe otra celda de la cadena en la misma fila y otra celda de la cadena en la misma columna, es decir, los vértices del ciclo.

8. REFERENCIAS

- [1] Arenales Marcos et al. *Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, 2011
- [2] BRONSON, RICHARD. "Investigación de Operaciones". Serie de Compendios Schaum. McGraw-Hill. México, Bogotá-Guatemala, Lisboa, Madrid, Nueva York, Panamá, San Juan, Santiago, Sao Paulo,
- [3] GASS S. "*Programacion Lineal*". Compañía Editorial Continental S.A. Mexico, D.F. 1981
- [4] HEADY E. y LANDLER W. "*Linear Programming Methods*" The Iowa States College Press. Ames Iowa, USA.

- [5] MILLER, F y LIBERMAN B. *“Introducción a la Investigación de Operaciones”*. McGraw – Hill, 1991.
- [6] Moreira, Daniel Augusto, *Pesquisa Operacional – Curso Introdutorio*, 2011.
- [7] PRAWDA J. *“Métodos y modelos de investigación de Operaciones”*. Editorial Limusa, México, 1990.